

การพัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวน
เรื่อง

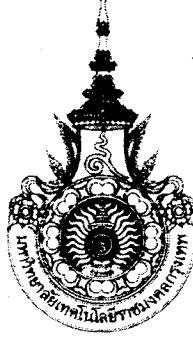
“ปริมาตร”



โดย

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วรรณา ไชยวิโน
งานวิจัยนี้ได้รับงบประมาณเงินผลประโยชน์ของ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

พ.ศ. 2551



การพัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับทบทวน
เรื่อง

“ปริมาตร”



โดย

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วรรณา ไชยวิโน
งานวิจัยนี้ได้รับงบประมาณเงินผลประโยชน์ของ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

พ.ศ. 2551

กิตติกรรมประกาศ

รายงานการวิจัยเรื่อง “การพัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร” มีวัตถุประสงค์ที่จะแก้ปัญหการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะวิชาแคลคูลัสซึ่งมีลักษณะเป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรมขึ้น เพื่อจะได้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (แคลคูลัส) สูงขึ้น

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์เฉลิม มัติโก อธิการบดีมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ และ ดร.สาธิต พุทธิชัยวงศ์ รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการและวิจัย ที่ได้เห็นความสำคัญและประโยชน์ของการวิจัยที่มีต่อการเรียนการสอน พร้อมทั้งให้การสนับสนุน และให้คำปรึกษาด้านงบประมาณ และขอขอบคุณ อาจารย์จิราภรณ์ สัพทานนท์ ผู้อำนวยการสถาบันวิจัยและพัฒนา ที่ให้คำปรึกษาและข้อเสนอแนะในการดำเนินงาน จนทำให้งานสำเร็จด้วยดี

และขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ ที่ได้ให้ทุนอุดหนุน ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้

ผู้วิจัย

ผศ.วรรณภา ไชยวิโน



ชื่อโครงการวิจัย : การพัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร

ชื่อผู้วิจัย : ผู้ช่วยศาสตราจารย์วรรณา ไชยวิโน

ปีที่ทำการศึกษา : พ.ศ. 2551

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีจุดประสงค์เพื่อ (1) พัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร (2) หาประสิทธิภาพของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร (3) หาความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย เป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ จำนวน 30 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ (1) สื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ซึ่งประกอบด้วย การทบทวนการเขียนรูป 2 มิติ และ 3 มิติ การทบทวนการหาปริพันธ์ชั้นเดียวและสองชั้น และการหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระบบฝึกคิด (2) แบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน และ (3) แบบสอบถามความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร การเก็บรวบรวมข้อมูลทำโดยการนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ที่พัฒนาและปรับปรุงแล้ว ไปทดสอบหาประสิทธิภาพ ด้วยการทดสอบแบบเดี่ยว ทดสอบแบบกลุ่ม และทดสอบภาคสนาม การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาประสิทธิภาพสื่อการเรียนรู้ ใช้สูตร E_1/E_2 และใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ในการหาความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร

ผลการวิจัยพบว่า (1) สื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตรมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 80/80 ในทุกเนื้อหา ได้แก่ ทบทวนการเขียนรูป 2 มิติ และ 3 มิติ มีประสิทธิภาพ 83.45/82.68 ทบทวนการหาปริพันธ์ชั้นเดียวและสองชั้น มีประสิทธิภาพ 80.74/81.25 และการหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระบบฝึกคิด มีประสิทธิภาพ 80.95/81.22 และ (2) ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ในภาพรวมอยู่ในระดับ “มาก” ในแต่ละด้านย่อยๆ นักศึกษามีความพอใจในระดับ “มาก” ในด้านการใช้ภาษาที่ชัดเจน เข้าใจง่าย ในด้านเนื้อหาที่ทำให้เรียนแล้วเข้าใจในเรื่องนั้นดีขึ้นและในด้านอื่นๆ และนักศึกษามีความพอใจในระดับ “มากที่สุด” ในด้านรูปแบบคอมพิวเตอร์ที่ทำให้การเรียนน่าสนใจ และในด้านแบบทดสอบที่ทำให้มีความพร้อมในการสอบ

the interesting model and examination paper for preparatory examination as “very good”.

Research Title : The Development of Computer-assisted Instruction for Revising
the Topic of Volume

Researchers : Asst. Prof. Wanna Chaiwino

Organization : Rajamangala University of Technology Krungthep

Academic Year : B.C. 2008

Abstract

The purposes of this research were : (1) to develop computer-assisted instruction for revising the topic of volume (2) to find the efficiency of computer-assisted instruction for revising the topic of volume and (3) to find the students' opinions on using computer-assisted instruction for revising the topic of volume.

The sample of the study comprised 30 junior students from the Electrical Engineering Department, Faculty of Engineering , Rajamangala University Technology Krungthep. The research instrument utilized in this study were; (1) computer-assisted instruction for revising the topic of volume ; consists of revising for graph in two and three dimensions , revising for Integral and double integrals and finding the volume by double integrals in rectangular coordinate system (2) pretest-paper and posttest-paper and (3) questionnaires on the students' opinions concerning computer-assisted instruction for revising the topic of volume . The data was collected from the developed and improved computer-assisted instruction for revising the topic of volume in three steps ; individual, small group and field testing the formula E_1 / E_2 was used to test the efficiency of computer-assisted instruction for revising the topic of volume. The mean and the standard deviation from the questionnaires were also calculated.

Research findings were as follow : (1) the efficiency of computer-assisted instruction for revising the topic of volume : revising for graph in two and three dimensions, revising for Integral and double integrals and finding the volume by double integrals in rectangular coordinate system were 83.45/82.68 , 80.74/81.25 and 80.95/81.22 respectively; and (2) the students' total opinions concerning computer-assisted instruction for revising the topic of volume as "good" and for each revising topic as "good" ; i.e. using explicit language and easy to understand, well-content leads to understand the volume and the other. The students' opinions concerning computer-assisted instruction for revising the topic of volume for the interesting model and examination paper for preparatory examination as "very good".

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ.....	ก
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ค
บทที่ 1 บทนำ.....	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	5
ความสำคัญของการวิจัย.....	5
ขอบเขตของการวิจัย.....	5
นิยามศัพท์.....	5
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	6
บทที่ 2 วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง.....	7
ทฤษฎีการเรียนรู้.....	7
กระบวนการเรียนรู้และทักษะการเรียนรู้.....	9
การพัฒนาการแก้ปัญหาโจทย์แบบทดสอบเรื่องปริมาตร.....	12
การจัดการเรียนการสอนที่มีประสิทธิภาพ.....	13
สื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอน.....	18
การประดิษฐ์และพัฒนาสื่อการเรียนรู้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน.....	23
การทบทวน.....	30
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	32
บทที่ 3 การดำเนินการวิจัย.....	36
ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง.....	36
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	36
ขั้นตอนและวิธีวิจัย.....	37
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	41
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	42
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	43
ผลการวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่อง “การพัฒนา คอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับทบทวนเรื่องปริมาตร”.....	43
ผลการวิเคราะห์ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่อง “การพัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับทบทวนเรื่องปริมาตร”.....	45

	หน้า
บทที่ 5 สรุปการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	48
สรุปการวิจัย.....	48
อภิปรายผลการวิจัย.....	49
ข้อเสนอแนะในการวิจัย.....	50
บรรณานุกรม	51
ภาคผนวก	53
ตัวอย่างบทเรียนช่วยสอนเรื่อง “การพัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร”.....	54
สรุปเนื้อหา “บททวนการเขียนรูป”.....	66
สรุปเนื้อหา “บททวนระบบพิกัดฉาก”.....	66
สรุปเนื้อหา “บททวนการเขียนรูป 2 มิติ”.....	70
สรุปเนื้อหา “บททวนการเขียนรูป 3 มิติ”.....	78
สรุปเนื้อหา “บททวนการหาปริพันธ์”.....	93
สรุปเนื้อหา “บททวนการหาปริพันธ์ชั้นเดียว”.....	93
สรุปเนื้อหา “บททวนการหาปริพันธ์สองชั้น”.....	106
สรุปเนื้อหา “การเขียนรูปทรง 3 มิติเพื่อหาปริมาตร”.....	109
สรุปเนื้อหา “การใส่ลิ้มิตปริพันธ์สองชั้น”.....	112
สรุปเนื้อหา “การหาปริมาตร โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น”.....	116
แบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐาน.....	120
แบบทดสอบเรื่อง “ระบบพิกัดฉาก”.....	130
แบบทดสอบเรื่อง “เส้นตรง”.....	136
แบบทดสอบเรื่อง “วงกลม”.....	140
แบบทดสอบเรื่อง “พาราโบลา”.....	143
แบบทดสอบเรื่อง “การเขียนรูป 3 มิติ”.....	146
แบบทดสอบเรื่อง “การหาปริพันธ์ชั้นเดียว”.....	153
แบบทดสอบเรื่อง “การหาปริพันธ์สองชั้น”.....	157
แบบทดสอบเรื่อง “การใส่ลิ้มิตปริพันธ์สองชั้น”.....	161
แบบทดสอบเรื่อง “การหาปริมาตร โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น”.....	164
แบบสอบถาม “ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร”.....	171
ประวัติผู้วิจัย.....	173

บทที่ 1

บทนำ

1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

สถาบันอุดมศึกษาถือได้ว่าเป็นสถานบันการศึกษาระดับสูงที่มีความสำคัญต่อการพัฒนาสังคม มีภารกิจที่สำคัญ 4 ประการคือ การผลิตบัณฑิต การวิจัย การบริการวิชาการแก่สังคม และการทำนุบำรุงศิลปวัฒนธรรม (คณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. 2540 : คำนำ) มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ เป็นสถาบันอุดมศึกษาสถาบันหนึ่งที่เน้นทางด้านวิชาชีพและเทคโนโลยี โดยที่ร่างพระราชบัญญัติมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล กล่าวถึง วัตถุประสงค์ว่าให้มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล ให้การศึกษาส่งเสริมวิชาการและวิชาชีพชั้นสูงที่เน้นการปฏิบัติการสอน การวิจัย การผลิตครูวิชาชีพ การจัดการศึกษาตลอดชีวิตด้านวิชาชีพ ให้บริการวิชาการแก่สังคม ทำนุบำรุงศิลปวัฒนธรรมและรักษาสิ่งแวดล้อม จากวัตถุประสงค์ของมหาวิทยาลัยดังกล่าวนำไปสู่เป้าประสงค์ในการจัดการศึกษาที่มุ่งสู่การผลิต “ บัณฑิตนักปฏิบัติ ” ดังเช่นที่เคยปฏิบัติมาตั้งแต่ในอดีต ปัจจุบัน และกำลังจะก้าวไปสู่อนาคต แต่จะต่างกันที่กระบวนการในการจัดการศึกษาที่จะให้ได้มาซึ่งบัณฑิตนักปฏิบัตินั้น จะต้องมีความเข้มข้น และเป็นรูปธรรมมากยิ่งขึ้น

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ เป็นสถาบันที่ให้บริการด้านการศึกษาระดับปริญญาตรี ในการจัดการเรียนการสอนจะมีทั้งในส่วนของวิชาชีพเฉพาะสาขา และวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์เป็นวิชาพื้นฐานวิชาหนึ่งที่มีการสอนในทุกสาขาวิชาชีพ ยุพิน พิพิธกุล (2539) ได้ให้ความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ว่าเป็นวิชาที่พัฒนาความคิดและสร้างสรรค์ ทำให้มีการคิดอย่างเป็นระบบ ระเบียบ มีเหตุผล ซึ่งเป็นรากฐานที่สำคัญในวิทยาการหลายสาขา แต่นักศึกษาที่เรียนทางสายอาชีพส่วนใหญ่มีผลการเรียนปานกลาง หรือต่ำ ทำให้เป็นอุปสรรคในการใช้ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์

ในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ โดยทั่วไปมีปัญหาหลายด้าน แต่ที่พบบ่อยคือ

1. ขาดแคลนครูผู้สอน ทำให้ต้องใช้ผู้สอนที่ไม่มีความชำนาญ
2. ผู้สอนมีชั่วโมงการสอนมาก และต้องสอนหลายวิชา แต่ละวิชาก็มีเนื้อหาหนัก และเนื้อหา

ค่อนข้างเป็นนามธรรม เป็นเหตุให้ผู้สอนไม่มีเวลาในการสร้างสื่อการสอน ไม่มีเวลาตรวจแบบฝึกหัด ไม่มีเวลาทบทวนบทเรียนให้นักศึกษาก่อนสอบ สิ่งเหล่านี้เป็นเหตุให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้จะเป็นการสรุปเนื้อหาเรื่องการหาปริมาตร โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระบบพิกัดฉาก และยังมี การทบทวนเนื้อหาที่ใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนเรื่องปริมาตร ได้แก่ ระบบพิกัดฉากใน 2 มิติ และ 3 มิติ การเขียนรูป 2 มิติ 3 มิติ และการหาปริพันธ์ชั้นเดียวและสองชั้นอีกด้วย นอกจากนี้ยังมีแบบทดสอบเพื่อให้ผู้เรียนใช้ฝึกทักษะในการทำแบบทดสอบ โดยผู้เรียนสามารถรู้ผลได้ทันที และจะทำซ้ำกี่ครั้งก็ได้จนกว่าจะได้คะแนนเป็นที่น่าพอใจ ทำให้พบข้อบกพร่องของตนเอง เป็นการเรียนตามเอกัตภาพของแต่ละคน ซึ่งจะทำได้

ผู้เรียนมีทักษะในการทำโจทย์และมีความเข้าใจในเนื้อหาวิชามากขึ้น ส่งผลให้มีการพัฒนาการเรียนการสอน อันจะเป็นผลทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาสูงขึ้น

3. วิธีสอน ส่วนใหญ่วิธีสอนจะใช้วิธีบรรยายซึ่งเป็นการถ่ายทอดความรู้จากผู้สอนฝ่ายเดียว ทำให้ไม่เกิดแรงกระตุ้นในการเรียน เป็นเหตุให้ผู้เรียนไม่สนใจ และยังไม่สอดคล้องกับพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 ในหมวด 4 เรื่องแนวทางการจัดการศึกษามาตรา 22 ซึ่งกล่าวว่า การจัดการศึกษาต้องยึดหลักว่าผู้เรียนทุกคนมีความสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้ และถือว่าผู้เรียนมีความสำคัญที่สุด กระบวนการจัดการศึกษาต้องส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาตามธรรมชาติและเต็มตามศักยภาพ (พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 : 12)

4. หลักสูตร ปัญหาของหลักสูตรในระดับประถมศึกษา ซึ่งเป็นพื้นฐานของการเรียน ได้ส่งผลกระทบต่อการเรียนในระดับมัธยมศึกษาและระดับสูงขึ้นไป กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ ได้ศึกษาปัญหาคุณภาพการศึกษาที่เกิดจากหลักสูตรฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533 ซึ่งเป็นการศึกษาที่มุ่งเน้นการวัดผลผลิตทางการศึกษา(Educational Production Function Model : EPF Model) (กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ 2543 : 5-8) ได้กล่าวถึงผลผลิตของการจัดการศึกษา และกระบวนการเรียนการสอนไว้ดังนี้

ผลผลิตของการจัดการศึกษา พบว่า (1) อัตราตกซ้ำชั้นและการลาออกกลางคันของนักเรียนยังอยู่ในระดับสูง (2) ผลการเรียนในวิชาพื้นฐานที่สำคัญ มีแนวโน้มต่ำลง และไม่อาจเทียบกับมาตรฐานการเรียนรู้อื่นๆได้ (3) ในระดับประถมศึกษา นักเรียนส่วนใหญ่มีผลการประเมินคุณภาพการศึกษา วิชาภาษาไทย คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ พละงานมัย การคิดและการแก้ปัญหาอยู่ในระดับพอใจ (4) ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ผลการประเมินคุณภาพการศึกษา วิชาคณิตศาสตร์ และสังคมศึกษา พบว่าวิชาคณิตศาสตร์ นักเรียนร้อยละ 81 และวิชาสังคมศึกษา นักเรียนร้อยละ 61 มีผลการประเมินอยู่ในระดับปรับปรุง และ (5) ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย วิชาวิทยาศาสตร์ (เคมี ชีววิทยา ฟิสิกส์) วิชาคณิตศาสตร์ และภาษาอังกฤษ นักเรียนร้อยละ 70 มีการประเมินคุณภาพอยู่ในระดับต้องปรับปรุง

กระบวนการเรียนการสอน พบว่า (1) ครูส่วนใหญ่สอนโดยยึดตัวครูเป็นศูนย์กลาง (2) ใช้การบรรยายเน้นการท่องจำเนื้อหา (3) เน้นการสอนตามหนังสือมากกว่าการให้นักเรียนฝึกปฏิบัติจริง (4) สอนเน้นที่เนื้อหามากกว่ากระบวนการเรียนรู้ (5) ให้ความสำคัญต่อการคัดเลือกเข้าเรียนต่อในระดับสูงมากกว่าการพัฒนานักเรียนตามศักยภาพ (6) ห้องเรียน/ชุมชน เข้ามาร่วมจัดการเรียนการสอนได้น้อย และ (7) ครูยังไม่ค่อยใช้สื่อและเทคโนโลยีในการจัดการเรียนการสอน

ปัญหาคุณภาพการศึกษาดังกล่าว หากไม่รีบแก้ไข ผลเสียที่จะเกิดตามมา ได้แก่ ความด้อยคุณภาพของนักเรียน ดังผลการวิจัยของกรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ ดังกล่าวแล้วว่า“ ผลการเรียนในวิชาพื้นฐานที่สำคัญ มีแนวโน้มต่ำลง และไม่อาจเทียบกับมาตรฐานการเรียนรู้อื่นๆได้ ” จากความด้อยคุณภาพของผู้เรียน จะส่งผลต่อความด้อยคุณภาพของประชาชนในประเทศในที่สุด อันเป็นสภาพที่ไม่พึงประสงค์ และจำเป็นต้องเร่งแก้ไข

มีผลการวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ดังนี้

เสาวนีย์ สิกขามันจิต (2525) จากผลการวิจัยพบว่า ในการจัดการเรียนการสอนจุดมุ่งหมายที่สำคัญ คือ การสอนให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ แต่การเรียนรู้จะเกิดขึ้นหรือไม่ขึ้นกับความพร้อมของผู้เรียนด้วย ได้แก่ ความพร้อมทางด้านอารมณ์และความพร้อมทางด้านพื้นฐานความรู้ นอกจากนี้ยังต้องคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลด้วย และเป็นที่ยอมรับกันว่าการสอนที่ดีที่สุดคือ การสอนแบบเอกัตบุคคล หรือ การสอนเป็นรายบุคคลนั่นเอง

จารึก ศรีคุณโณ (2535) จากผลการวิจัยพบว่า เหตุที่ทำให้การเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ไม่ประสบผลสำเร็จ เนื่องจากครูผู้สอนไม่สามารถใช้วิธีสอนให้เหมาะสมกับความต้องการ ความถนัด หรือความสามารถที่แตกต่างกันได้และวิธีสอนของครูก็สอนนักเรียนทุกคนอย่างเดียวกัน โดยมีได้คำนึงถึงความสามารถของผู้เรียน ว่าใครเรียนได้เร็ว เรียนได้ช้า ดังนั้นการสอนแบบปกติจึงไม่สามารถแก้ปัญหาความสามารถในการเรียนรู้ที่แตกต่างกันของผู้เรียนได้

มอร์แกน (Morgan 1990 : 980-981) ได้ศึกษาการเรียนการสอนของนักศึกษา คณะวิศวกรรมศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา สรุปได้ว่า เนื้อหาคณิตศาสตร์มีความยาก และซับซ้อน อาจารย์จะต้องอธิบายจากลำดับที่ง่ายไปหายาก และต้องหาวิธีในการสอนแบบใหม่ๆ เป็นการกระตุ้นเพื่อสร้างแรงจูงใจและแนวคิด

ในการวิจัยครั้งนี้จะเป็นการสรุปและทบทวนเนื้อหาเรื่องปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระบบฝึกด้นจากให้แก่ผู้เรียน หรือผู้เรียนจะเลือกฝึกทักษะในการทำแบบทดสอบในเนื้อหาที่เรียนก็ได้ โดยผู้เรียนสามารถรู้ผลได้ทันที และจะทำซ้ำๆหลายครั้งก็ได้ จนกว่าจะได้คะแนนเป็นที่น่าพอใจ ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนมีทักษะในการทำโจทย์ และมีความเข้าใจในเนื้อหาวิชา พร้อมทั้งจะทำข้อสอบจริง อันจะเป็นผลทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาสูงขึ้น

จากแนวทางการแก้ปัญหาคุณภาพการเรียน ด้วยการฝึกทักษะการเรียนรู้ให้กับนักศึกษา ซึ่งนับเป็นวิธีการแก้ปัญหาที่ตัวนักศึกษาโดยตรง ด้วยการฝึกให้นักศึกษาเกิดทักษะการเรียนรู้ขึ้น และจากงานวิจัยจำนวนมาก เช่นงานวิจัยของ สุพัตรา พาหะมาก (2538) และงานวิจัยของทองสุข เกลี้ยงพร้อม (2531) แสดงให้เห็นว่า ทักษะการเรียนรู้เหล่านี้สามารถฝึกได้เช่นเดียวกับทักษะประเภทอื่นๆ และทักษะการเรียนรู้เหล่านี้สามารถฝึกได้จากคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาใช้ช่วยในการฝึกทักษะนั้น สอดคล้องกับงานวิจัยของ สุชาติ วงศ์สุวรรณ (2540 : 2) ให้ข้อเสนอแนะว่าผู้สอนควรจะนำนวัตกรรมใหม่ๆมาใช้ในการสอนคณิตศาสตร์ มีรูปแบบใหม่ ทันยุคทันสมัย ทำให้เป็นเรื่องที่น่าสนใจ เกิดแรงจูงใจในการเรียน ดังนั้นจึงได้มีการปรับปรุงการจัดการเรียนการสอน โดยการนำนวัตกรรมใหม่ๆมาใช้ในการเรียนการสอนเรื่อยมา เช่น การใช้แผนภูมิ การใช้แผ่นโปร่งใส การใช้บทเรียนแบบโปรแกรม การใช้บทเรียนจากสื่อวีดิทัศน์ และมีการนำคอมพิวเตอร์มาใช้เป็นสื่อในการสอน เนื่องจากในปัจจุบันคอมพิวเตอร์ได้เข้ามามีบทบาทในวงการศึกษาอย่างมาก อนุอมพร เลหาจรัสแสง (2541 : 3) กล่าวว่าสถานศึกษาได้มีการนำคอมพิวเตอร์มาใช้ในงานต่างๆ เช่น (1) คอมพิวเตอร์กับการบริหาร (2) คอมพิวเตอร์กับการจัดการเรียนการสอน (3) คอมพิวเตอร์ช่วยสอน

(4) คอมพิวเตอร์กับอุปกรณ์การเรียนการสอน และ (5) คอมพิวเตอร์กับการติดต่อสื่อสารและการค้นหาข้อมูล โดยเฉพาะอย่างยิ่งคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีบทบาทต่อการเรียนการสอนในลักษณะที่นำมาใช้สอนแทนครู ช่วยในการเสนอเนื้อหา ใช้เป็นสื่อการสอนและฐานข้อมูล

จากหลักฐานงานวิจัยในช่วง 30 ปีที่ผ่านมา สรุปได้ว่าคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เป็นสื่อการศึกษายุคใหม่ที่มีประสิทธิภาพมาก จึงได้รับความนิยมในแวดวงการศึกษา นอกจากนี้คอมพิวเตอร์ยังมีคุณสมบัติที่เหนือกว่าเทคโนโลยีอย่างอื่นหลายประการ คือ คอมพิวเตอร์สามารถที่จะมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียนได้ โดยตั้งคำถามให้ผู้เรียนตอบ และคอมพิวเตอร์จะบอกว่าตอบถูกหรือผิด ถ้าตอบถูกจะให้คำชมเชย ถ้าตอบผิดก็ให้เฉลยและอธิบายในส่วนที่ผิด นอกจากนี้ยังช่วยให้ผู้เรียนได้แก้ปัญหา โดยให้ผู้เรียนตั้งคำถามเอง แล้วคอมพิวเตอร์จะให้ คำตอบ โดยจะเฉลยเป็นขั้นๆ หรือจะแสดงเฉพาะคำตอบก็ได้ นอกจากนี้คอมพิวเตอร์ยังช่วยแก้ปัญหาการเรียนรู้สำหรับบุคคลที่มีความแตกต่างกันทางด้านสติปัญญา ซึ่งบางคนเรียนได้เร็ว บางคนเรียนได้ช้า ปัจจุบันการนำคอมพิวเตอร์มาใช้ในการเรียนการสอน จึงเป็นที่นิยมใน ประเทศต่างๆทั่วโลก และมีแนวโน้มว่าจะมีการใช้คอมพิวเตอร์ในการศึกษาทุกระดับการศึกษา ตั้งแต่การศึกษาขั้นพื้นฐานจนถึงการศึกษาระดับอุดมศึกษา

การวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ส่วนมากเป็นการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มที่เรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน และกลุ่มที่เรียนตามปกติ ซึ่งผลการวิจัยมีทั้งที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างและไม่แตกต่างกัน งานวิจัยที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาที่ใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนสูงกว่าการเรียนของนักศึกษาที่เรียนตามปกติ ได้แก่ งานวิจัยของเกษม พิงพา (2541) กรองทอง ศรีอาภรณ์ (2540) เบญญา เพียรสวรรค์ (2540) สารภี ศิริอนันท์พัฒน์ (2540) และไพฑูรย์ นพภาส (2535) ส่วนงานวิจัยที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาที่ใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน ไม่ต่างกับการเรียนตามปกติ ได้แก่ งานวิจัยของ โรนัลโด (Rinaldi 1997) ฟินช์ (Finch 1997) และ จิราภรณ์ สัทพานนท์ (2538)

การฝึกทบทวนเนื้อหา และฝึกทำแบบทดสอบจากบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เป็นวิธีการหนึ่งที่จะช่วยให้นักศึกษาพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนได้ หากนักศึกษาได้รับการฝึกอย่างเพียงพอและต่อเนื่อง แต่บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นต้องมีประสิทธิภาพ ดังนั้นการวิจัยครั้งนี้ จึงมุ่งที่จะประดิษฐ์และพัฒนาสื่อการเรียนรู้ คอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่องปริมาตร สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ ให้มีคุณสมบัติที่ถูกต้องตามหลักวิชาการ มีการทดสอบประสิทธิภาพของสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอน รวมทั้งสามารถพัฒนาทักษะการเรียนรู้ของนักศึกษาให้เพิ่มขึ้น เพื่อจะทำให้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น และส่งผลทำให้คะแนนสอบดีขึ้น และยังเป็นการเพิ่มปริมาณสื่อการเรียนรู้ให้ศูนย์การเรียนรู้ด้วยตนเอง และลดการนำเข้าสื่อการสอนจากต่างประเทศ นอกจากนี้สื่อการเรียนรู้ที่ได้จะเป็นสื่อที่ตรงกับความต้องการของผู้สอนและเหมาะสมกับธรรมชาติของผู้เรียนอีกด้วย

2. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

- 2.1 เพื่อพัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร
- 2.2 เพื่อหาประสิทธิภาพของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร
- 2.3 เพื่อหาความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร

3. ความสำคัญของการวิจัย

ผลการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ และนักศึกษาที่มีปัญหาในการเรียนวิชาแคลคูลัส เพราะลักษณะวิชาค่อนข้างเป็นนามธรรมมากกว่ารูปธรรม ยากต่อการเข้าใจ ซึ่งสื่อการสอนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้จะช่วยแก้ปัญหาได้ และจะส่งผลให้มีการพัฒนาการเรียนการสอน จำนวนนักศึกษาที่ตกจะน้อยลง ซึ่งเป็นผลดีต่อมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

4. ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้กำหนดขอบเขตของงานวิจัย ดังนี้

- 4.1 ประชากร เป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรี ปีที่ 1 ปีการศึกษา 2550 คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ จำนวน 7 สาขา มีนักศึกษาทั้งหมด 150 คน
- 4.2 กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรี ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2550 ที่ได้จากการสุ่ม สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ จำนวน 30 คน
- 4.3 เนื้อหา ที่ใช้ในการทดลองเป็นเนื้อหาวิชาแคลคูลัส เรื่องการหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระบบพิกัดฉาก ระดับปริญญาตรี หลักสูตรมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล ปรับปรุง พ.ศ. 2545
- 4.4 เวลาในการศึกษาเนื้อหาวิชาแคลคูลัส เรื่องปริมาตร ใช้เวลา 6 คาบๆ ละ 60 นาที โดยเรียนสัปดาห์ละ 3 คาบติดกัน

5. นิยามศัพท์

5.1 นักศึกษา หมายถึง นักศึกษาระดับปริญญาตรี ชั้นปีที่ 1 ปีการศึกษา 2550 คณะวิศวกรรมศาสตร์ 7 สาขา ได้แก่ สาขาวิศวกรรมอุตสาหการ สาขาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์และโทรคมนาคม สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า สาขาวิศวกรรมโยธา สาขาวิศวกรรมเคมี สาขาวิศวกรรมเครื่องกล และสาขาวิศวกรรมสำรวจ ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

5.2 สื่อการเรียนรู้ หมายถึง คอมพิวเตอร์ช่วยสอน ซึ่งเป็นบทเรียนคอมพิวเตอร์สำหรับบททวนเนื้อหาการเขียนรูป 2 มิติ ทบทวนเนื้อหาการเขียนรูป 3 มิติ ทบทวนเนื้อหาการหาปริพันธ์สองชั้น ทบทวนเนื้อหาการหาปริพันธ์ชั้นเดียว และเนื้อหาการเขียนรูปทรง 3 มิติเพื่อหา

ปริมาตร เนื้อหาการได้มิติปริพันธ์สองชั้น เนื้อหาการหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น และมีแบบทดสอบให้นักศึกษาฝึกทำในแต่ละเนื้อหา และสามารถรู้ผลได้ทันที

5.3 ประสิทธิภาพสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนตามเกณฑ์ 80/80 หมายถึง ค่าร้อยละของคะแนนที่นักศึกษาได้จากกระบวนการและผลลัพธ์ โดยค่า 80 แรก คือค่า E_1 เป็นค่าร้อยละของคะแนน ที่นักศึกษาทำได้ จากค่าเฉลี่ยของการทำข้อสอบ ระหว่างฝึกทำแบบทดสอบจากสื่อ คอมพิวเตอร์ช่วยสอน ส่วนค่า 80 หลัง คือค่า E_2 เป็นค่าร้อยละของคะแนนที่นักศึกษาทำได้จากค่าเฉลี่ยของการทดสอบหลังเรียน ซึ่งประสิทธิภาพของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ตามเกณฑ์ 80/80 นั่นคือ E_1/E_2 จะมีค่าตั้งแต่ 80/80 ขึ้นไป

5.4 ความพึงพอใจ หมายถึง ความรู้สึก หรือความคิดเห็นที่มีต่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับ ทบทวนเรื่องปริมาตร

6. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 6.1 ได้สื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับทบทวนเรื่องปริมาตร ที่มีประสิทธิภาพ
- 6.2 ช่วยให้นักศึกษาเข้าใจเรื่องการหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น สามารถทบทวนเนื้อหา ต่างๆได้ด้วยตนเอง ด้วยสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับการเรียนวิชาแคลคูลัส 2 สำหรับ วิศวกร และวิชาแคลคูลัส 2 ตามเวลาและโอกาสของนักศึกษาได้
- 6.3 ช่วยแก้ปัญหาการเรียนของนักศึกษา ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ
- 6.4 เป็นแนวทางในการศึกษาด้วยตนเองจากสื่อคอมพิวเตอร์ในระบบเครือข่าย
- 6.5 ช่วยแก้ปัญหาขาดแคลนผู้สอนเรื่องการหาปริมาตร โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

บทที่ 2

วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาคำรา เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนาสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่องการหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น โดยมีวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1. ทฤษฎีการเรียนรู้
2. กระบวนการเรียนรู้ และทักษะการเรียนรู้
3. การพัฒนาการแก้ปัญหาโจทย์และแบบทดสอบ
4. การจัดการเรียนการสอนที่มีประสิทธิภาพ
5. สื่อการเรียนรู้ คอมพิวเตอร์ช่วยสอน
6. การประดิษฐ์และพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน
7. การทบทวน
8. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. ทฤษฎีการเรียนรู้

1.1 ทฤษฎีสัมพันธเชื่อมโยง

เจอร์เจน และคณะ (Gergen. And others. 1989 : 222) ได้กล่าวถึงกระบวนการเรียนรู้ตามทฤษฎีสัมพันธเชื่อมโยง (Connectionism Theory) ของ ธอร์นไดค์ (Thorndike) นักจิตวิทยาชาวอเมริกันไว้ ดังนี้ ธอร์นไดค์ อธิบายว่า เมื่ออินทรีย์ (มนุษย์และสัตว์) ประสบปัญหา อินทรีย์จะพยายามหาทางค้นคว้าด้วยวิธีต่างๆ เพื่อแก้ปัญหานั้นให้หลุดพ้นไป โดยขั้นแรกอินทรีย์จะแสดงอาการต่างๆอย่างเบะแปะ ไม่มีหลักเกณฑ์ หรือเรียกว่าการลองผิด ลองถูก จนบังเอิญแก้ปัญหาได้สำเร็จ ในครั้งต่อไปอินทรีย์จะลดพฤติกรรมที่ไม่จำเป็นออกไปทีละอย่าง และในที่สุดจะรู้วิธีแก้ปัญหาได้อย่างมีหลักเกณฑ์ในโอกาสต่อไป ได้อย่างรวดเร็วทันที หากได้มีการฝึกฝนให้กระทำบ่อยๆครั้งขึ้น การเรียนรู้ที่เกิดขึ้นนี้เกิดจากอินทรีย์เรียนรู้ความเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้า (Stimulus) กับการตอบสนอง (response) จึงได้ทดลองแนวคิดนี้และได้พัฒนาทฤษฎีสัมพันธเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้ากับการตอบสนอง และผลการทดลองได้เสนอกฎไว้ 3 กฎ เรียกว่ากฎการเรียนรู้ (Law of Learning) ดังนี้

กฎของผล (Law of Effect) กฎนี้อธิบายว่า เมื่อการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้ากับการตอบสนองมีขึ้น แล้วเกิดสภาพที่พึงพอใจ จะเพิ่มความแข็งแรงระหว่างสิ่งเร้ากับการตอบสนองมากขึ้นในการเรียน นักเรียนจะเรียนได้ดีขึ้นถ้าผลการเรียนนั้นทำให้นักเรียนพอใจ และนักเรียนจะเรียนเลวลง ถ้าผลการเรียนทำให้นักเรียนไม่สมหวัง นั่นคือ รางวัลและความสมหวัง จะช่วยส่งเสริมให้เกิดการกระทำนั้นมากขึ้น

กฎของการฝึก (Law of Exercise) กฎนี้อธิบายว่า สิ่งใดที่เราทำบ่อยๆ ซ้ำๆ หรือมีการฝึกเรายิ่งทำสิ่งนั้นได้ดีขึ้น สิ่งใดที่ไม่ได้ทำนานๆ เรายิ่งทำสิ่งนั้นไม่ได้เหมือนเดิม และการกระทำซ้ำๆ จะมีผลสมบูรณ์ยิ่งขึ้นหากผู้กระทำมีความตั้งใจ สนใจ เข้าใจ รู้จุดมุ่งหมาย และเห็นประโยชน์ในการกระทำซ้ำๆ นั้น

กฎของความพร้อม (Law of Readiness) กฎนี้อธิบายว่า ความพร้อมทางร่างกาย ในการกระทำสิ่งใดๆ ซึ่งหลักการข้อนี้ รวมถึงความพร้อมทางจิตภาวะ ความพร้อมในการอ่าน ความพร้อมในการเขียน และความพร้อมที่จะเรียนรู้ด้วย

1.2 ทฤษฎีเงื่อนไขการกระทำ (Operant Conditioning)

เจอร์เจน และคณะ (Gergen, And others. 1989 : 225-234) ได้กล่าวถึง กระบวนการเรียนรู้ตามทฤษฎีเงื่อนไขการกระทำ ที่นำมาใช้ในการพัฒนา หลักการของทฤษฎีเงื่อนไขการกระทำ และการประยุกต์ทฤษฎีเงื่อนไขการกระทำ เพื่อการพัฒนาทักษะการเรียนรู้ ดังต่อไปนี้

ทักษะการทำโจทย์และทำข้อสอบ ได้แก่

1.2.1 หลักการของทฤษฎีเงื่อนไขการกระทำ

ทฤษฎีเงื่อนไขการกระทำ ได้อธิบายว่า พฤติกรรมของมนุษย์ถูกควบคุมโดยเงื่อนไขผลที่ได้รับจากการกระทำ ได้แก่ การเสริมแรง และการลงโทษ หากพฤติกรรมหนึ่งกระทำแล้วได้รับการเสริมแรง พฤติกรรมนั้นก็มีแนวโน้มจะเกิดบ่อยครั้งขึ้น ในทางตรงกันข้าม หากพฤติกรรมใดกระทำแล้วได้รับการลงโทษ พฤติกรรมนั้นจะหยุดลง หรือมีแนวโน้มจะค่อยๆ หดหายไป ดังนั้นหลักการสำคัญของทฤษฎีเงื่อนไขการกระทำ จึงอยู่ที่ผลที่ได้รับจากการกระทำ และผลที่ได้รับจากการกระทำ จำแนกได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ คือ การเสริมแรงและการลงโทษ

1) การเสริมแรง หากพฤติกรรมใดกระทำไปแล้วได้รับผลที่ได้รับจากการกระทำหนึ่งซึ่งน่าพอใจ ต่อมาพฤติกรรมนั้นมีแนวโน้มจะเกิดบ่อยครั้งขึ้น เรียกผลที่ได้รับจากการกระทำนั้นว่า การเสริมแรง (reinforcement) และเรียกสิ่งใดๆ ที่ได้รับนั้นว่า ตัวเสริมแรง (reinforcer) แนวทางที่จะรู้ว่า อะไรเป็นตัวเสริมแรง ทำได้โดยการทดลองโดยตรง ด้วยการสังเกตความถี่ของการเกิดพฤติกรรมนั้นไว้ก่อนแล้วจึงให้สิ่งใดสิ่งหนึ่งหลังจากนักเรียนแสดงพฤติกรรมนั้นแล้ว ต่อมาจึงสังเกตความถี่ของการเกิดพฤติกรรมนั้นอีก หากพฤติกรรมนั้นเกิดขึ้นบ่อยครั้งขึ้น กล่าวได้ว่า สิ่งนั้นเป็นตัวเสริมแรง

2) การลงโทษ หากกระทำพฤติกรรมหนึ่ง แล้วได้รับผลที่ได้รับจากการกระทำอย่างหนึ่งซึ่งไม่น่าพึงพอใจ ต่อมาในสถานการณ์ที่คล้ายคลึงกัน พฤติกรรมนั้นลดความถี่ในการเกิดลง ผลที่ได้รับจากการกระทำนั้นๆ เรียกว่า การลงโทษ (punishment) เช่น นักเรียนพูดคำหยาบ แล้วถูกผู้สอนดุ ต่อมานักเรียนไม่พูดคำหยาบอีกเลย กรณีนี้การดุเป็นการลงโทษ ดังนั้นการพิจารณาว่าอะไรคือการลงโทษ ให้ดูที่พฤติกรรม หากพฤติกรรมลด หรือความถี่ในการเกิดพฤติกรรมลดลง กล่าวได้ว่า สิ่งที่ทำให้หลังแสดงพฤติกรรมนั้นเรียกว่า การลงโทษ

ผลของการเสริมแรงและการลงโทษ ในสถานการณ์ที่คล้ายคลึงกัน หากพฤติกรรมใดได้รับการเสริมแรง พฤติกรรมนั้นมีแนวโน้มจะเกิดบ่อยครั้งขึ้น และพฤติกรรมใดได้รับการลงโทษ

พฤติกรรมนั้นมีแนวโน้มจะระงับและลดหายไป

1.2.2 การประยุกต์ทฤษฎีเงื่อนไขการกระทำเพื่อการพัฒนาทักษะการเรียนรู้

การประยุกต์ทฤษฎีเงื่อนไขการกระทำเพื่อการพัฒนาทักษะการเรียนรู้ ประกอบด้วย

- 1) การให้นักเรียนได้ลงมือกระทำหรือลงมือปฏิบัติ
- 2) การฝึกปฏิบัติให้ฝึกไปทีละน้อยตามลำดับ
- 3) ให้นักเรียนได้รับการเสริมแรงทันที และ
- 4) ให้นักเรียนมีโอกาสได้รับการเสริมแรงหรือได้รับความพอใจจากการได้ลงมือปฏิบัติ

สรุปแนวคิดทฤษฎีที่นำมาประยุกต์เพื่อพัฒนาแบบฝึกทักษะการเรียนรู้

ทฤษฎีวงจรการเรียนรู้	ทฤษฎีสัมพันธ์เชื่อมโยง	ทฤษฎีเงื่อนไขการกระทำ
การเรียนรู้โมดูล ประกอบด้วย 3 ขั้นตอน ขั้นที่ 1 ขั้นการศึกษาสำรวจ ขั้นที่ 2 ขั้นการสร้างความรู้ ขั้นที่ 3 ขั้นนำความรู้ไปใช้	การฝึกปฏิบัติประกอบด้วย 3 กฎต่อไปนี้ 1. กฎของการฝึกซ้ำ 2. กฎของความสำเร็จ 3. กฎของความพร้อม	การสร้างพฤติกรรม 1. การลงมือปฏิบัติ 2. การฝึกทีละน้อย 3. มีโอกาสได้รับการเสริมแรง 4. ได้รับการเสริมแรงทันที

2. กระบวนการเรียนรู้และทักษะการเรียนรู้

2.1 ความหมายของทักษะการเรียนรู้

ทักษะการเรียนรู้จัดอยู่ในกลุ่มของทักษะทางวิชาการ บลู (Blue. 1981 อ้างใน ปรีชา วิทโค และคณะ. 2542 : 11) นอกจากนี้ยังมีผู้ให้แนวคิดเกี่ยวกับ ความหมาย และองค์ประกอบของทักษะการเรียนรู้ไว้หลายท่าน ดังตัวอย่างตามแนวคิด ดังนี้

2.1.1 ทักษะการเรียนรู้ตามแนวคิดของดีไวน์

ดีไวน์ (Devine. 1987 : 10) ได้ให้ความหมายของทักษะการเรียนรู้ว่าทักษะการเรียนรู้หมายถึง ความสามารถของผู้เรียน ในการรวบรวมข้อมูล การบันทึกข้อมูล การทำความเข้าใจ การจำ และการนำเสนอข้อมูล

2.1.2 ทักษะการเรียนรู้ตามแนวคิดของวอลเลซ

วอลเลซ (Wallace. 1980 อ้างในปรีชา วิทโค และคณะ 2542 : 11) ได้จัดองค์ประกอบทักษะการเรียนรู้ และได้จัดทำเป็นแบบฝึกหัดสำหรับนักเรียนได้ 6 ด้าน ดังต่อไปนี้

- 1) การจัดระบบการศึกษาด้วยตนเอง เช่น จัดทำตารางเวลาเพื่ออ่านหนังสือ การทำการบ้าน และการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

2) ทักษะการจดบันทึก เช่น การจดบันทึกสาระสำคัญจากการอ่าน และการฟังบรรยาย รวมทั้งการขยายความจากการบันทึก

3) การอ่านอย่างมีประสิทธิภาพ จะประกอบด้วยการตั้งคำถามก่อนการอ่าน การอ่านอย่างถูกวิธี ความเข้าใจเกี่ยวกับตารางตัวเลข และแผนภูมิ การใช้ห้องสมุด เป็นต้น

4) การเข้าร่วมการสัมมนา เป็นทักษะที่ช่วยให้การเข้าร่วมสัมมนา เกิดประโยชน์สูงสุด ทักษะย่อยของทักษะนี้ ได้แก่ การคิดล่วงหน้าเกี่ยวกับหัวข้อการสัมมนา การมีส่วนร่วมในการออกความคิดเห็น และการรู้จักรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น เป็นต้น

5) การเขียนเรียงความ ประกอบด้วย ทักษะการเขียนย่อ คือ การค้นคว้าและการใช้ห้องสมุด การเขียนเรียงความ การเขียนเสนอความคิดเห็น และข้อเท็จจริง

6) การเตรียมตัวสอบ เช่น การรู้ระบบวัดผล เทคนิคการเรียน และการท่องจำ การเตรียมตัวก่อนการสอบ และเทคนิคการทำข้อสอบ เป็นต้น

2.1.3 ทักษะการเรียนรู้ตามแนวคิดของเอวีน

เอวีน และ โรส (Irvin and Rose, 1995) ได้ให้นิยามทักษะการเรียนรู้ว่า ทักษะการเรียนรู้เป็นความสามารถของผู้เรียนในการเรียนใน 3 กลุ่ม ได้แก่

- 1) กลุ่มรวบรวมข้อมูล (Extract information) ได้แก่ ทักษะการอ่าน การฟัง
- 2) กลุ่มการจัดประมวลข้อมูล (Organization information) ได้แก่ ทักษะการจดบันทึก การสร้างแผนผังแนวคิด
- 3) กลุ่มเสนอข้อความรู้ที่ได้ประมวลแล้ว เพื่อแสดงว่ามีความรู้และสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ได้ในเวลาต่อมา (Demonstrate understanding and application of that knowledge) ได้แก่ ทักษะการตอบคำถาม การทำแบบทดสอบ

จากแนวคิดของ ดีไวน์ วอลเลซ และเอวีน ทักษะการเรียนรู้เป็นความสามารถของผู้เรียนในการแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง จากแหล่งความรู้ที่หลากหลาย ด้วยทักษะ 3 กลุ่ม ได้แก่

กลุ่มที่ 1 ทักษะการรับข้อมูล (receptive) ได้แก่ ทักษะการอ่าน ทักษะการฟัง ทักษะการบันทึกข้อมูล เป็นต้น

กลุ่มที่ 2 ทักษะการไตร่ตรอง (reflective) ได้แก่ ทักษะการวิเคราะห์ ทักษะการสังเคราะห์ ทักษะการทำความเข้าใจ ทักษะการจำ เป็นต้น

กลุ่มที่ 3 ทักษะการแสดงออก (expressive) ที่เน้นเฉพาะกระบวนการ หมายถึง ทักษะการเขียนรายงาน ทักษะการนำเสนอด้วยวาจา ทักษะการทำแบบทดสอบ เป็นต้น

2.2 กระบวนการเรียนรู้ทักษะ

กระบวนการเรียนรู้ทักษะเป็นกระบวนการอย่างเป็นขั้นตอน และต่อเนื่องในที่นี้จะเสนอกระบวนการเรียนรู้ทักษะการเรียนรู้ 2 แนวคิด ได้แก่

1) แนวคิดของฟิตส์

ฟิตส์ (Paul Fitts. 1962 อ้างใน John P. De Cecco . 1968 : 284) ได้แบ่งการเรียนรู้ทักษะไว้เป็น 3 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 การใช้ปัญญา (cognitive phase)

การเรียนรู้ทักษะในตอนนี้ นักเรียนต้องใช้ปัญญาในการวิเคราะห์ทักษะ และบอกได้ว่าทักษะอะไรที่ต้องเรียน ผู้สอนต้องบอกนักเรียนได้ว่า คาดหวังให้นักเรียนต้องทำอะไรได้ และบอกให้นักเรียนรู้กระบวนการที่ถูกต้อง และการกระทำที่ไม่ถูกต้องที่เกิดขึ้นบ่อยๆ ในแต่ละทักษะ

ตอนที่ 2 การทำพฤติกรรมได้ถูกต้อง (fixation phase)

การเรียนรู้ทักษะในตอนนี้ นักเรียนจะฝึกทักษะจนถูกต้อง ไม่มีผิดพลาด จนนักเรียนทำทักษะนั้นได้ถูกต้องทุกครั้ง กรณีที่เป็นทักษะที่ซับซ้อน นักเรียนสามารถนำทักษะย่อยๆ มาเชื่อมต่อกันจนครบได้ถูกต้องทุกขั้นตอน

ตอนที่ 3 การทำได้อย่างอิสระ (autonomous phase)

การเรียนรู้ทักษะในตอนนี้ นักเรียนสามารถทำทักษะนั้นๆ ได้อย่างถูกต้อง และใช้เวลาในการทำได้อย่างรวดเร็ว ไม่มีความรู้สึกกังวลใจในการทำทักษะนั้น

2) แนวคิดของ ดี เซลโล (De Cecco)

ดี เซลโล ได้วิเคราะห์การเรียนรู้ทักษะจากทฤษฎีการเรียนรู้ และสรุปว่าการเรียนรู้ทักษะ ประกอบด้วย 3 เงื่อนไข ได้แก่

2.1 ความต่อเนื่อง (contiguity)

ความต่อเนื่อง หมายถึง การเกิดขึ้นระหว่างการเสนอสิ่งเร้ากับการตอบสนองนั้นเกือบจะพร้อมๆ กัน ซึ่งมีความหมายเกี่ยวข้องกับระยะเวลาที่เกิดขึ้น (timing) หรือการเรียงลำดับของการเกิดเหตุการณ์ (proper order) หรือการประสานสัมพันธ์ซึ่งกัน และกัน (coordination)

ความต่อเนื่องของการเรียนรู้ทักษะมีหลักการสำคัญ 2 หลักการ ได้แก่

หลักการที่ 1 การเรียงลำดับที่ถูกต้อง (proper sequence) ระหว่าง S-R ของแต่ละทักษะย่อย และการเรียงลำดับของทักษะรวม หากการเรียงลำดับไม่ถูกต้องแล้ว จะทำให้นักเรียนทำทักษะนั้นไม่ถูกต้อง เช่น ผู้หัดขับรถยนต์ใหม่ ต้องการฝึกทักษะการหยุดรถยนต์ หากเขายังเหยียบคันเร่งพร้อมกับกดคันเบรก รถยนต์จะไม่หยุด การเรียงลำดับที่ถูกต้องนั้น ผู้ขับรถยนต์ต้องชักเท้าจากคันเร่งก่อน แล้วจึงเหยียบคันเบรกซ้ำๆ

ปัญหาที่เกิดขึ้นในการฝึกทักษะและอยู่ระหว่างการวิจัย ได้แก่ การฝึกแยกครั้งละทักษะย่อย (Part Method) หรือฝึกต่อเนื่องทุกทักษะ (Whole Method) เช่น การฝึกทหารใหม่ให้ยิงปืน ประกอบด้วย ทักษะต่างๆ เริ่มจากทักษะการยืน ทักษะการจับปืน ทักษะการเล็งเป้า เป็นต้น การฝึกแยกเป็นการฝึกครั้งละทักษะย่อย แล้วให้นำมารวมกันในที่สุด ส่วนการฝึกรวม ครูฝึกจะสาธิตให้ครบทุกทักษะ แล้วให้ทหารใหม่ทำตามครบทุกทักษะ ผลจากการวิจัยของ F.J. McGuigan and MacCaslin (อ้างใน De Cecco 1968 : 658) พบว่าการฝึกต่อเนื่องทุกทักษะได้ผลดีกว่าการฝึกแยก และการวิจัยจำนวนมากพบผลที่ต่างกัน

ต่อมา James Naylor (อ้างใน De Cecco 1968 : 658) ได้สรุปจากผลการวิจัยทั้งหลายว่าทักษะใดที่ไม่ยาก ไม่ซับซ้อน ใช้การฝึกแบบฝึกแยก ส่วนที่ซับซ้อนและยาก ใช้การฝึกแบบรวม

หลักการที่ 2 การฝึกทักษะเชื่อมต่อกันระหว่าง ทักษะย่อยที่ 1 กับทักษะย่อยอื่นๆที่เหลือให้ต่อเนื่องกัน หากไม่ฝึกทักษะเชื่อม หรือฝึกทักษะเชื่อมซ้ำเกินไป โดยเฉพาะอย่างยิ่งการฝึกทักษะย่อยแยกกัน จำเป็นต้องฝึกการเชื่อมต่อกันระหว่างทักษะต่อเนื่องด้วย

2.2 การฝึก (practice) การฝึกเป็นการทำซ้ำ (repetition) มีประโยชน์ดังนี้

- 1) เป็นการทบทวนทักษะย่อยที่ได้ฝึกแล้ว
- 2) เป็นการเชื่อมโยงแต่ละทักษะย่อย ทำให้เรียงลำดับได้ถูกต้อง ถูกจังหวะ
- 3) ป้องกันการลืมทักษะย่อย
- 4) ให้การเรียนรู้พัฒนาไปสู่ขั้นการทำอย่างอิสระ และมีการวิจัยที่ทดสอบแล้วว่าการฝึกหัดทำให้เรียนทักษะได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์

2.3 การรู้ผลการฝึก (feedback)

การรู้ผลการฝึกได้แก่ การรู้ผลการฝึกปฏิบัติ ทั้งส่วนที่ปฏิบัติถูกต้อง ส่วนที่ไม่ถูกต้อง และข้อเสนอแนะเพื่อการแก้ไขปรับปรุง

แนวคิดของ ฟิตส์	แนวคิดของ ดี เซกโค
ขั้นที่ 1 การใช้ปัญญา	ขั้นที่ 1 เห็นความต่อเนื่องของทักษะ
ขั้นที่ 2 การทำได้ถูกต้อง	ขั้นที่ 2 ได้รับการฝึก
ขั้นที่ 3 การทำได้อย่างอิสระ	ขั้นที่ 3 ได้รับรู้ผลของการฝึก

3. การพัฒนาการแก้ปัญหาโดยแบบทดสอบเรื่องปริมาตร

การพัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับทบทวนเรื่องปริมาตร เกิดจากกรอบ ความคิดจาก

- 1) กรอบความคิดขององค์ประกอบของทักษะการเรียนรู้
- 2) กรอบความคิดของทฤษฎีการเรียนรู้
- 3) กรอบความคิดของกระบวนการเรียนรู้ทักษะ

ภาพที่ 2-1 กรอบความคิดของกระบวนการเรียนรู้ทักษะการแก้ปัญหาโจทย์



4. การจัดการเรียนการสอนที่มีประสิทธิภาพ

การเรียนรู้ หมายถึง การเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมที่พัฒนาไปเรื่อยๆ ไม่มีที่สิ้นสุด อันเป็นผลมาจากการมีประสบการณ์ทางด้านสมอง (Cognitive Domain) ด้านการปฏิบัติ (Psychomotor) และด้านจิตใจ (Affective Domain) ส่วนการสอน หมายถึง การจัดประสบการณ์การเรียนรู้ เพื่อให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนจึงมีความหมายรวมว่า หมายถึง วิธีการจัดกระบวนการต่างๆ เพื่อให้ผู้สอนและผู้เรียนมีความรับผิดชอบร่วมกัน หรือมีปฏิสัมพันธ์ที่มีจุดมุ่งหมายต่อกัน (จินตนา ยูนิพันธ์ 2527 : 13-14) การจัดการเรียนการสอน จึงต้องคำนึงถึงองค์ประกอบหลายๆด้าน ที่อาจจะมีอิทธิพลต่อการเรียนรู้ของผู้เรียน เช่น หลักสูตร เนื้อหาวิชา อาจารย์ผู้สอน กิจกรรมการเรียนการสอน และการประเมินผลการเรียนการสอน เป็นต้น

4.1 ลักษณะการเรียนรู้ของผู้เรียน

ลักษณะการเรียนรู้ของผู้เรียน เป็นส่วนที่เกี่ยวข้องกับความสนใจ ความเอาใจใส่และความขยันขันแข็งในการเรียน ผู้เรียนแต่ละคนจะมีลักษณะการเรียนรู้ที่แตกต่างกัน บางคนมีความตั้งใจเรียนเป็นอย่างดี

โดยไม่ต้องมีผู้ใดบังคับควบคุมเลย ในทางกลับกัน ผู้เรียนบางคนไม่เอาใจใส่ต่อการเรียนเลยถ้าปราศจากการควบคุม ฉะนั้นจึงไม่สามารถศึกษาหาความรู้ด้วยตนเองได้ต้องมีผู้ชี้แจงให้ตลอดเวลา ในเรื่องลักษณะของการเรียนหรือพฤติกรรมการเรียนให้เหมาะสมกับผู้เรียน โดย โชว์และเบิร์ด (Show and Burt. 1979) ได้ศึกษาถึงลักษณะการเรียนของนักศึกษา พบว่ามีความแตกต่างกัน 2 แบบดังนี้

1. นักศึกษาที่เป็นพวกที่ศึกษาได้ดีในสภาพการณ์ที่มีโครงสร้างชัดเจน (High Structure) ซึ่งมีลักษณะดังนี้
 - 1.1 การเรียนการสอนขึ้นอยู่กับผู้สอน
 - 1.2 เชื่อฟังและคล้อยตามผู้สอน
 - 1.3 มีความรู้สึกกังวลใจว่าจะต้องพบปะกับผู้สอน เพื่อกำหนดเกณฑ์ในการเรียนการสอน
 - 1.4 มีความต้องการที่จะรู้เกณฑ์ของผู้สอน
 - 1.5 ขึ้นอยู่กับผู้สอนในการที่จะบอกความสำคัญของแต่ละหัวข้อที่จะสอน
 - 1.6 ขึ้นอยู่กับผู้สอนในการที่จะบอกความสำคัญของแต่ละหัวข้อที่จะเรียน
2. นักศึกษาที่ได้ดีในสภาพการณ์ที่มีโครงสร้างที่ยืดหยุ่นได้ ซึ่งมีลักษณะดังนี้
 - 2.1 ตัดสินกระบวนการศึกษาของตนเอง
 - 2.2 ไม่สนใจ หรือบางครั้งอาจต่อต้านผู้สอน
 - 2.3 สนใจกับเกณฑ์ของตนเอง
 - 2.4 ต้องการข้อมูลที่จะมาช่วยกำหนดเกณฑ์ในการเรียนการสอน
 - 2.5 ชอบที่จะศึกษาค้นหาความสัมพันธ์ของแต่ละหัวข้อที่จะเรียนด้วยตนเอง

นอกจากนี้ ยังมีนักการศึกษาที่ได้ศึกษาแบบการเรียนของนักศึกษา ที่มีลักษณะแตกต่างกันอีก เช่น ไรส์แมน และกราชา (Reichman and Gracha. n. d.) และมิลล์ (Mills. 1972) โดย ไรส์แมน และกราชา แบ่งแบบการเรียนของนักศึกษาไว้ดังนี้

1. แบบแข่งขัน (Competitive) พวกนี้ชอบแข่งขันเอาชนะเพื่อนด้วยกัน โดยพยายามจะทำอะไรๆให้ดีกว่าคนอื่น เพื่อรางวัลในชั้นเรียนหรือเกรด และมีความรู้สึกว่าตัวเองต้องชนะเสมอ
2. แบบร่วมมือ (Collaboration) พวกนี้มีความรู้สึกว่าเขาสามารถเรียนได้ดีที่สุด โดยแลกเปลี่ยนความคิดความสามารถซึ่งกันและกัน พวกนี้จะชอบร่วมมือกับอาจารย์ กลุ่มเพื่อน และชอบทำงานร่วมกับคนอื่น เขาเห็นชั้นเรียนเป็นสถานที่สำหรับสังคมปฏิสัมพันธ์ (Social Interactive)
3. แบบหลีกเลี่ยง (Avoidance) พวกนี้เป็นพวกที่ไม่สนใจเรียนเนื้อหาวิชาในชั้นเรียน ไม่มีส่วนร่วมกับเพื่อนๆและอาจารย์ในห้องเรียน มีความคิดว่าห้องเรียนเป็นสิ่งที่ไม่น่าสนใจ
4. แบบมีส่วนร่วม (Participant) พวกนี้ต้องการเรียนรู้เนื้อหาวิชา และชอบที่จะเข้าชั้นเรียน ต้องการเรียนรู้ให้มากที่สุดจากชั้นเรียน และมีส่วนร่วมในกิจกรรมในชั้นเรียนให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ แต่จะมีส่วนร่วมน้อยในกิจกรรมที่ไม่ได้อยู่ในแขนงวิชา
5. แบบพึ่งพา (Dependent) พวกนี้มีความอยากหรืออยากเห็นทางวิชาการน้อยมากและจะเรียนรู้เฉพาะสิ่งที่บังคับหรือกำหนดให้เรียน พวกนี้จะเห็นว่าอาจารย์และเพื่อนๆร่วมชั้นเป็นแหล่งโครงสร้างของ

ความรู้ด้วยการได้รับคำแนะนำในเรื่องแนวทางการศึกษาว่าควรทำอย่างไร

6. แบบอิสระ (Independent) พวกนี้ชอบที่จะคิดทำเรื่องต่างๆด้วยตนเอง แต่จะฟังความคิดเห็นคนอื่น ๆ ในชั้นเรียน ตั้งใจศึกษาเรียนรู้เนื้อหาที่ตนเองรู้สึกสำคัญ และมีความเชื่อมั่นในความสามารถในการเรียนรู้ด้วยตนเอง

มิลล์ (Mills. n.d.) จำแนกลักษณะการเรียนรู้ในชั้นเรียนของนักศึกษาในแต่ละแบบ ดังนี้

1. พวกที่เรียนเพื่อจุดมุ่งหมายจะไปประกอบอาชีพอื่น เป็นนักศึกษาที่ต้องการเรียนเพื่อได้เกรดสูงๆ หรือต้องการปริญญาบัตร พวกนี้หวังว่าเมื่อจบแล้วจะมีงานทำ ได้เงินเดือนสูง พวกนี้ไม่สนใจสิ่งใดนอกจากเรียนอย่างเดียว

2. พวกใฝ่รู้ใฝ่เรียน (Curiosity) เป็นพวกที่ต้องการเรียนเพื่อให้ได้เกรดดี เพื่อต้องการแสดงให้เห็นว่ามีความสามารถเหนือบุคคลอื่น

3. พวกทำงานอย่างจริงจัง คือพวกที่ต้องการศึกษาหาความรู้ เพื่อสนองความอยากรู้อยากเห็น และสัมฤทธิ์ผลของตนเอง พวกนี้มีเชาว์ปัญญาดี มีความสนใจวิชาการต่างๆเป็นอย่างยิ่ง

4. พวกชอบร่วมกิจกรรมการเรียน คือพวกที่ต้องการมีส่วนร่วมในกิจกรรมต่างๆของกลุ่ม

5. พวกเรียนตามสบาย คือพวกที่ต้องการความสะดวกสบายในชั้นเรียน ต้องการให้การสอนเป็นเหตุเป็นผล

นอกจากนี้ มิลล์ ได้เสนอแนะในการจัดการเรียนการสอน เพื่อให้สอดคล้องกับนักศึกษาที่มีลักษณะต่างๆไว้ 6 ประเภท ดังนี้

1. นักศึกษาพวกที่ต้องการเรียนเพื่อให้ได้เกรดสูงๆ ซึ่งเขาต้องการปริญญาโดยเร็ว นั้น ให้จัดการเรียนการสอนที่มีการฝึกฝนและฝึกหัด เพื่อให้ผู้เรียนเห็นวัตถุประสงค์ชัดเจนขึ้น การสอนแบบฝึกฝนและฝึกปฏิบัติจะเป็นประโยชน์สำหรับการเรียนของผู้เรียนแบบนี้

2. นักศึกษาที่ไม่การเรียน เพื่อแสดงให้เห็นว่าตนมีความสามารถเหนือบุคคลอื่น การเรียนการสอนที่เหมาะสมกับกลุ่มนี้คือ การสอนแบบรายบุคคล เพราะทำให้เขาได้แสดงผลงานเป็นที่ประจักษ์ เป็นการรายงานความก้าวหน้าของตนเอง โดยใช้กลวิธีคู่แข่งกัน มีการแข่งขันกันระหว่างกลุ่ม

3. นักศึกษาพวกที่ชอบทำงานและมีความภูมิใจกับงานของตนเอง พวกนี้ต้องให้ออกสาเขาแสดงความสามารถและแสดงผลงานที่มีคุณภาพของเขา มีการให้รางวัลและคำชมเชย ผู้สอนต้องชื่นชมในความสามารถของเขา การเรียนการสอน ใช้การสาธิต หรือใช้สถานการณ์จำลอง (Demonstration and Simulation)

4. นักศึกษาพวกที่ต้องการศึกษาหาความรู้ เพื่อสนองความอยากรู้อยากเห็น และสัมฤทธิ์ผลของตนเอง พวกนี้เป็นพวกมีเชาว์ปัญญา (Intellectual) มีความสนใจวิชาต่างๆมาก พวกนี้ต้องใช้วิธีการสอนแบบต่างๆ เพื่อสนองความอยากรู้อยากเห็นของเขา การสอนที่ควรใช้คือการค้นพบด้วยตนเอง (Discovery Method)

5. พวกที่ชอบมีส่วนร่วมในกิจกรรม ชอบแสดงออก นักศึกษาพวกนี้ต้องจัดการเรียนการสอนแบบโครงการ หรือการแสดงบทบาทสมมติหรืออภิปราย ซึ่งมีการวางแผนล่วงหน้า การจัดการสอนแบบนี้จะทำให้ให้นักศึกษาได้มีบทบาทและมีส่วนร่วม เป็นการมอบหมายงานให้เขารับผิดชอบ

6. พวกที่ชอบสบาย พวกนี้การสอนจะต้องให้เขาสะดวกสบาย ทั้งทางร่างกายในชั้นเรียน

และทั่วไป วิธีสอนจะต้องไม่มีกิจกรรมพิเศษซึ่งต้องการทักษะหรือความรู้มากนัก การให้แบบฝึกหัดหรือทดสอบที่จะพัฒนาผู้เรียน หรือเมื่อพิจารณาความสามารถในงานของผู้เรียนควรเป็นแบบฝึกหัดแต่ละอย่างแยกจากกัน และการฝึกฝนถือเป็นความจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับนักศึกษาประเภทนี้

4.2 ลักษณะการสอนของอาจารย์

การเรียนการสอนในระดับอุดมศึกษา เน้นการสร้างเสริมให้นักศึกษามีความสามารถในการเรียนรู้เป็นสำคัญ อาจารย์ผู้สอนเป็นเพียงผู้คอยชี้แนะแนวทางและวิธีการให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จในการเรียน โดยได้มีผู้ที่ศึกษาได้รวบรวมไว้ เช่น ไพฑูรย์ สินลารัตน์ (ไพฑูรย์ สินลารัตน์ 2523 : 86) สมบัติ แสงรุ่งเรือง (สมบัติ แสงรุ่งเรือง 2524 : 33-72) และกาญจนา เกียรติประวัติ (กาญจนา เกียรติประวัติ 2524 : 73-96) อ้างอิงมาจาก ประเมศวร์ ขุนภักดี (ประเมศวร์ ขุนภักดี 2527 : 11) สามารถสรุปรวบรวมรูปแบบการสอนเป็นหมวดหมู่ใหญ่ๆ ได้ดังนี้

1. รูปแบบที่เน้นตัวผู้สอน เช่น การสอนแบบบรรยาย
2. รูปแบบที่เน้นเนื้อหาวิชา เช่น การสอนแบบบรรยาย และใช้เอกสารประกอบการสอน การสอนแบบให้ท่องจำ
3. รูปแบบที่เน้นความสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียน เช่น การสอนแบบสัมมนา การสอนแบบอภิปรายกลุ่ม
4. รูปแบบที่เน้นสุขภาพจิตของผู้เรียน เช่น การศึกษากรณีเฉพาะราย
5. รูปแบบที่เน้นตัวผู้เรียน เช่น การสอนวิทยาศาสตร์ การสอนแบบจุลภาควิชา การสอนแบบค้นพบด้วยตัวเอง
6. รูปแบบที่เน้นประสบการณ์จำลอง เช่น การสอนแบบปฏิบัติการ การเล่นเกมส์ หรือการสอนแบบเล่นปนเรียน และการสอนแบบบทบาทสมมุติ
7. รูปแบบที่เน้นประสบการณ์จริง เช่น การปฏิบัติงานจริง การศึกษานอกสถานที่

นอกจากนี้ จินตนา ยูนิพันธ์ (จินตนา ยูนิพันธ์ 2527 : 205-218) ได้จัดการเรียนการสอนในระดับอุดมศึกษาเป็น 4 แบบ ได้แก่

1. การสอนกลุ่มใหญ่ (100 คนขึ้นไป) ใช้การสอนแบบบรรยาย
2. การสอนกลุ่มขนาดกลาง (35-60 คน) ใช้การสอนแบบบรรยายร่วมกับการอภิปราย
3. การสอนกลุ่มเล็ก (6-12 คน) ไม่เกิน 20 คน สำหรับการสอนแบบนี้ใช้มากในการเรียนการสอนทางพยาบาลศาสตร์ เช่น การสาธิตการพยาบาล การสัมมนา การสอนแบบการประชุมปรึกษาหารือ (Group Conference)
4. การสอนเป็นรายบุคคล โดยให้ผู้เรียนมีการเรียนอย่างอิสระ เช่น การสอนแบบปฏิบัติในห้องปฏิบัติการ ชุดการสอน บทเรียนโปรแกรม

ในการสอนผู้เรียนกลุ่มขนาดใหญ่ ผู้สอนจะเป็นผู้ดำเนินกิจกรรมโดยใช้การสอนแบบบรรยาย ถ้าเป็นกลุ่มขนาดกลาง ผู้สอนใช้การสอนแบบบรรยายร่วมกับการอภิปราย โดยให้กิจกรรมของผู้เรียนมีมากขึ้น ส่วนกลุ่มขนาดเล็ก กิจกรรมของผู้เรียนมีมากขึ้นตามลำดับ ในกรณีที่ป็นรายบุคคล กิจกรรมของผู้เรียนจะมีสูงสุด เพราะเป็นบทเรียนโดยอิสระ โดยที่อาจารย์ผู้สอนจะเป็นผู้ชี้แนะแนวทางในการแสวงหาความรู้ให้กับผู้เรียน ดังนั้นการสอนของอาจารย์จึงมีความสำคัญที่จะโน้มน้าวจิตใจให้ผู้เรียนมีความเลื่อมใสศรัทธาในวิชาชีพ เป็นแบบอย่างที่ดีทั้งในด้านวิชาการ และการปฏิบัติ และจะต้องเป็นผู้สร้างบรรยากาศในการเรียนการสอน ทำให้ผู้เรียนรู้สึกอบอุ่นและสนใจอยากเรียน มีการเตรียมพร้อมอยู่เสมอ มีความจริงใจกับผู้เรียน และจะต้องมีความเข้าใจในความแตกต่างของผู้เรียนแต่ละคน เป็นผู้ที่พัฒนาตนเองอยู่เสมอและเป็นแบบอย่างที่ดีแก่ผู้เรียนในเรื่องบุคลิกภาพด้วย (พรณี เหมือนวงศ์ 2522 : 219)

รูปแบบการสอนมีมากพอ ที่จะให้ผู้สอนเลือกใช้ได้ตามความเหมาะสมของสถานการณ์ และยังไม่สามารถที่จะสรุปได้ว่า การสอนแบบใดดีที่สุด เพราะการสอนแต่ละแบบอาจมีความเหมาะสมกับวัตถุประสงค์ สภาพผู้เรียน จำนวนผู้เรียน และอื่นๆ ดังนั้นการเลือกใช้การสอนรูปแบบใดก็ตาม จะต้องคำนึงถึงตัวแปรที่เกี่ยวข้อง จึงจะเกิดผลสัมฤทธิ์ที่พึงปรารถนา

4.3 ปัญหาการเรียนการสอน

ไพฑูรย์ สินลารัตน์ (ไพฑูรย์ สินลารัตน์ 2524 : 47-49) ได้กล่าวถึงปัญหาในการเรียนของนิสิตนักศึกษาในประเทศที่กำลังพัฒนานั้น โดยเฉพาะประเทศไทยแล้ว มักจะได้รับความสนใจน้อย เมื่อเทียบกับปัญหาอื่นๆ เพราะเชื่อว่าปัญหาการเรียนนั้นเป็นปัญหส่วนตัวของผู้เรียน การเรียนรู้จะเกิดขึ้นได้ดีแค่ไหนเป็นเรื่องของผู้เรียนแต่เพียงประการเดียว ผู้สอนไม่เกี่ยวข้องด้วย แม้ผู้สอนจะบรรยายไม่ดี สอนไม่รู้เรื่อง ไม่มีการเตรียมตัว หรือไม่มีเอกสารประกอบก็ตาม ก็เป็นหน้าที่ของผู้เรียนที่จะไปแก้ปัญหาด้วยตนเอง ความเข้าใจดังกล่าวมีส่วนถูกอยู่บ้าง ตรงที่ความรับผิดชอบในการเรียนเป็นของผู้เรียน แต่ในขณะเดียวกันผู้สอนก็มีส่วนรับผิดชอบอยู่มากเช่นกัน เพราะผู้สอนเป็นคนกำหนดเงื่อนไขต่างๆในการเรียนรู้ จากการสำรวจทัศนะเกี่ยวกับการเรียนการสอนของนิสิตนักศึกษาระดับอุดมศึกษา ในปี 2522 จำนวนประมาณ 100 คน จากคณะต่างๆพบว่า องค์ประกอบสำคัญที่ทำให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จในการเรียนนั้น อันดับหนึ่งคือ ความสนใจและความตั้งใจในวิชาที่เรียนของผู้เรียนเอง ส่วนที่มีอิทธิพลรองลงมาคือ วิธีการสอนของอาจารย์และประสิทธิภาพของอาจารย์ ส่วนความยากง่ายของวิชานั้นเป็นอิทธิพลลำดับที่ 7 ซึ่งถือว่าอิทธิพลน้อยมากเมื่อเทียบกับอิทธิพลต่างๆ และจากการสำรวจของ ลินด์เกรน (Lindgren, n.d.) ที่ศึกษาถึงปัญหาในการเรียนของนิสิตนักศึกษาที่วิทยาลัยซานฟรานซิสโก (San Francisco State College) พบว่า สาเหตุแรกมาจากการไม่มีความตั้งใจหรือสนใจศึกษาอย่างจริงจัง การมีปัญหส่วนตัวต่างๆที่ไม่บังชี้ถึงปัญหาทางเนื้อหาหรือทางสติปัญญา ด้วยเหตุนี้จึงกล่าวได้ว่า ปัญหาในการเรียนนั้นขึ้นอยู่กับความสนใจและความตั้งใจของผู้เรียนเป็นสำคัญและผู้สอนควรมีเทคนิคการสอนและมาตรการที่หลากหลายเพื่อช่วยให้ผู้เรียนมีความสนใจและตั้งใจเรียนมากขึ้น การปรับตัวและการใช้เวลาในสถาบันอุดมศึกษา เป็นปัญหาที่สำคัญอีกประการหนึ่ง โดยเฉพาะนิสิตนักศึกษาชั้นปีที่ 1 และ 2 มักจะปรากฏว่ามีปัญหาในการปรับตัว และทักษะวิธีการหนึ่งในการเรียน

ผู้สอนหรืออาจารย์ที่ปรึกษาควรให้ความสนใจในเรื่องนี้ด้วย การขาดแคลนตำรา อุปกรณ์เครื่องมือ และเครื่องใช้ต่างๆ ก็เป็นปัญหาในการเรียนอีกเช่นกัน เพราะนักศึกษาไทยนั้นยังไม่มีความสามารถในทางภาษาอังกฤษสูงพอ และตำราภาษาไทยยังมีน้อย ผู้สอนควรเตรียมเอกสารตำราให้พร้อม และสิ่งที่ควรคำนึงถึงอีกอย่างหนึ่งคือ ผู้เรียนแต่ละคนจะมีปัญหาเฉพาะคนแตกต่างกันไป ซึ่งผู้สอนควรให้ความสนใจ เพื่อช่วยแก้ปัญหาการเรียนการสอนของผู้เรียนด้วย

ศรีเพ็ญ สุภพิทยกุล (ศรีเพ็ญ สุภพิทยกุล 2523 : 41-51) ได้สำรวจความคิดเห็นของนิสิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่มีต่อกระบวนการเรียนการสอนในปีการศึกษา 2522 พบว่านิสิตต้องการให้มีภาคปฏิบัติไว้ในหลักสูตรควบคู่ไปกับภาคทฤษฎี อีกทั้งเน้นให้มีกิจกรรมเสริมหลักสูตร ตลอดจนต้องการมีประสบการณ์ตรงและมีโอกาสแสดงความคิดเห็น การวัดผลควรเน้นด้านการนำไปใช้มากกว่าด้านความจำ และทฤษฎี ซึ่งการเรียนการสอนที่เป็นอยู่ ยังขาดสิ่งเหล่านี้ไปอีกมาก

ประจวบสุข อาชวอำรุง (ประจวบสุข อาชวอำรุง (2522 : 315-316) ได้รายงานการประชุมสัมมนาอาจารย์ใหญ่ของ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปี 2505 พบว่า ปัญหาเกี่ยวกับห้องสมุดมีหนังสือไม่เพียงพอทั้งภาษาไทยและภาษาต่างประเทศ โดยเฉพาะวิชาเรียนต่างๆ ที่เป็นภาษาไทยมีน้อยมาก ทำให้ทั้งอาจารย์และนิสิตต้องเสียเวลาไปหา และจดจำมาก และพบปัญหาด้านการเรียนของนิสิต ดังต่อไปนี้

1. นิสิตไม่สามารถปรับตัวเข้ากับสิ่งแวดล้อมใหม่ได้ทันเวลา ทำให้การเรียนไม่เต็มที่ควร
2. นิสิตมีปัญหาส่วนตัวทั้งด้านครอบครัวและด้านการเงิน
3. นิสิตไม่รู้วิธีศึกษาค้นคว้าและรู้จักการทำงานด้วยตนเอง
4. นิสิตให้ความสนใจการเรียนไม่เท่ากันทุกวิชา
5. นิสิตไม่เข้าใจเรื่องการจัดกิจกรรมนอกหลักสูตรอย่างถูกต้อง โดยเฉพาะนิสิตใหม่ต้องถูกบังคับให้เข้าร่วมกิจกรรม
6. นิสิตมีปัญหาเกี่ยวกับสติปัญญาของตน
7. นิสิตมีปัญหาเกี่ยวกับการเลือกวิชาเรียนที่ไม่ตรงกับความสามารถของตน
8. นิสิตมีความเลื่อมใสในตัวอาจารย์ต่างกัน

ปัญหาดังกล่าวมานี้ เป็นอุปสรรคสำคัญที่ทำให้อาจารย์ผู้สอนพยายามแก้ไข เพื่อลดการสูญเปล่าของการลงทุนทางการศึกษา โดยมุ่งไปที่การปรับปรุงการเรียนการสอนให้ทั้งด้านคุณภาพและประสิทธิภาพดียิ่งขึ้น

5. สื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

5.1 ความหมายของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

คอมพิวเตอร์ช่วยสอน มาจากภาษาอังกฤษว่า Computer Assisted Instruction หรือใช้คำย่อว่า CAI และมีผู้ให้ความหมายของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไว้หลายท่าน ดังนี้

เคแอล ซินน์ (K.L. Zinn. 1976 : 28) ได้ให้ความหมายไว้ว่า คอมพิวเตอร์ช่วยสอน หมายถึง การใช้คอมพิวเตอร์แสดงการฝึกฝน ฝึกหัดแบบฝึกหัด และทบทวนลำดับบทเรียนให้แก่นักเรียนและบางส่วนที่ช่วยนักเรียนในด้านการได้ตอบเกี่ยวกับเนื้อหาของการเรียนการสอน

พรีนิส (Prenis. 1977 : 20) ได้ให้ความหมายว่า คอมพิวเตอร์ช่วยสอน หมายถึง คอมพิวเตอร์ที่ช่วยทำให้นักเรียนเรียนรู้รายวิชาไปทีละขั้นตอน โดยขณะที่มีการเรียนการสอนที่ขึ้นอยู่กับคำตอบของนักเรียนนั้น คอมพิวเตอร์จะทำหน้าที่ถามคำถาม ให้สามารถย้อนกลับไปสู่รายละเอียดที่ผ่านมาแล้วได้ หรือสามารถให้การฝึกฝนซ้ำให้นักเรียนได้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (กระทรวงศึกษาธิการ. 2528 : 1) ได้ให้ความหมายไว้ดังนี้ คอมพิวเตอร์ช่วยสอน หมายถึง การนำคอมพิวเตอร์มาช่วยสอนวิชาต่าง ๆ ให้นุชน โดยการนำเนื้อหาวิชาและลำดับวิธีการสอนมาบันทึกเก็บไว้ในคอมพิวเตอร์ ใช้ช่วยสอนโดยให้เครื่องกับผู้เรียนได้ตอบกันเอง ทั้งนี้รวมถึงการสอนให้รู้จักเขียนโปรแกรมสั่งงานคอมพิวเตอร์ แต่ไม่รวมถึงการสอนคนให้รู้จักวิธีใช้คอมพิวเตอร์ หรือรู้ว่าคอมพิวเตอร์เป็นอย่างไร คอมพิวเตอร์จึงเป็นเพียงเครื่องมืออย่างหนึ่งที่นำมาใช้เป็นสื่อในการสอน

ยีน ภู่วรรณ (2531 : 120-129) ได้กล่าวถึงคอมพิวเตอร์ช่วยสอน คือ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้นำเนื้อหาวิชาและลำดับวิธีการสอนมาบันทึกเก็บไว้ คอมพิวเตอร์จะช่วยนำบทเรียนที่เตรียมไว้อย่างเป็นระบบมาเสนอในรูปแบบที่เหมาะสม สำหรับนักเรียนแต่ละคน

พวงเพชร วัชรรัตน์พงศ์ (2526 : 16) ได้กล่าวไว้ว่า คอมพิวเตอร์ช่วยสอน คือการนำเอาคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยครูในการเรียนการสอน นักเรียนเรียนรู้เนื้อหา บทเรียน และฝึกฝนทักษะจากคอมพิวเตอร์ แทนที่จะเรียนจากครู ในบางวิชาบางบทเรียน การเรียนการสอนกับคอมพิวเตอร์จะถูกดำเนินไปเป็นระบบ คอมพิวเตอร์จะสามารถชี้ที่ผิดของนักเรียนได้ เมื่อนักเรียนกระทำผิดขั้นตอน และคอมพิวเตอร์ช่วยสอนยังเป็นเครื่องมือที่ช่วยสนองความแตกต่างของความสามารถระหว่างบุคคลของนักเรียนได้อีกด้วย

จากความหมายที่กล่าวมาข้างต้นสามารถสรุปความหมายของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไว้ว่า คอมพิวเตอร์ช่วยสอน หมายถึง การนำคอมพิวเตอร์กับโปรแกรมบทเรียนมาช่วยในการเรียนการสอน มีการวางแผนเนื้อหาวิชาอย่างเป็นขั้นตอน สามารถตอบสนองกับผู้เรียน มีการทบทวน การทำแบบฝึกหัด และการประเมินผล

5.2 ประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

คอมพิวเตอร์ช่วยสอน สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการเรียนการสอนที่แตกต่างกันออกไป ดังนั้นคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ได้แบ่งออกเป็นหลายประเภทตามลักษณะการนำไปใช้ ซึ่งอาศัยจุดเด่นหลายประการของคอมพิวเตอร์ ได้มีนักวิชาการสรุปประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไว้ ดังนี้ (ทักษิณา สวานานนท์. 2530 : 216 ; สมัย ชินะตระกูล. 2531:39-43 ; ยีน ภู่วรรณ. 2529 : 5-7 ; วีระ ไทยพานิช. 2527 : 12-14 ; ผดุง อารยะวิญญู. 2527 : 45-46)

1. การแก้ปัญหา (Problem Solving) คอมพิวเตอร์ประเภทนี้จะเน้น ให้ฝึกการคิด การตัดสินใจ โดยมีกำหนดกฎเกณฑ์ให้ แล้วผู้เรียนพิจารณาไปตามเกณฑ์ มีการให้คะแนนหรือนำหนักกับเกณฑ์แต่ละข้อ เช่น ในวิชาวิทยาศาสตร์คณิตศาสตร์ เป็นต้น
2. การสร้างสถานการณ์จำลอง (Simulation) โปรแกรมประเภทนี้เป็นโปรแกรมที่จำลองสถานการณ์ในชีวิตจริงของผู้เรียน โดยมีเหตุการณ์สมมุติต่าง ๆ อยู่ในโปรแกรม และนักเรียนสามารถเปลี่ยนแปลง หรือ จัดกระทำได้ สามารถโต้ตอบ และมีตัวแปรหรือทางเลือกให้หลาย ๆ ทาง เพื่อให้นักเรียนสามารถเลือกได้ อย่างสุ่ม เพื่อศึกษาผลที่เกิดขึ้นจากทางเลือกเหล่านั้น นอกจากนั้นยังช่วยให้นักเรียนเข้าใจและเห็นภาพงานในบางบทเรียน แต่หลายวิชาไม่สามารถทดลองให้เห็นจริงได้ เช่น การเคลื่อนที่ของลูกปืนใหญ่ การเดินทางของแสง และการหักเหของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าหรือปรากฏการณ์ทางเคมี รวมทั้งชีววิทยาที่ต้องใช้เวลานานหลายวัน จึงปรากฏผล ปัญหาเหล่านี้สามารถใช้คอมพิวเตอร์จำลองแบบให้ผู้เรียนได้เห็นจริงและเข้าใจง่าย
3. ผู้เรียนแบบเฉพาะรายตัว (Tutoring) เป็น โปรแกรมที่สร้างขึ้นมาในลักษณะของบทเรียน โปรแกรมเป็นการเลียนแบบการสอนของครู กล่าวคือ จะมีบทนำ (Introduction) และมีคำอธิบาย (Explanation) ซึ่งประกอบด้วยทฤษฎี กฎเกณฑ์คำอธิบายและแนวความคิดที่จะสอนหลังจากที่นักเรียนได้ศึกษาแล้ว ก็จะมีคำถามเพื่อใช้ในการตรวจสอบความเข้าใจในแง่ต่างๆ มีการแสดงผลย้อนกลับตลอดจนการเสริมแรง สามารถให้นักเรียนย้อนกลับไปที่บทเรียนเดิม หรือข้ามบทเรียนที่นักเรียนรู้แล้ว นอกจากนี้อาจสามารถบันทึกการกระทำของนักเรียนว่าทำได้เพียงไรและอย่างไร เพื่อให้ผู้สอนมีข้อมูลในการเสริมความรู้ให้กับนักเรียนบางคนได้
4. การฝึกและปฏิบัติ (Drill and Practice) แบบการฝึกและปฏิบัติส่วนใหญ่จะใช้เสริมเมื่อครูผู้สอน บทเรียนตัวอย่างไปแล้ว และให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดกับคอมพิวเตอร์ เพื่อวัดระดับหรือให้นักเรียนมาฝึกจนถึงระดับที่ยอมรับได้ บทเรียนประเภทนี้จึงประกอบด้วยคำถาม คำตอบ มีผลย้อนกลับและการเสริมแรงที่จะให้นักเรียนทำการฝึกและปฏิบัติซึ่งอาจแทรกรูปภาพเคลื่อนไหวหรือคำพูดโต้ตอบ รวมทั้งอาจมีการแข่งขัน เช่น จับเวลา หรือ สร้างรูปให้ตื้นตัน จากการมีเสียง เป็นต้น
5. บทสนทนา (Dialogue) เป็นการเลียนแบบการสอนในห้องเรียน กล่าวคือ พยายามให้เป็นการพูดคุยระหว่างผู้สอนและผู้เรียน เพียงแต่ว่าแทนที่จะใช้เสียง ก็เป็นตัวอักษรบนจอภาพ แล้วมีการสอนด้วยการตั้งปัญหาถาม ลักษณะในการใช้แบบสอบถามก็เป็นการแก้ปัญหาอย่างหนึ่ง เช่น บทเรียนวิชาเคมี
6. การไต่ถาม (Inquiry) ผู้สอนจะรวบรวมเนื้อหาเขียนโปรแกรม (Software) ขึ้นโดยใช้คอมพิวเตอร์ เป็นสื่อ ผู้เรียนจะตั้งปัญหา หรือวิธีการแก้ปัญหา (Problem Solving) ป้อนคำถามเข้าคอมพิวเตอร์ และคอมพิวเตอร์จะให้คำตอบ การเรียนจะดำเนินไปเช่นนี้ จนกว่าผู้เรียนจะสามารถแก้ปัญหา หรือเข้าใจปัญหา
7. การสาธิต (Demonstration) การสาธิตโดยใช้คอมพิวเตอร์มีลักษณะคล้ายกับการสาธิตของครู แต่การสาธิตโดยใช้คอมพิวเตอร์น่าสนใจกว่า เพราะคอมพิวเตอร์ให้ทั้งเส้นกราฟที่สวยงามตลอดทั้งสี่และเสียงด้วย ครูสามารถนำคอมพิวเตอร์มาใช้เพื่อสาธิต เช่น การโคจรของดาวพระเคราะห์ในระบบสุริยะ การหมุนเวียนของโลหิต การสมดุลของสมการ

8. การเล่นเกม (Gaming) เกมคอมพิวเตอร์ที่ใช้เพื่อการเรียนการสอนนั้น เป็นสิ่งที่เราเฝ้าดูเรียนได้เป็นอย่างดี โปรแกรมประเภทนี้ เป็นแบบพิเศษของแบบจำลองสถานการณ์ โดยมีเหตุการณ์ที่มีการแข่งขัน ซึ่งสามารถที่จะเล่นได้ โดยนักเรียนเพียงคนเดียวหรือหลายคน มีการให้คะแนน มีการแพ้ชนะ

9. การทดสอบ (Testing) การใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน มักจะต้องรวมการทดสอบเป็นการวัดผลสัมฤทธิ์ของผู้เรียนไปด้วย โดยผู้ทำต้องคำนึงถึงหลักการต่าง ๆ คือ การสร้างข้อสอบ การจัดการสอบ การตรวจให้คะแนน การวิเคราะห์ข้อสอบ การสร้างข้อสอบ และการจัดให้ผู้สอนสุ่มเลือกข้อสอบเองได้

5.3 ประโยชน์ของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

โดยทั่วไปแล้วคอมพิวเตอร์มีประโยชน์มากมาย นอกจากการประมวลผล การจัดทำเอกสาร และในโรงเรียนได้นำคอมพิวเตอร์มาใช้อย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะนำมาช่วยสอน ถึงอย่างไรก็ตามการนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาใช้ จะต้องเลือกให้เหมาะสมกับวัตถุประสงค์การเรียนรู้ ประกอบกับใช้คุณลักษณะของคอมพิวเตอร์ควบคู่กับการดูแลของผู้สอนอย่างใกล้ชิด ซึ่งจะสามารถให้คุณประโยชน์อย่างแท้จริง ได้มีผู้ทำการวิจัยศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับประโยชน์ของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน พบว่า คอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีประโยชน์ต่อผู้เรียนหลายประการ กล่าวโดยสรุปคือ (Liu. 1975 : 1411 – A ; Morris. 1983 : 14; Hall. 1982 : 362; Friedman. 1974 : 799 – A; วีระ ไทยพานิช. 2526 : 9; วารินทร์ รัชมีพรหม. 2524 : 75; นิติยา กาญจนวรรณ. 2526 : 80; นิพนธ์ สุขปรีดี. 2526 : 41-41; คณิต ไข่มุก. 2527 : 23-24; ศิริ สามทอง. 2527 : 22)

1. ส่งเสริมให้ผู้เรียนเรียนตามเอ็กต์ภาพ
2. มีการป้อนกลับ (Feedback) ทันที ทำให้ผู้เรียนเกิดความตื่นตัวไม่เบื่อหน่าย
3. ผู้เรียนไม่สามารถแอบพลิกดูคำตอบได้ก่อน จึงเป็นการบังคับผู้เรียนให้เรียนจริง ๆ ก่อนที่จะผ่านบทเรียนนั้นไป
4. ผู้เรียนสามารถทบทวนบทเรียนที่เคยเรียนในห้องเรียน
5. นักเรียนเรียนได้ดีกว่า และเร็วกว่าการสอนตามปกติ ลดการสิ้นเปลืองเวลาของผู้เรียนลง
6. สามารถประเมินผลความก้าวหน้าของผู้เรียน โดยอัตโนมัติ
7. ผู้เรียนได้เรียนแบบ Active Learning
8. ฝึกให้ผู้เรียนคิดอย่างมีเหตุผล เพราะต้องคอยแก้ปัญหาอยู่ตลอดเวลา
9. ผู้เรียนสามารถเรียนตามลำพังด้วยตนเองได้
10. ทำให้เกิดความแม่นยำในวิชาที่เรียนอ่อน
11. ช่วยให้ผู้เรียนคงไว้ซึ่งพฤติกรรมที่ดีได้ยาวนาน
12. เป็นการสร้างนิสัยรับผิดชอบให้เกิดในตัวผู้เรียน เพราะไม่เป็นการบังคับผู้เรียนให้เรียน แต่เป็นการให้การเสริมแรงอย่างเหมาะสม
13. มีเกณฑ์การปฏิบัติโดยเฉพาะ
14. ผู้เรียนจะเรียนเป็นขั้นตอนทีละน้อย จากง่ายไปหายาก

15. ทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาที่เรียน

นอกจากนี้ประโยชน์ต่อนักเรียนโดยทั่วไปแล้วในห้องเรียนสามารถพัฒนาการเรียนรู้ด้วยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนอย่างมีประสิทธิภาพ ดังเช่น นิพนธ์ สุขปริดี (2528 : 8 – 9) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของคอมพิวเตอร์ในแง่การเรียนการสอนไว้ดังนี้

1. คอมพิวเตอร์สามารถทำให้เด็กเรียนได้เป็นรายบุคคล (Computer can Individualize) ที่เด็กสามารถเรียนได้เป็นรายบุคคล จะทำให้มีการสนองความต้องการของเด็กแต่ละคน ซึ่งสอดคล้องกับหลักความแตกต่างระหว่างบุคคล ไม่ว่านักเรียนเก่ง ปานกลาง หรืออ่อน ก็จะเรียนได้เหมาะสมกับความสามารถและความต้องการของตนเอง

2. คอมพิวเตอร์สามารถบริหารการสอน (Computer can Manage Instruction) คอมพิวเตอร์สามารถบริหารการสอนได้อย่างดี เพราะว่าคอมพิวเตอร์สามารถตั้งจุดมุ่งหมายทำการสอน ทำการสอบ วิเคราะห์ผล ความก้าวหน้าของนักเรียนตามระยะเวลา เก็บข้อมูลต่าง ๆ ซึ่งสามารถเรียกมาดูได้เมื่อต้องการ และทำรายงานผลได้อย่างรวดเร็วไม่เสียเวลา การทำรายงานผลก็สามารถทำได้เป็นรายบุคคล โดยครูไม่ต้องเป็นผู้เขียน ชื่อนักเรียนทุกคนเอง แต่สามารถใช้คอมพิวเตอร์เป็นมือที่สามได้ และตัวครูเองก็มีเวลาที่จะคิดและสอนให้เกิดผลดีต่อไป

3. คอมพิวเตอร์สามารถสอนสิ่งก้ำปี (Computer can Teach Concepts) สิ่งก้ำปีและทักษะการสอนนั้นยากแก่การสอนโดยครูหรือเรียนจากตำราการจำลองสถานการณ์ โดยคอมพิวเตอร์จะช่วยให้ นักเรียนเรียนได้ง่ายขึ้น และดีขึ้นกว่าการเรียนจากครู

4. คอมพิวเตอร์สามารถคำนวณ (Computer can Perform Calculation) คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือที่มีความสามารถในการคำนวณได้อย่างรวดเร็ว มีประสิทธิภาพและประสิทธิผลสูงสุด ดังนั้นการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการสอนคณิตศาสตร์จึงทำให้นักเรียนเรียนได้เร็ว และถูกต้อง จึงมีเวลาเหลือที่จะศึกษา คอมพิวเตอร์แขนงต่าง ๆ ได้อีกมาก

5. คอมพิวเตอร์สามารถสร้างแรงจูงใจในการเรียนให้แก่ นักเรียน (Computer can Simulation Student Learning) เนื่องจากคอมพิวเตอร์สามารถทำเสียง สี รูปภาพ หรือกราฟ ตลอดจนมีเกมสคอมพิวเตอร์ จึงทำให้นักเรียนมีแรงจูงใจในการเรียนโดยใช้คอมพิวเตอร์ หรือในการแข่งขันกับคอมพิวเตอร์

จากที่กล่าวมาจะเห็นว่า คอมพิวเตอร์ช่วยสอน ให้ประโยชน์ต่อนักเรียนในการเรียนรู้ เพราะได้มองเห็นเป็นรูปธรรม เร้าใจ สำหรับประโยชน์ต่อครู-อาจารย์ ฮอลล์ (Hall, 1982 : 362) กล่าวถึงประโยชน์ของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่มีต่อครูผู้สอนไว้ดังนี้

1. ลดชั่วโมงสอนเพื่อจะได้ปรับปรุงการสอน
2. ลดเวลาที่จะต้องติดต่อกับผู้เรียน
3. มีเวลาศึกษาดำรงงานวิจัย และพัฒนาความสามารถให้มากยิ่งขึ้น
4. ช่วยการสอนในชั้นเรียนสำหรับผู้ที่มีงานสอนมาก โดยการเปลี่ยนจากการฝึกทักษะในห้องเรียนมาใช้ระบบคอมพิวเตอร์แทน
5. ให้โอกาสในการสร้างสรรค์และพัฒนานวัตกรรมใหม่ ๆ สำหรับหลักสูตรและวัสดุเพื่อการศึกษา

6. เพิ่มวิชาสอนโดยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนตามความต้องการของนักเรียน
7. ช่วยพัฒนาทางวิชาการ
8. ช่วยให้มีเวลาสำหรับตรวจสอบและพัฒนาหลักสูตรตามหลักวิชาการ
9. ช่วยเพิ่มวัตถุประสงค์ของการสอนได้เท่าที่จะเป็นไปได้ เช่น การฝึกหัดคนตรี จัดนิทรรศการงานกราฟฟิก ช่วยแก้ปัญหาของผู้เรียนเกี่ยวกับสถาปัตยกรรม

จากคุณสมบัติของคอมพิวเตอร์ที่กล่าวมาข้างต้น พอสรุปประโยชน์ของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ได้ดังนี้

1. ดึงดูดความสนใจของผู้เรียนให้สนใจในบทเรียน
2. สร้างบทเรียนให้เป็นรูปธรรม มองเห็น Concept ได้ชัดเจนขึ้น
3. ทำให้การเรียนรู้ใช้เวลาน้อยลง
4. มีการตอบสนอง กระตุ้น เสริมแรง ทำให้เกิดความอยากรู้อยากเห็น
5. ผู้เรียนสามารถเรียนได้หลายรอบ
6. สร้างบทเรียน แบบฝึกหัดในรูปแบบอื่น เช่น เกมส์ ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนสนุกสนาน

6. การประดิษฐ์และพัฒนาสื่อการเรียนรู้ บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

6.1 ขั้นตอนออกแบบคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ในการออกแบบบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้น อเลสซี และ ทรอลลิป (Alessi and Trollip. 1991 : 274-278) ได้เสนอขั้นตอนในการพัฒนาบทเรียนไว้ 7 ขั้นตอน

6.1.1 ขั้นตอนที่ 1 การกำหนดจุดมุ่งหมาย หรือเป้าหมายของบทเรียนเพียงบทเดียว โดยกล่าวถึงสิ่งที่นักเรียนควรรู้ และความสามารถของนักเรียนเมื่อการเรียนสิ้นสุดลง ซึ่งจะต้องพิจารณาความรู้พื้นฐานและความต่อเนื่องของเนื้อหาใหม่กับความรู้เดิม ซึ่งความสามารถของนักเรียนเมื่อการเรียนสิ้นสุดลง จะวัดได้ด้วยการกำหนดจุดประสงค์ปลายทางเป็นจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

6.1.2 ขั้นตอนที่ 2 การรวบรวมทรัพยากร ทรัพยากรแบ่งเป็น 3 ประเภท คือ ทรัพยากรด้านเนื้อหาวิชา ได้แก่ ตำราเรียน หนังสืออ้างอิง สื่อต้นแบบ เป็นต้น ทรัพยากรด้านการพัฒนาการเรียนการสอน ได้แก่ ตำราการออกแบบการสอน รูปภาพ บุคลากรด้านการออกแบบการสอน เป็นต้น และทรัพยากรที่เกี่ยวข้องกับการส่งผ่านบทเรียน ได้แก่ เครื่องคอมพิวเตอร์ คู่มือปฏิบัติการของเครื่อง และระบบสนับสนุนการใช้เครื่อง เป็นต้น

6.1.3 ขั้นตอนที่ 3 การสร้างความคิดเกี่ยวกับบทเรียน วิธีที่ดีที่สุดสำหรับขั้นตอนนี้คือ การระดมความคิด ซึ่งจะช่วยให้ได้ความคิดที่สร้างสรรค์และน่าสนใจ เรื่องที่ให้ระดมความคิดมี 2 เรื่องคือ เรื่องที่ควรสอนและวิธีการสอน การจัดระบบความคิด โดยการขจัดความคิดที่ไม่มีคุณค่าออกไป จัดลำดับรายการแสดงรายละเอียด และทำการปรับความคิดที่ดีๆ เขียนเป็นโฟลว์ชาร์ต (flowchart lesson)

6.1.4 ขั้นตอนที่ 4 การผลิตบทเรียนบนกระดาษ เริ่มตั้งแต่การร่างเนื้อหาการสอน โดยเริ่มตั้งแต่การเสนอข้อสันนิษฐาน การเชื่อมต่อข้อสันนิษฐาน คำถาม ข้อมูลป้อนกลับ คำแนะนำ การบันทึกผล และกราฟฟิก

ต่างๆ ตลอดจนการทำแผนเรื่องราว (Storyboard) ซึ่งเป็นภาพแทนจอคอมพิวเตอร์

6.1.5 ขั้นตอนที่ 5 การเขียนผังงานเป็นการแสดงการทำงานของโปรแกรม ซึ่งควรแสดงรายละเอียดของข้อความคำถาม โอกาสเลือก กราฟฟิก ฯลฯ งานขั้นนี้มีรายละเอียด และสลับซับซ้อนมาก ควรทำเป็นชุด โดยเริ่มจากผังงานที่แสดงเฉพาะหลักการสำคัญ จนถึงขั้นสุดท้ายที่มีรายละเอียดสมบูรณ์ รวมถึงการเขียนโปรแกรม เป็นกระบวนการแปลผังงานและ แผนเรื่องราว (Storyboard) ให้แก่เครื่องคอมพิวเตอร์

6.1.6 ขั้นตอนที่ 6 การผลิตเอกสารประกอบบทเรียน เพื่อให้ให้นักเรียนได้เข้าใจหลักการ และวิธีการใช้บทเรียน เริ่มตั้งแต่การคิดตั้งโปรแกรมจนถึงการใช้บทเรียน และกิจกรรมต่างๆที่อยู่ในบทเรียน ควรมีเอกสารประกอบบทเรียนด้วย

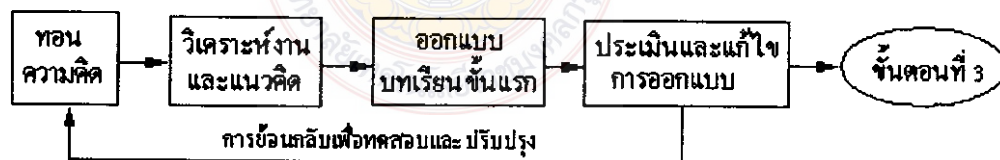
6.1.7 ขั้นตอนที่ 7 การประเมินคุณภาพและประสิทธิภาพของบทเรียน มีข้อที่ควรพิจารณา 2 ประการคือ รูปลักษณะที่น่าสนใจ และการทำงานที่มีประสิทธิภาพ โดยทำการประเมินจากความคิดเห็นของครู หรือนักออกแบบการสอน นักเรียน และจากการนำไปใช้จริง

ในการออกแบบบทเรียนคอมพิวเตอร์ที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ เขียนเป็นภาพแสดงขั้นตอนต่างๆได้ตาม ภาพที่ 2-2 ดังนี้

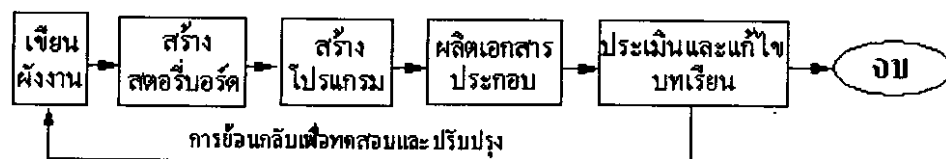
ขั้นตอนที่ 1



ขั้นตอนที่ 2

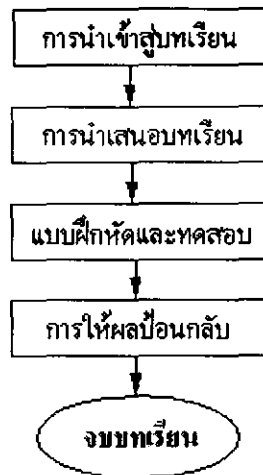


ขั้นตอนที่ 3-7



6.2 ขั้นสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ต่อไปนี้เป็นภาพที่ 2-3 ซึ่งแสดงขั้นตอนการสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบศึกษาเนื้อหาใหม่



6.2.1 การนำเข้าสู่บทเรียน

ส่วนของการนำเข้าสู่บทเรียนจะประกอบด้วย 3 ขั้นตอน ดังนี้

- 1) การเร้าความสนใจ ซึ่งอยู่ในรูปของส่วนของหน้านำเรื่อง ซึ่งบอกชื่อเรื่องของบทเรียน ผู้สร้างบทเรียน และการแนะนำเนื้อหาโดยทั่วไปในบทเรียน
- 2) การบอกวัตถุประสงค์ ซึ่งอาจจะนำเสนอในหน้าเดียวกันกับหน้านำเรื่อง หรือแยกออกมาก็ได้
- 3) การทวนความรู้เดิม ซึ่งอยู่ในรูปของการให้ความรู้พื้นฐานแก่ผู้เรียนก่อนการเรียน และการทดสอบความรู้ก่อนเรียน

6.2.2 การนำเสนอบทเรียน

ส่วนของการนำเสนอบทเรียน เป็นการนำเสนอเนื้อหา ซึ่งวิธีการและรูปแบบเป็นผลที่ได้จากการวิเคราะห์การเรียนการสอน วิเคราะห์งาน และวิเคราะห์แนวคิดที่เหมาะสมของเนื้อหานั้นๆ ทั้งในลักษณะของพฤติกรรม หรือทักษะต่างๆที่ผู้เรียนจะต้องฝึกฝน รวมทั้งแนวคิดที่ผู้เรียนจะต้องทำความเข้าใจ เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ ลักษณะของการนำเสนอความรู้แบบบอกให้รู้ โดยใช้สื่อประเภทต่างๆอาจอยู่ในลักษณะของการนำเสนอความรู้แบบค้นพบหรือแบบอุปมาน เช่น การให้ผู้เรียนได้ทำการทดลองตอบคำถามต่างๆและคิดค้นหาคำตอบได้ด้วยตนเอง

6.2.3 แบบฝึกหัดและทดสอบ

ส่วนของแบบฝึกหัดและทดสอบ เป็นส่วนของการเรียนซึ่งกระตุ้นการตอบสนอง และทดสอบความรู้ของผู้เรียนในรูปของการให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด และแบบทดสอบ เป็นการให้โอกาสผู้เรียนในการตรวจสอบความเข้าใจจากการเรียนของตน หลังจากจบแต่ละแบบฝึกหัดหรือแบบทดสอบนี้แล้ว จะมีการสรุปคะแนนของผู้เรียนให้ด้วย

6.2.4 การให้ผลป้อนกลับ การให้ผลป้อนกลับมีหลายวิธี ดังนี้

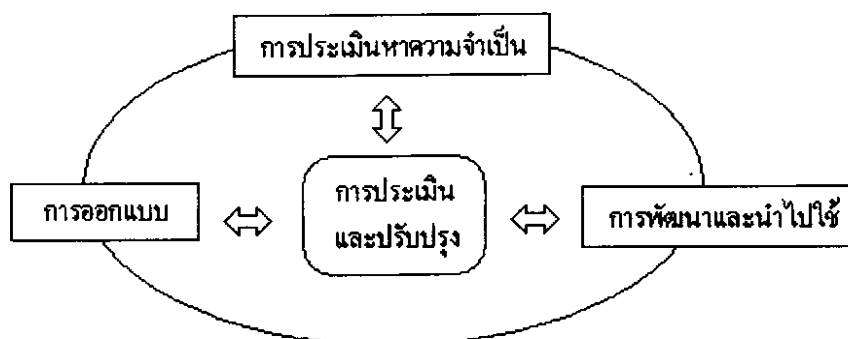
- 1) ผลป้อนกลับที่ดี ควรเป็นผลป้อนกลับในลักษณะพร้อมคำอธิบายให้ผู้เรียนทราบว่า ผู้เรียนทำถูกหรือผิด หากผิด ผิดอย่างไร เพราะอะไร อาจอยู่ในลักษณะของการชี้ข้อผิดพลาดของคำตอบของผู้เรียน นอกจากจะเป็นการเสริมแรงแล้วยังเป็นการให้ข้อมูลเพิ่มเติมแก่ผู้เรียนในการพยายามครั้งต่อไปอีกด้วย
- 2) การป้อนกลับที่ดีควรมีลักษณะเป็นทางบวก ให้ผู้เรียนได้รับความรู้สึกที่ดี เช่น ให้รางวัลหรือคำชมเมื่อทำถูกต้อง
- 3) ผลป้อนกลับควรมีความหลากหลายและไม่กินเวลานาน
- 4) ผลป้อนกลับที่ดีควรมีค่าเฉลี่ย แต่ทั้งนี้ก็แล้วแต่จุดประสงค์ของแบบทดสอบ ถ้าเป็นการประเมินและเก็บคะแนนก็อาจไม่จำเป็น
- 5) ควรจัดให้ผลป้อนกลับและค่าเฉลี่ย แสดงผลบนหน้าจอภาพได้พร้อมๆ กัน เพื่อผู้เรียนจะได้อ้างอิงถึงคำตอบของตนได้
- 6) พิจารณาการใช้เสียงในการให้ผลป้อนกลับ เช่นเดียวกับผลป้อนกลับด้วยสื่อต่างๆ ควรให้ความหลากหลาย ไม่ซ้ำกันและไม่กินเวลานาน
- 7) หลีกเลี่ยงการให้ผลป้อนกลับทางลบ

6.2.5 จบบทเรียน

ขั้นตอนนี้ควรมีการทบทวน และสรุปเนื้อหาในส่วนที่จำเป็น พร้อมกับการแนะนำแหล่งความรู้อื่นๆ ที่เป็นประโยชน์ในการศึกษาเพิ่มเติม ซึ่งในส่วนนี้จะตรงกับขั้นตอนของการจำและนำไปใช้ ในส่วนนี้ควรที่จะมีคำถามเพื่อขอคำยืนยันในการออกจากบทเรียนเพื่อป้องกันความผิดพลาดอันเกิดจากการกดปุ่มผิดหรือการลองปุ่ม สำหรับการออกแบบบทเรียนที่ใช้เวลาเรียนค่อนข้างนาน หากผู้เรียนต้องออกจากบทเรียนในขณะที่ยังเรียนไม่จบบทเรียน ควรให้บทเรียนสามารถบันทึกสถิติการเข้าใช้ของผู้เรียนได้ ผู้เรียนสามารถที่จะตรวจสอบได้ว่าตนนั้นได้ศึกษาบทเรียนไปแล้วมากน้อยเพียงใด

6.3 ขั้นตอนพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

แนวทางในการพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนให้มีประสิทธิภาพนั้น ใช้หลักการที่ได้มาจากผลการวิจัยและทฤษฎีทางการศึกษา ดังแบบจำลองภาพดังนี้



ภาพที่ 2-4 แสดงแบบจำลองที่คิดแปลงแบบจำลองของ แฮนนอฟินและเพ็ค (Hannafin and Peck 1988 : 60)

6.3.1 **ขั้นการประเมินหาความจำเป็น** การประเมินที่จะใช้ตรวจสอบว่า ได้บรรลุผลตามวัตถุประสงค์เพียงใด ผู้ออกแบบบทเรียนจะต้องแจกแจงความรู้ที่ผู้เรียนจะต้องได้รับในระหว่างการศึกษาบทเรียน รวมทั้งความรู้และทักษะพื้นฐานก่อนเรียน เมื่อการประเมินหาความต้องการจำเป็นสมบูรณ์แล้ว จึงดำเนินไปสู่ขั้นการประเมินผลและปรับปรุง

6.3.2 **ขั้นการออกแบบ** ขั้นนี้มุ่งที่จะแก้ปัญหา โดยมีขั้นตอนย่อยๆดังนี้

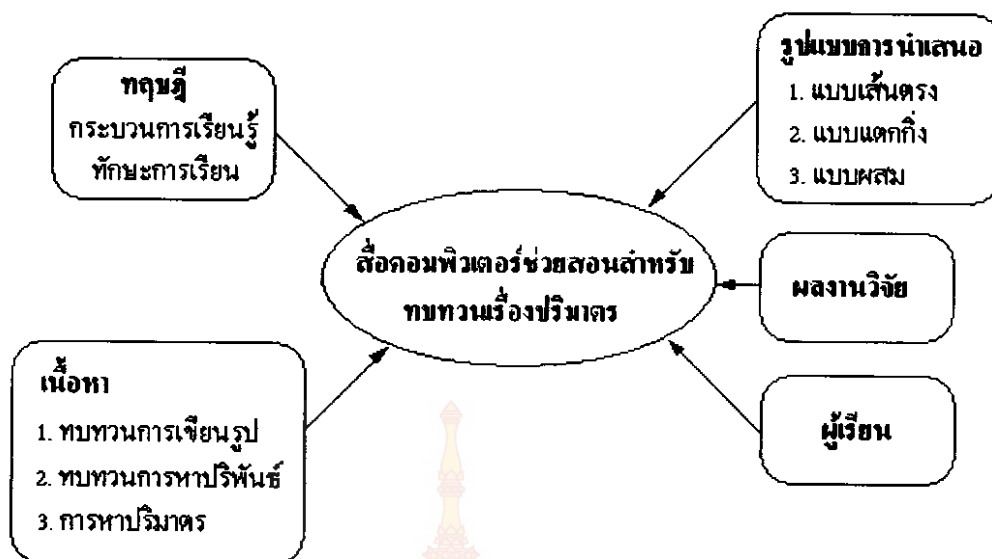
- 1) กำหนดลักษณะของปัญหา
- 2) พิจารณาลำดับขั้นตอนที่จะให้บรรลุผลตามวัตถุประสงค์
- 3) เลือกแนวทางแก้ปัญหาที่ดีที่สุด
- 4) กำหนดเป็นกิจกรรมการเรียนรู้
- 5) แปลงการเรียนรู้ทั้งหมดลงในสตอรี่บอร์ด ซึ่งแสดงเป็นภาพของการออกแบบบนหน้าจอภาพที่จะนำเสนอข้อมูลสำคัญต่อผู้ตรวจทานและผู้ออกแบบการเรียนรู้
- 6) หมายเลขกำกับลำดับจอภาพ
- 7) วัตถุประสงค์ข้อที่กำหนดซึ่งสัมพันธ์กับจอภาพ
- 8) รายละเอียดบนจอภาพจะต้องมีอะไรบ้าง
- 9) ส่วนบนและส่วนล่างของจอภาพ
- 10) ข้อความและภาพประกอบ
- 11) สีพื้นของพื้นจอภาพ สีพื้นของข้อความและภาพ ตลอดจนรูปแบบและขนาดของตัวอักษร
- 12) คำสั่งที่จำเป็นประจำหน้าจอภาพจะกำหนดเป็นสัญลักษณ์หรือข้อความ เมื่อเสร็จภารกิจขั้นตอนนี้ จำเป็นต้องประเมินและปรับปรุงแก้ไข โดยคณะผู้ประเมินบางทีอาจต้องย้อนกลับไปขั้นแรกใหม่ถ้ามีความจำเป็น หรืออาจไปสู่ขั้นที่ 3 ได้เลย

6.3.3 **ขั้นการพัฒนาและนำไปใช้** ขั้นนี้เป็นการเปลี่ยนบทเรียนบนกระดาษลงเครื่องคอมพิวเตอร์ รวมถึงการเขียนผังงาน (Flowchart) และนำผลจากการออกแบบบนหน้าจอภาพ การทดสอบและแก้ไข การปฏิบัติในการเรียน การประเมินผลย่อย และการประเมินผลรวม มาทำการปรับปรุงแก้ไข

6.4 การสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับงานวิจัย

การสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในงานวิจัยครั้งนี้ ได้นำองค์ความรู้ ทฤษฎี รูปแบบ ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาประยุกต์รวมกัน ซึ่งต้องขึ้นกับความเหมาะสมของเนื้อหาในแต่ละช่วง และพื้นฐานของผู้เรียน ที่จะทำให้ผู้เรียนเกิดความรู้และเป็นอิสระในการเรียนรู้ด้วยตนเอง ดังภาพที่ 2-5 ต่อไปนี้

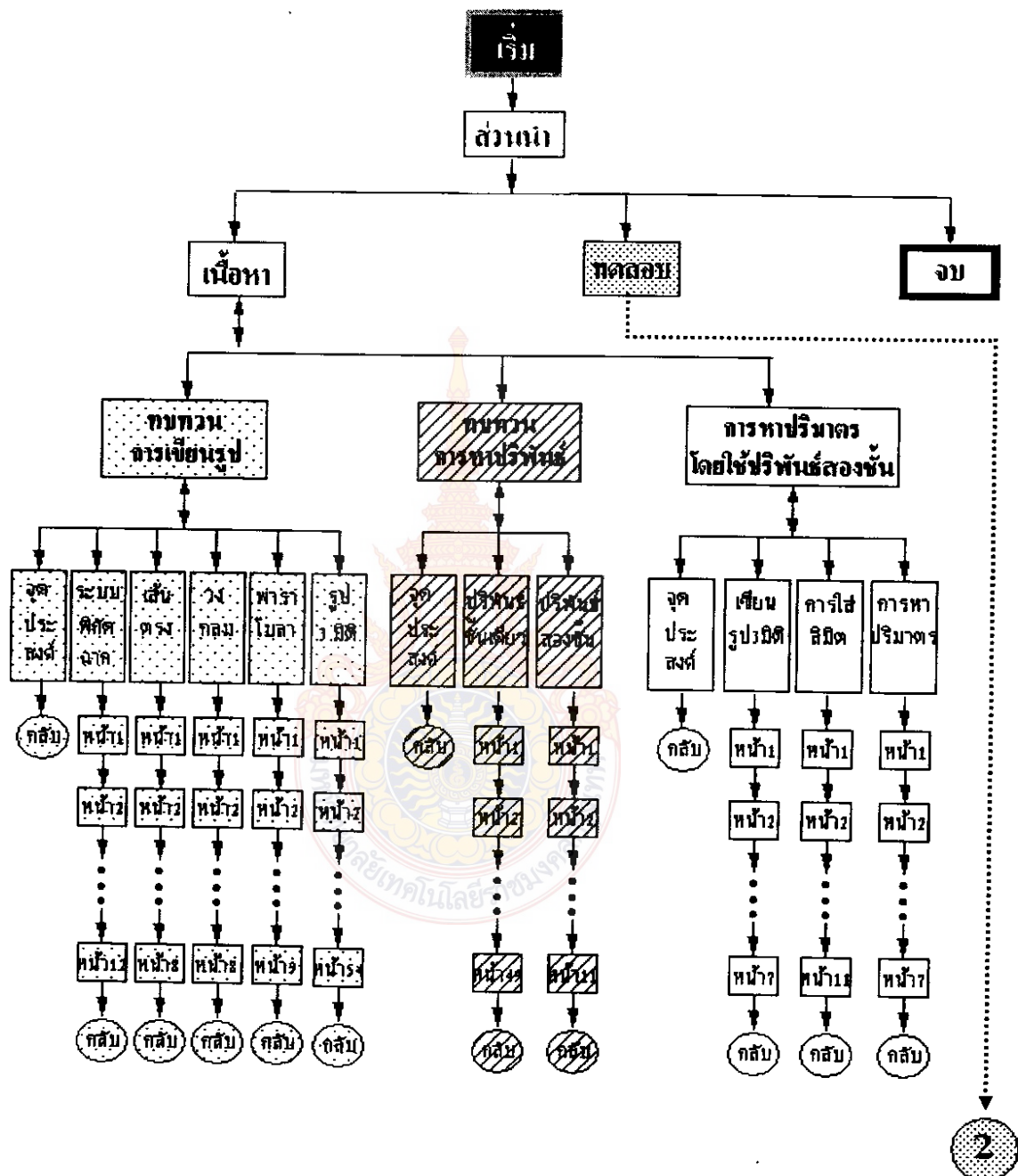
แนวคิดการสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่องการหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้นในการวิจัยนี้

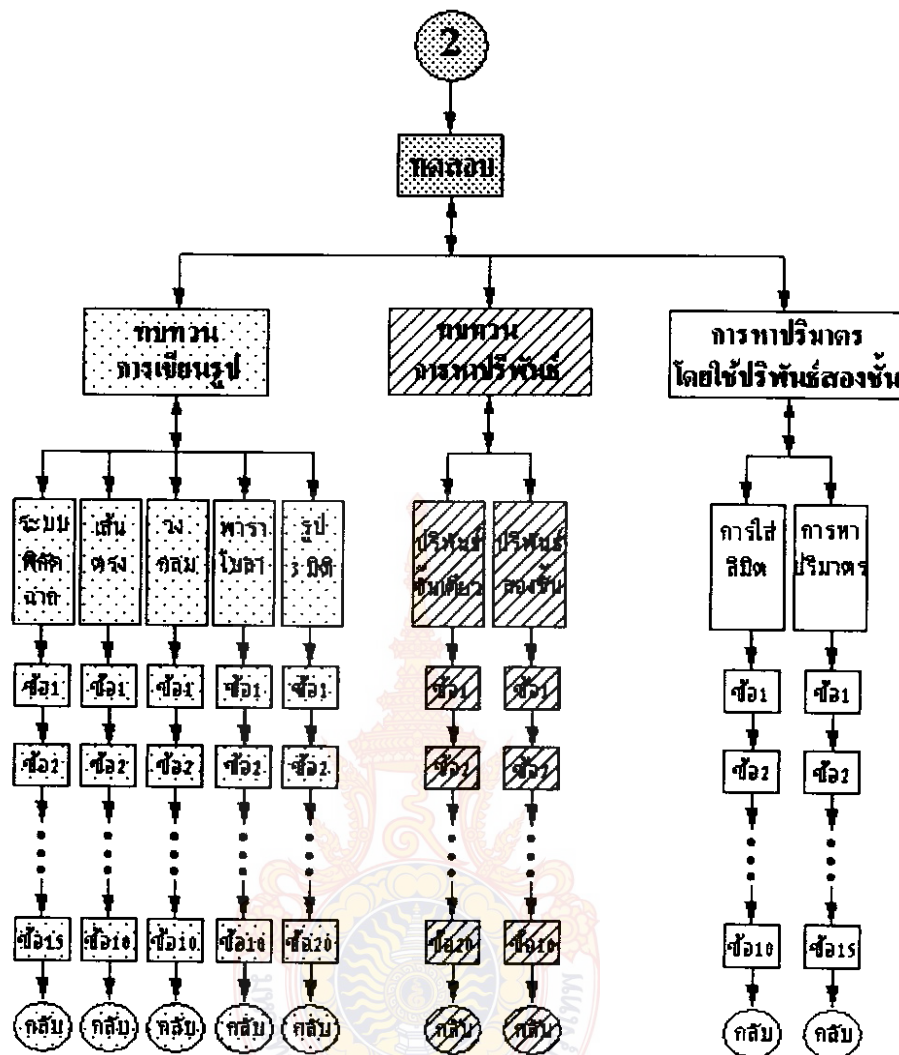


ภาพที่ 2-5 แสดงแบบจำลองการสร้างสื่อการเรียนรู้ คอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับทบทวนเรื่องปริมาตรในการวิจัยนี้

จากแนวคิดในภาพที่ 2-5 นำมาออกแบบสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับทบทวนเรื่องปริมาตร ที่มีการออกแบบการสร้างเป็นแบบผสม โดยใช้แบบเส้นตรงในส่วนที่เป็นเนื้อหา และใช้แบบแตกกิ่งในส่วนที่ให้ผู้เรียนได้เลือกเรียนตามความสามารถ และเป็นอิสระในการเรียนรู้ ผู้เรียนจะออกจากการเรียนรู้เมื่อไรก็ได้ ดังภาพจำลองการออกแบบสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับทบทวนเรื่องปริมาตร ต่อไปนี้

ภาพที่ 2-6 แบบจำลองการสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาณในการวิจัยนี้





7. การทบทวน (Review)

7.1 ความสำคัญของการทบทวนที่มีต่อการเรียนการสอน

การทบทวนในการเรียนการสอน เป็นการช่วยให้เกิดการเรียนรู้ เพราะไม่มีใครจำสิ่งที่เรียนมาได้ทั้งหมด การสรุปสาระสำคัญของบทเรียนเป็นการทบทวนวิธีหนึ่งที่มีความจำเป็นอย่างยิ่งต่อการเรียนการสอน เพราะการสรุปสาระสำคัญจะทำให้เกิดการถ่ายโยงการเรียนรู้ ไปยังสถานการณ์ใหม่ หรือทำให้ผู้เรียนได้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ใหม่กับความรู้เดิม ซึ่งการสรุปสาระสำคัญจะช่วยเพิ่มสมรรถภาพการเรียนรู้ในสถานการณ์ใหม่ด้วย (ชม ภูมิภาค. 2523 : 226)

การสรุปสาระสำคัญของบทเรียนอาจทำได้ในหลายลักษณะ ดังนี้

- 1) สรุปเมื่อจบบทเรียนในแต่ละบท
- 2) สรุปในแต่ละระดับชั้นของการเรียน ซึ่งบทเรียนบทหนึ่งๆอาจจะมีหลายระดับชั้นของการเรียน

- 3) สรุปทันทีที่มีการทำแบบฝึกหัดเสร็จสิ้น
- 4) สรุปเมื่อมีปัญหาหรืออุปสรรคเกิดขึ้น

การสรุปสาระสำคัญที่กล่าวมาแล้วนั้น มีคุณค่าต่อการเรียนการสอนหลายประการ (วิชัย คิสสระ. 2519 : 82-85) ดังนี้

- 1) ประมวลประเด็นสำคัญที่เรียนไปแล้วเข้าด้วยกัน
- 2) เชื่อมโยงกิจกรรมการเรียนการสอนเข้าด้วยกัน
- 3) รวบรวมความสนใจของผู้เรียนเข้าด้วยกัน
- 4) สร้างความเข้าใจในบทเรียนให้ดียิ่งขึ้น
- 5) ส่งเสริมความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ให้กับผู้เรียน

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า การทบทวนโดยการสรุปสาระสำคัญของบทเรียนมีความสำคัญต่อการเรียนรู้ ดังนี้

- 1) ป้องกันความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นจากการทำแบบทดสอบ
- 2) ผู้เรียนสามารถที่จะค้นหาคำตอบที่ถูกต้องได้ด้วยตนเอง
- 3) การทบทวนเป็นการชี้แนะและแนะแนวทางการเรียนให้แก่ผู้เรียน
- 4) การทบทวนทำให้เกิดการเชื่อมโยงลำดับและสาระสำคัญของเนื้อหาเข้าด้วยกัน
- 5) ทำให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จในการตอบคำถามได้ถูกต้องมากที่สุด ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนเกิดความพึงพอใจและมีความกระตือรือร้นในการเรียนมากยิ่งขึ้น
- 6) การทบทวนเกื้อหนุนต่อความจำในระยะสั้นและระยะยาว
- 7) การทบทวนทำให้เกิดการจำได้โดยการเรียนรู้ซ้ำ (relearning) การจำได้โดยการเชื่อมโยง (reintegration) (Fleming and Levic. 1977 : 139 ; Gagne and Briggs. 1979 : 166 ; Nishikawa. 1988 : 524 ; Rothen and Tennyson. 1978 : 319 ; Fleming and Levir. 1977 : 183)

อย่างไรก็ตาม การสรุปสาระสำคัญของเนื้อหา จะมีประโยชน์ต่อการเรียนรู้อย่างจริงจังก็ต่อเมื่อให้ผู้เรียนได้มีโอกาสสรุปสาระสำคัญของเนื้อหานั้นอีกครั้งหนึ่ง โดยอาจจะมีรูปแบบเนื้อหาเดิม หรือเรียบเรียงให้แตกต่างออกไป (Kemp and Smellie. 1989 : 25 ; Citing Hoban and Van Ormer. 1950 ; Allen. 1973)

7.2 การทบทวนในบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การทบทวนในบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของการให้ข้อมูลป้อนกลับ ซึ่งในบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบการสอน จะให้ข้อมูลป้อนกลับในลักษณะของการให้ข้อเสนอแนะ (information feedback) ข้อมูลป้อนกลับจะให้ข้อเสนอแนะ ซึ่งจะให้การตอบสนองของผู้เรียนที่ตอบคำถาม ซึ่งโดยสาระแล้ว จะให้ข้อมูลเกี่ยวกับความพึงพอใจในการตอบสนองของผู้เรียน หรือการช่วยผู้เรียนป้องกันและแก้ไขข้อบกพร่องไม่ให้เกิดซ้ำ และ/หรือช่วยผู้เรียนให้เข้าใจบ้าง จุดประสงค์หลักของการให้ข้อมูลป้อนกลับแบบให้ข้อเสนอแนะ ก็เพื่อป้องกันและแก้ไขข้อผิดพลาดของผู้เรียน และในขณะเดียวกันก็ป้องกัน

ข้อผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นจากการเรียนต่อไปด้วย (Smith. 1988 : 734) นั่นคือ การให้การทบทวนในเรื่องของการให้ข้อมูลป้อนกลับ จะเกิดขึ้นหลังจากการตอบสนองของผู้เรียน ซึ่งผู้เรียนอาจจะตอบถูกหรือตอบผิด แล้วจึงได้รับการทบทวนหรือแก้ไข รา (Rha. 1988 : 928) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการให้ข้อมูลป้อนกลับ 3 แบบ คือ แบบที่ 1 เป็นข้อมูลป้อนกลับแบบตอบว่าใช่หรือไม่ใช่ แบบที่ 2 เป็นข้อมูลป้อนกลับแบบให้คำตอบที่ถูกร่วมกับการให้ข้อมูลป้อนกลับแบบให้ข้อเสนอแนะ (KCRI : correct answer plus information feedback) โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษามหาวิทยาลัยอินเดียนา จำนวน 60 คน ที่ศึกษาวิชาสังคมวิทยา ผลการวิจัยพบว่า การให้ข้อมูลป้อนกลับแบบให้คำตอบที่ถูกร่วมกับการให้ข้อมูลป้อนกลับแบบให้ข้อเสนอแนะ และการให้ข้อมูลป้อนกลับแบบให้คำตอบที่ถูกต้องเพียงอย่างเดียว มีประสิทธิภาพต่อการเรียนรู้ที่เทียบกัน ส่วน พอลไลน์ (Pauline. 1987 : 2539) ได้ศึกษาผลของการให้ข้อมูลป้อนกลับร่วมกับการให้การทบทวน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 9 ได้รับการสอนด้วยสไลด์ประกอบเสียง ซึ่งเชื่อมต่อกับคอมพิวเตอร์ พบว่าการให้ข้อมูลป้อนกลับร่วมกับการให้การทบทวน จะมีประสิทธิภาพต่อการเรียนรู้ที่มีนัยสำคัญ เฉพาะต่อการเรียนรู้ในระดับสูง (higher order learning) เท่านั้น

จากเอกสารและงานวิจัยเกี่ยวกับความสำคัญของการทบทวนโดยสื่อประเภทต่างๆ แสดงให้เห็นว่าการทบทวนสาระสำคัญของเนื้อหาในแต่ละบทเรียน มีความสำคัญต่อการเรียนรู้ ทั้งในแง่ของการป้องกันความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้น การเชื่อมโยงสาระสำคัญของเนื้อหาเข้าด้วยกัน และการให้แนวทางการเรียนรู้ตลอดจนทำให้เกิดการจำได้ทั้งในระยะสั้นและระยะยาว นอกจากนี้ได้มีการฝึกทำแบบทดสอบเมื่อวัดผลของการเรียนรู้ว่าผู้เรียนมีความเข้าใจในบทเรียนอย่างแท้จริง และสามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้ และผลจากการวิจัยพบว่า ผู้เรียนที่ได้รับการทบทวนสาระสำคัญในบทเรียนและฝึกทำแบบทดสอบจะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าผู้เรียนที่ไม่ได้รับการทบทวนในบทเรียน และฝึกทำแบบทดสอบ

8. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

มีนักวิชาการทั้งในประเทศและต่างประเทศ ได้ศึกษาการนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้มากมายหลายแขนง โดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ การนำเอาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาใช้สามารถสนับสนุนการเรียนรู้เป็นอย่างดี ดังงานวิจัยต่อไปนี้

8.1 งานวิจัยในประเทศ

กรองทอง ศรีอาภรณ์ (2540) ได้พัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องกำหนดการเชิงเส้น สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 5 กรุงเทพฯ หาประสิทธิภาพโดยใช้นักเรียนโรงเรียนบางแก้ว จำนวน 18 คน มีประสิทธิภาพ 73.7 / 77.7 กลุ่มตัวอย่างใช้นักเรียนโรงเรียนปทุมคงคา 2 ห้องเรียน ห้องหนึ่งเรียนโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน อีกห้องเป็นกลุ่มควบคุม เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่าง 2 กลุ่ม พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มแตกต่างกัน ที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.01

บุญญา เพียรสวรรค์ (2540) ได้พัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ระบบมัลติมีเดีย เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่พัฒนาตามแนวคิดของ อเลสซี และทรอลลิปแนวคิดของแฮนนาฟิน และแนวคิดของเคมพ์ โดยมีประสิทธิภาพสูงกว่าเกณฑ์ 70/70 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนมัธยมศึกษา

ตอนปลาย โรงเรียนเฉลิมขวัญสตรี จังหวัดพิษณุโลก จำนวน 60 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม สำหรับกลุ่มทดลอง 30 คน แบ่งเป็นระดับความสามารถต่ำ ปานกลาง และสูง ระดับละ 10 คน กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนด้วยตนเองที่ไม่มีครูผู้สอน และกลุ่มควบคุมเรียนโดยวิธีปกติ จำนวน 8 คาบเรียน ได้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกับกลุ่มควบคุม ที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.05 โดยมีคะแนนเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุม และไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างวิธีสอนกับระดับความสามารถทางคณิตศาสตร์ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่มีระดับความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่างกัน คือ ต่ำ ปานกลาง และสูง แต่ละคู่มีความแตกต่างกันที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.05

เกษม พึ่งพา (2541) ได้พัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้น ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนวัดราชพิพิธกรุงเทพมหานคร ได้ประสิทธิภาพ 95.22 / 76.37 กลุ่มตัวอย่าง นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2540 โรงเรียนวัดราชพิพิธ โดยแบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 41 คน เรียนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน และกลุ่มควบคุม 46 คน เรียนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มแตกต่างกัน ที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.05

8.2 งานวิจัยต่างประเทศ

แจ็กสัน (Jackson, 1997) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ความคิดเห็นที่สอดคล้องกันระหว่างนักเรียน ครู และผู้บริหาร ในเรื่องประโยชน์ที่ให้นักเรียนใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI) ในโรงเรียนระดับประถมศึกษา โดยศึกษาจากนักเรียนเกรด 3 และเกรด 5 จำนวน 84 คน ครู 16 คน จากโรงเรียนสองโรงเรียน ซึ่งเป็นโรงเรียนที่ก่อตั้งตั้งแต่ชั้นอนุบาลถึงเกรด 5 เป็นโรงเรียนที่ใช้เทคโนโลยีทั้งระบบ ไม่ว่าจะเป็นห้องสมุด หรือในห้องเรียนก็ต้องมีคอมพิวเตอร์ และนักเรียนต้องใช้คอมพิวเตอร์อย่างน้อย 3 ปีขึ้นไป ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาโดยการสำรวจด้านความสมบูรณ์ของคอมพิวเตอร์ในด้านเนื้อหาสาระของวิชา และความเชื่อถือในการใช้คอมพิวเตอร์ พบว่า ครู ผู้บริหาร และนักเรียนชอบใช้ จากการศึกษาค้นคว้า ครู ผู้บริหาร และนักเรียนชอบใช้คอมพิวเตอร์ในการแก้ปัญหาโจทย์ในวิชาคณิตศาสตร์ และในวิชาด้านภาษา ต่างมีความเห็นตรงกันในด้านประโยชน์ของการใช้คอมพิวเตอร์ ในการแก้ปัญหาโจทย์ยากๆ โดยเครื่องคอมพิวเตอร์จะช่วยบอกให้รู้เมื่อเขาทำผิด ซึ่งจะช่วยแก้ปัญหาในระหว่างทำได้อัตโนมัติ

เทตลอค (Tetlock, 1997) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ผลของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน ในการช่วยสอนเสริมวิชาคณิตศาสตร์ในห้องเรียน ที่มีต่อทัศนคติและกระบวนการเรียนการสอน ซึ่งได้ใช้แบบสอบถามประกอบด้วยข้อความแบบลิเคิร์ต (Likert) ซึ่งนำมาพัฒนาเพื่อใช้ในการประเมินด้านทัศนคติของนักเรียนที่มีต่อการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในวิชาคณิตศาสตร์ โดยนักเรียนจะต้องตอบคำถามปลายเปิดทั้ง 2 ข้างเพื่อชี้ให้เห็นว่าเขาชอบอะไรมากที่สุดและน้อยที่สุดในการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งได้ผลสรุปว่า นักเรียนมีทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ดีขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ และนอกจากนี้ยังทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในกระบวนการสอนอย่างมีนัยสำคัญ คือครูกลายเป็นผู้อำนวยความสะดวกในกระบวนการเรียน และครูจะต้องเตรียมการสอนอย่างมาก ตั้งแต่เตรียมเครื่องคอมพิวเตอร์ และตัวโปรแกรมสำหรับใช้ในห้องเรียน ซึ่งเป็นการเสริมเข้าไปในกระบวนการเรียนการสอน

แรนเดล อี. ชูแมคเกอร์, จอน ไอ. ชัง และ คาร์เนล แอล. เรมบรี (Randall E. Schumacker, Jon

I. Young and Karen L. Bemby 1993) ได้ทำการวิจัย โดยใช้กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม เพื่อตัดสินและเปรียบเทียบผลการสอนด้วยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนกับการสอนโดยวิธีบรรยายทั่วไป ด้านทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาพีชคณิต 1 โดยเฉพาะอย่างยิ่งได้สำรวจความแตกต่างเกี่ยวกับความวิตกกังวล ทัศนคติ ที่มีต่อความสำเร็จทางคณิตศาสตร์ ความเชื่อมั่นเกี่ยวกับการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับเกรด 9 หรือเกรด 10 ของโรงเรียนในเขตปริมณฑลของรัฐเท็กซัสตอนเหนือ จำนวนทั้งหมด 294 คน กำลังเรียนวิชาพีชคณิต 1 แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 106 คน และกลุ่มควบคุม 188 คน กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน ใช้โปรแกรมที่เรียกว่า Learning Logic และรวมถึงการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนควบคู่กันไป เงื่อนไขการใช้คอมพิวเตอร์เป็นช่วงเช้าหรือเย็นหลังเลิกเรียน กลุ่มควบคุมเรียนตามปกติ และสามารถขอความช่วยเหลือจากครูผู้สอนนอกเวลาเรียนได้เสมอ ปรากฏว่าคะแนนเฉลี่ยวิชาพีชคณิต 1 ของกลุ่มควบคุมสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติและไม่พบความแตกต่างของคะแนนความวิตกกังวล ทัศนคติ และความเชื่อมั่นเกี่ยวกับการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

รินาลดี, ไอริส ลิลเลียล (Rinalai, Iris Lilian 1997) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางวิชาคณิตศาสตร์จากการสอนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน และการสอนโดยครูในวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการหาค่าเศษส่วน ทศนิยม และเปอร์เซ็นต์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับเกรด 8 ที่มีพื้นฐานอ่อนและต้องแก้ไขให้มีทักษะดีขึ้น จำนวน 22 คน โดยแบ่งเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มหนึ่งเรียนโดยใช้ คอมพิวเตอร์ช่วยสอน อีกกลุ่มหนึ่งเรียนกับครูโดยตรง ใช้เวลาเรียน 5 สัปดาห์ละ 4 วันๆละ 1 ชั่วโมง ทำการสอนตามหลักสูตร เน้นไปที่การสอนเข้าใจในเรื่องการหาค่าเศษส่วน ทศนิยม และเปอร์เซ็นต์ ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มที่เรียนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนกับกลุ่มที่เรียนกับครู ไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ฟินช์, เคอร์ธ เอลสเวิร์ธ, เจอร์ (Finch, Curits Ellsworth, JR 1997) ได้ศึกษาผลของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน(CAI)เสริมให้แก่เด็กชนบทเกรด 7 เพื่อปรับปรุงคะแนนคณิตศาสตร์ ซึ่งวัดและประเมินผลโดย The Michigan Assessment Program Test (MEAP) กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชนบทเกรด 7 ของโรงเรียนทางตอนเหนือของมิชิแกนจำนวน 180 คน ซึ่งมีผู้สมัครใจเข้าร่วมการทดลอง 60 คน ทำการสุ่มมา 35 คน และที่เหลือจากทั้งหมดสุ่มมาอีก 35 คน เพื่อเป็นกลุ่มควบคุม โดยกลุ่มทดลองใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนช่วยในการสอนเสริม กลุ่มควบคุมเรียนตามปกติกับครู ทำการทดลอง 5 สัปดาห์ มีการทดสอบก่อนเรียนโดยใช้ข้อสอบของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ผลการวิจัยพบว่าไม่มีความแตกต่างกันภายในกลุ่มเดียวกัน ส่วนการทดสอบหลังเรียนโดยใช้ข้อสอบของ MEAP ก็ไม่มีความแตกต่างกันระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างคะแนนการทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนอยู่ที่ระดับ 0.01

คอลลินส์, โธมัส, เจอร์ (Collins, Thomas, JR 1997) ได้ศึกษาถึงผลของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในวิชาพีชคณิต ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และระดับความวิตกกังวลในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และทัศนคติของนักเรียนในการใช้คอมพิวเตอร์ กลุ่มตัวอย่าง สุ่มจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาของ History black University มา 96 คน แบ่งเป็น 4 กลุ่ม เป็นกลุ่มทดลองใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน 2 กลุ่ม และกลุ่มควบคุม 2 กลุ่มซึ่งเรียนตามปกติโดยครูผู้สอน กลุ่มละ 24 คน ให้นักเรียนทั้ง 4 กลุ่มเรียนเรื่องพีชคณิต โดยทำการทดสอบ 3 ครั้งคือทดสอบก่อนเรียน ทดสอบหลังเรียน และการทดสอบเพื่อติดตามผล การวิจัยพบว่าการ

เรียนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน ทำให้ความวิตกกังวลในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ลดลง และนักเรียนมีทัศนคติที่ดีต่อการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนช่วยในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อย่างมีนัยสำคัญ ส่วนการเปรียบเทียบของผลการทดสอบหลังเรียน และการทดสอบเพื่อติดตามผลพบว่า ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม นอกจากนี้วิธีการสอนทั้ง 2 แบบ ไม่ทำให้ความวิตกกังวลในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ในการทดสอบทั้งหมดพบว่า มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ในเรื่องทัศนคติต่อการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ในการทดสอบติดตามผล โดยกลุ่มทดลองมีทัศนคติในทางบวกต่อการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์มากกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญ

ค็อก, เจเน็ต คาร์เน (Cox, Janet Karen 1997) ได้ศึกษาถึงผลของการเรียนวิชาทักษะพื้นฐานทางสายวิชาชีพ (คณิตศาสตร์, การอ่าน) โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนและสอน โดยครูอธิบาย กลุ่มตัวอย่างประกอบด้วยนักเรียนที่ทำแบบทดสอบ The test of Adult Basic Educational 297 คน นักเรียนที่ได้รับการสำรวจทัศนคติ 325 คน นักเรียนที่ทำแบบทดสอบ The MBIT 255 คน และทำแบบสอบถาม 53 คน โดยแบ่งนักเรียนเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มหนึ่งให้เรียนโดยครูอธิบาย ส่วนอีกกลุ่มหนึ่งให้เรียนโดยใช้ คอมพิวเตอร์ช่วยสอน ผลการวิจัยพบว่าคะแนนวิชาทักษะพื้นฐานทางสายวิชาชีพ คือคณิตศาสตร์และการอ่านของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่มแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ส่วนทางด้านบุคลิกภาพและวิธีการเรียนรู้ไม่แตกต่างกัน และพบว่าทัศนคติของนักเรียนชอบวิธีการสอนโดยใช้ครูอธิบายมากกว่าใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนเพียงอย่างเดียว

สรุปงานวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศที่เกี่ยวกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

1) ด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน งานวิจัยที่นำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาสอนแทนครู ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าการเรียนกับครู ได้แก่ งานวิจัยของ เกษม พิงพา (2541); เบญญา เพียรสวรรค์ (2540); กรองทอง ศรีอารณ์ (2540); ฝนทิพย์ อมาตยกุล (2531); สุรพล อมาตยกุล (2530); พวงเพชร วัชรรัตนพงศ์ (2536); นัยนา ลีณะธรรม (2535); ชุศรี ยินตระกูล (2529); ลี (1975); เทอร์เนอร์ (1982); แฟรงค์ (1988); เมอร์วิท (1983); เซคส์ (1986); โอเคน (1982) และ อัลรัม (1984) งานวิจัยที่นำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาสอนแทนครูทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ไม่แตกต่างกับการเรียนกับครู ได้แก่ งานวิจัยของ คอลลินส์ (1997); ค็อก (1997) และฟินซ์ (1997)

2) ด้านทัศนคติ การนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาใช้สอนแทนครู ทำให้นักเรียนมีทัศนคติที่ดีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ได้แก่ งานวิจัยของ ฝนทิพย์ อมาตยกุล (2531); สุรพล อมาตยกุล (2530); พวงเพชร วัชรรัตนพงศ์ (2536); นัยนา ลีณะธรรม (2535); ชุศรี ยินตระกูล (2529); เทลลอค (1997) และ คอลลินส์ (1997) และนักเรียนมีทัศนคติที่ดีต่อวิธีเรียนโดยนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาใช้ในการเรียนการสอน ได้แก่ งานวิจัยของ เกษม พิงพา (2541); เบญญา เพียรสวรรค์ (2540) และกรองทอง ศรีอารณ์ (2540)

3) ประเภทงานวิจัย งานวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศส่วนใหญ่ เป็นงานวิจัยเกี่ยวกับการนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาใช้สอนแทนครู วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ศึกษาทัศนคติ ความวิตกกังวล ระยะเวลาในการเรียน และความคงทนสำหรับประชากรและกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่เป็นนักเรียนระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา

บทที่ 3

การดำเนินการวิจัย

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

1.1 ประชากร

การวิจัยครั้งนี้ ประชากรเป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

1.2 กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม คือ

1.2.1 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดสอบประสิทธิภาพ ของสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอน สำหรับบททวนเรื่องปริมาตรนี้ เป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

1) กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดสอบประสิทธิภาพเดี่ยว เป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ ชั้นปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2/2550 จำนวน 3 คน โดยคัดเลือกนักศึกษาที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง : ปานกลาง : ต่ำ จำนวน 1:1:1

2) กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดสอบประสิทธิภาพแบบกลุ่มเล็ก เป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ ชั้นปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2/2550 จำนวน 9 คน โดยคัดเลือกนักศึกษาที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง : ปานกลาง : ต่ำ จำนวน 3:3:3

1.2.2 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองภาคสนาม เพื่อทดสอบประสิทธิภาพของสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร เป็นนักศึกษา ระดับปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ ชั้นปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2/2550 มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ โดยได้จากการสุ่มแบบง่าย ได้ นักศึกษาสาขาวิศวกรรมไฟฟ้า จำนวน 30 คน

2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย แบ่งเป็น 3 ประเภท ดังนี้

2.1 สื่อการเรียนรู้

สื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ประกอบด้วย

2.1.1 เนื้อหา 3 หน่วย ได้แก่

1) บททวน “การเขียนรูป 2 มิติ และ 3 มิติ”

2) ทบทวน “การหาปริพันธ์ชั้นเดียว และสองชั้น”

3) เนื้อหา “ปริมาตร”

2.1.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องระบบพิกัดฉาก เส้นตรง วงกลม พาราโบลา การเขียนรูป 3 มิติ การหาปริพันธ์ชั้นเดียว การหาปริพันธ์สองชั้น การใส่ลิมิตปริพันธ์สองชั้น และการหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

2.2 แบบทดสอบ

แบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานก่อนเรียน จำนวน 40 ข้อ เรื่อง ระบบพิกัดฉาก เส้นตรง วงกลม รูป 3 มิติ ปริพันธ์ชั้นเดียว และปริพันธ์สองชั้น

2.3 แบบสอบถาม

แบบสอบถามความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับทบทวนเรื่อง ปริมาตร

3. ขั้นตอนและวิธีวิจัย มี 2 ขั้นตอน ดังนี้

3.1 ขั้นสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

3.1.1 การสร้างสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนรูป 3 มิติ การหาปริพันธ์ชั้นเดียว การหาปริพันธ์สองชั้น การใส่ลิมิตปริพันธ์สองชั้น การหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

- 1) ศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับคุณภาพของการศึกษาเชิงระบบการเรียนการสอน ซึ่งประกอบด้วย ปัจจัยนำเข้า (input) กระบวนการ (process) และผลลัพธ์ (output) เพื่อกำหนดกรอบการสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับทบทวนเรื่องปริมาตร
- 2) ศึกษาหลักสูตรและเนื้อหาวิชาแคลคูลัส 2 สำหรับวิศวกร รหัสวิชา 13-011-142 เรื่องปริมาตร
- 3) สร้างเนื้อหา และแบบทดสอบ 3 เรื่อง คือ เนื้อหาทบทวนการเขียนรูป 2 มิติ 3 มิติ ระบบพิกัดฉาก ปริพันธ์ชั้นเดียว ปริพันธ์สองชั้น การใส่ลิมิตปริพันธ์สองชั้น และการหาปริมาตร โดยอาศัยระบบการเรียนการสอนดังกล่าวเป็นกรอบ ดังนี้

ปัจจัยนำเข้า (INPUT)	กระบวนการ (PROCESS)	ผลลัพธ์ (OUTPUT)
รวบรวมความรู้ 1. ศึกษาเนื้อหาเรื่อง 1.1 การเขียนรูป 2 มิติ และ 3 มิติ 1.2 การหาปริพันธ์ชั้นเดียว และปริพันธ์สองชั้น 1.3 การหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น	ประมวลความรู้ 2. การจำและทำความเข้าใจ 3. สร้างแบบทดสอบ 3 เรื่อง 3.1 การเขียนรูป 2 มิติ และ 3 มิติ 55 ข้อ 3.2 การหาปริพันธ์ 30 ข้อ 3.3 การหาปริมาตร 25 ข้อ	เสนอความรู้ 4. การทดสอบ

ในการพัฒนาสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตรทั้ง 3 เรื่องนี้ ใช้รูปแบบ 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. สร้างแรงจูงใจ ด้วยการบอกวัตถุประสงค์
2. ให้ความรู้ และเทคนิคการทำ
3. ฝึกทำแบบทดสอบแต่ละเนื้อหาด้วยตนเองจากคอมพิวเตอร์
4. รู้ผลการฝึกทำแบบทดสอบทันทีจากคอมพิวเตอร์
5. ฝึกทำซ้ำได้

เนื้อหาในคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ทั้ง 3 เรื่องมีดังนี้

1. บททวนการเขียนรูป
 - 1.1 ระบบพิกัดฉาก
 - 1.1.1 ระบบพิกัดฉากใน 2 มิติ
 - 1.1.2 ระบบพิกัดฉากใน 3 มิติ
 - 1.2 เส้นตรง
 - 1.2.1 นิยามเส้นตรง
 - 1.2.2 สมการเส้นตรง
 - 1.2.3 การเขียนกราฟเส้นตรง
 - 1.3 วงกลม
 - 1.3.1 นิยามวงกลม
 - 1.3.2 สมการวงกลม
 - 1.3.3 การเขียนกราฟวงกลม
 - 1.4 พาราโบลา
 - 1.4.1 นิยามพาราโบลา

- 1.4.2 สมการพาราโบลา
- 1.4.3 การเขียนกราฟพาราโบลา
- 1.5 ระนาบ
 - 1.5.1 นิยามระนาบ
 - 1.5.2 ระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด
 - 1.5.3 ระนาบที่ขนานกับแกนพิกัด
 - 1.5.4 การเขียนกราฟของสมการระนาบ
- 1.6 ทรงกลม
 - 1.6.1 นิยามทรงกลม
 - 1.6.2 สมการมาตรฐานของทรงกลม
 - 1.6.3 สมการทั่วไปของทรงกลม
- 1.7 ผิวทรงกระบอก
 - 1.7.1 นิยามทรงกระบอก
 - 1.7.2 ทรงกระบอกเชิงพาราโบลา
 - 1.7.3 ทรงกระบอกเชิงวงรี
 - 1.7.4 ทรงกระบอกกลม
 - 1.7.5 ทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา
 - 1.7.6 การเขียนกราฟของสมการผิวทรงกระบอก
- 1.8 ทรงรี
 - 1.8.1 นิยามทรงรี
 - 1.8.2 สรุปลักษณะผิวทรงรี
- 1.9 ทรงไฮเพอร์โบลานิคชั้นเดียว
 - 1.9.1 นิยาม
 - 1.9.2 สรุปลักษณะผิวทรงไฮเพอร์โบลานิคชั้นเดียว
- 1.10 ทรงไฮเพอร์โบลานิคสองชั้น
 - 1.9.1 นิยาม
 - 1.9.2 สรุปลักษณะผิวทรงไฮเพอร์โบลานิคสองชั้น
- 1.11 ทรงพาราโบลาเชิงวงรี
 - 1.9.1 นิยาม
 - 1.9.2 สรุปลักษณะผิวทรงพาราโบลาเชิงวงรี
- 1.12 กรวยเชิงวงรี
 - 1.9.1 นิยาม
 - 1.9.2 สรุปลักษณะกรวยเชิงวงรี

2. ทบทวนการหาปริพันธ์

2.1 ปริพันธ์ชั้นเดียว

- 2.1.1 นิยามและสัญลักษณ์ของปริพันธ์
- 2.1.2 ปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต
- 2.1.3 ปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ให้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันลอการิทึม
- 2.1.4 ปริพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลัง
- 2.1.5 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 2.1.6 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง

2.2 ปริพันธ์สองชั้น

- 2.2.1 นิยามของปริพันธ์สองชั้น
- 2.2.2 บริเวณรูปแบบที่ 1
- 2.2.3 บริเวณรูปแบบที่ 2
- 2.2.4 วิธีการหาค่าปริพันธ์สองชั้น
- 2.2.5 สรุปการหาค่าปริพันธ์สองชั้น

3. ปริมาตร

- 3.1 การหาปริมาตรในกรณีที่ 1
- 3.2 การหาปริมาตรในกรณีที่ 2
- 3.3 สรุปการหาปริมาตร โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระบบพิกัดฉาก

3.1.2 สร้างแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน โดยมีขั้นตอนดังนี้

- 1) ศึกษาและวิเคราะห์พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระบบพิกัดฉาก
- 2) สร้างข้อคำถามและตัวเลือก
- 3) นำแบบทดสอบไปให้ผู้เชี่ยวชาญ และผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบคุณภาพ
- 4) ปรับปรุงตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญและผู้ทรงคุณวุฒิ จนได้แบบทดสอบ วัดความรู้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการเรียนเรื่องการหาปริมาตร ซึ่งใช้สำหรับทดสอบ ก่อนเรียน จำนวน 40 ข้อ และข้อสอบหลังเรียน เรื่องปริมาตรจำนวน 120 ข้อ

3.1.3 สร้างแบบสอบถามความพึงพอใจที่มีต่อสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับทบทวนเรื่อง ปริมาตร ดังนี้

- 1) วิเคราะห์กรอบการประเมินการเรียนการสอนในด้านภาษา ด้านรูปแบบ ด้านเนื้อหา ด้านแบบทดสอบ และด้านอื่นๆ .
- 2) สร้างข้อคำถามในแต่ละด้าน

- 3) นำแบบสอบถามไปให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบคุณภาพ
- 4) ปรับปรุงข้อคำถาม และกำหนดเกณฑ์ในการแปลความหมาย จนได้แบบสอบถามจำนวน 23 ข้อ แบ่งระดับความพึงพอใจเป็น 5 ระดับ คือ มากที่สุด มาก ปานกลาง น้อย และน้อยที่สุด โดยมีเกณฑ์ในการแปลความหมาย ดังนี้

ค่าเฉลี่ยคะแนนระหว่าง 5.00 – 4.51 หมายถึง มีความพึงพอใจอยู่ในระดับ มากที่สุด

ค่าเฉลี่ยคะแนนระหว่าง 4.50 – 3.51 หมายถึง มีความพึงพอใจอยู่ในระดับ มาก

ค่าเฉลี่ยคะแนนระหว่าง 3.50 – 2.51 หมายถึง มีความพึงพอใจอยู่ในระดับ ปานกลาง

ค่าเฉลี่ยคะแนนระหว่าง 2.50 – 1.51 หมายถึง มีความพึงพอใจอยู่ในระดับ น้อย

ค่าเฉลี่ยคะแนนระหว่าง 1.50 – 1.00 หมายถึง มีความพึงพอใจอยู่ในระดับ น้อยที่สุด

3.2 ขั้นหาประสิทธิภาพ

นำบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตรไปหาประสิทธิภาพ โดยการนำไปทดสอบกับนักศึกษา ชั้นปีที่ 1 ปีการศึกษา 2550 ที่ลงทะเบียนเรียนวิชาแคลคูลัส 2 สำหรับวิศวกร (รหัสวิชา 13-011-142)

- 3.2.1 ทดสอบแบบเดี่ยว โดยทดสอบกับนักศึกษาระดับปริญญาตรี ชั้นปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2/2550 คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ จำนวน 3 คน โดยคัดเลือกจากนักศึกษาที่มีคะแนนพื้นฐานทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ อย่างละ 1 คน เพื่อตรวจสอบข้อบกพร่องต่างๆ เช่น ความชัดเจนของภาษา ลำดับขั้นตอนของเนื้อหา เป็นต้น
- 3.2.2 ทดสอบแบบกลุ่มเล็ก โดยทดสอบกับนักศึกษาระดับปริญญาตรี ชั้นปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2/2550 คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ จำนวน 9 คน โดยคัดเลือกเฉพาะนักศึกษาที่มีคะแนนพื้นฐานทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ อย่างละ 3 คน เพื่อตรวจสอบ ความเหมาะสมของภาษา เนื้อหา ตลอดจนการวัดและประเมินผล
- 3.2.3 การทดลองภาคสนาม โดยทดลองกับนักศึกษาระดับปริญญาตรี ชั้นปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2/2550 สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ จำนวน 30 คน เพื่อทดสอบประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร

4. การวิเคราะห์ข้อมูล

- 4.1 หาประสิทธิภาพของสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตรด้วยค่า E_1/E_2 ตามเกณฑ์ 80/80
- 4.2 วิเคราะห์ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ด้วยค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

5. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

- 5.1 สถิติที่ใช้ในการหาประสิทธิภาพของสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ใช้ E_1/E_2
- 5.2 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ใช้ $\bar{X}$, S



บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยเรื่อง “การพัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร” สำหรับนักศึกษา
ระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ มีวัตถุประสงค์เพื่อ

1. พัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร
2. หาประสิทธิภาพของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร
3. หาความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร

ผู้วิจัยขอเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล โดยแบ่งเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของ คอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์หาความพึงพอใจของนักศึกษาที่เรียนด้วยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับ
บททวนเรื่องปริมาตร

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร

การวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวน เรื่องปริมาตร ใช้การ
วิเคราะห์ประสิทธิภาพของกระบวนการ (E_1) กับผลลัพธ์ (E_2) จากขั้นตอนการทดสอบประสิทธิภาพ
ดังนี้

1. การทดสอบแบบเดี่ยว
2. การทดสอบแบบกลุ่มเล็ก
3. การทดสอบแบบภาคสนาม

ผลการวิเคราะห์เป็นดังนี้

1. ผลการวิเคราะห์ประสิทธิภาพจากการทดสอบแบบเดี่ยว

การวิเคราะห์ประสิทธิภาพจากการทดสอบแบบเดี่ยวในแต่ละเนื้อหา ปรากฏผลดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการ (E_1) กับผลลัพธ์ (E_2) จากการทดสอบแบบเดี่ยว

เนื้อหา	E_1	E_2	$(E_1 / E_2 = 80 / 80)$
บททวนการเขียนรูป	75.00	73.24	ไม่ผ่าน / ไม่ผ่าน
บททวนการหาปริพันธ์	72.39	71.45	ไม่ผ่าน / ไม่ผ่าน
ปริมาตร	74.14	71.32	ไม่ผ่าน / ไม่ผ่าน

จากตารางที่ 4.1 ประสิทธิภาพของกระบวนการ กับผลลัพธ์ของทุกเนื้อหาการเรียนไม่เป็นไปตามเกณฑ์ โดยมีค่าประสิทธิภาพของกระบวนการ (E_1) สูงกว่าผลลัพธ์ (E_2) สำหรับ E_1 ที่มีค่าสูงกว่า เนื่องจากผู้เรียนมีเวลาในการศึกษา และมีเวลาในการทำแบบฝึกหัดมากกว่า ส่วน E_2 มีค่าน้อยกว่า เนื่องจากผู้เรียนมีเวลาในการทำแบบทดสอบจำกัด ทำให้ทำคะแนนได้น้อยกว่า

2. ผลการวิเคราะห์ประสิทธิภาพจากการทดสอบแบบกลุ่มเล็ก

การวิเคราะห์ประสิทธิภาพจากการทดสอบแบบกลุ่มเล็กในแต่ละเนื้อหา ปรากฏผลดังตาราง 4.2 ตารางที่ 4.2 ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการ (E_1) กับผลลัพธ์ (E_2) จากการทดสอบแบบกลุ่มเล็ก

เนื้อหา	E_1	E_2	$(E_1 / E_2 = 80 / 80)$
ทบทวนการเขียนรูป	80.15	80.31	ผ่าน / ผ่าน
ทบทวนการหาปริพันธ์	77.47	75.38	ไม่ผ่าน / ไม่ผ่าน
ปริมาตร	78.75	77.45	ไม่ผ่าน / ไม่ผ่าน

จากตารางที่ 4.2 ประสิทธิภาพของกระบวนการทางการเรียนเรื่องทบทวนการเขียนรูป และประสิทธิภาพของผลลัพธ์ทางการเรียนเรื่องทบทวนการเขียนรูป เป็นไปตามเกณฑ์ ส่วนประสิทธิภาพของกระบวนการทางการเรียนเรื่องทบทวนการหาปริพันธ์ และการหาปริมาตรกับประสิทธิภาพของผลลัพธ์ทางการเรียนเรื่องทบทวนการหาปริพันธ์ และการหาปริมาตร ไม่เป็นไปตามเกณฑ์ เนื่องจากแบบฝึกหัดเรื่องทบทวนการหาปริพันธ์ และการหาปริมาตรในคอมพิวเตอร์ช่วยสอน และแบบทดสอบวัดผลหลังเรียนเรื่องทบทวนการหาปริพันธ์ และการหาปริมาตร ค่อนข้างยาก จึงได้มีการปรับเนื้อหาในแบบฝึกหัดระหว่างฝึกทำในคอมพิวเตอร์ช่วยสอนและแบบทดสอบหลังเรียนใหม่อีกครั้ง แล้วนำไปทดลองภาคสนาม

3. ผลการวิเคราะห์ประสิทธิภาพจากการทดสอบแบบภาคสนาม

การวิเคราะห์ประสิทธิภาพจากการทดสอบแบบภาคสนามในแต่ละเนื้อหา ปรากฏผลดังตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการ (E_1) กับผลลัพธ์ (E_2) จากการทดสอบแบบภาคสนาม

เนื้อหา	E_1	E_2	$(E_1 / E_2 = 80 / 80)$
ทบทวนการเขียนรูป	83.45	82.68	ผ่าน / ผ่าน
ทบทวนการหาปริพันธ์	80.74	81.25	ผ่าน / ผ่าน
ปริมาตร	80.95	81.22	ผ่าน / ผ่าน

จากตารางที่ 4.3 ประสิทธิภาพของกระบวนการ กับผลลัพธ์ทางการเรียนเนื้อหา เรื่องทบทวนการเขียนรูป ทบทวนการหาปริพันธ์ และการหาปริมาตร เป็นไปตามเกณฑ์

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์หาความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร

การวิเคราะห์ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ปรากฏผลดังตารางที่ 4.4

ตารางที่ 4.4 ค่าเฉลี่ยความพึงพอใจของนักศึกษา ที่มีต่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร

ข้อที่	รายการ	$\bar{X}$	SD.	ความหมาย
	ด้านภาษา	3.99		มาก
1	ภาษาที่ใช้ในเนื้อหาและแบบทดสอบเรื่อง“บททวนการเขียนรูป” มีความชัดเจน เข้าใจง่าย	4.38	0.33	มาก
2	ภาษาที่ใช้ในเนื้อหาและแบบทดสอบเรื่อง“บททวนการหาปริพันธ์” มีความชัดเจน เข้าใจง่าย	4.12	0.55	มาก
3	ภาษาที่ใช้ในเนื้อหาและแบบทดสอบเรื่อง “การใส่ลิมิตปริพันธ์สองชั้น” มีความชัดเจน เข้าใจง่าย	3.95	0.23	มาก
4	ภาษาที่ใช้ในเนื้อหาและแบบทดสอบเรื่อง “การหาปริมาตร โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดฉาก” มีความชัดเจน เข้าใจง่าย	3.52	0.78	มาก
	ด้านรูปแบบคอมพิวเตอร์ช่วยสอน	4.62		มากที่สุด
5	คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในการนำเสนอเนื้อหาที่มีความน่าสนใจ	4.58	0.24	มากที่สุด
6	คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในการนำเสนอแบบทดสอบมีความน่าสนใจ	4.65	0.35	มากที่สุด
	ด้านเนื้อหา	3.90		มาก
7	เนื้อหาเรื่อง “บททวนการเขียนรูป” ทำให้มีความเข้าใจในเรื่องนี้ดีขึ้น	4.34	0.35	มาก
8	เนื้อหาเรื่อง “บททวนการหาปริพันธ์” ทำให้มีความเข้าใจในเรื่องนี้ดีขึ้น	3.54	0.48	มาก
9	เนื้อหาเรื่อง “การใส่ลิมิตปริพันธ์สองชั้น” ทำให้มีความเข้าใจในการใส่ลิมิต	3.58	0.71	มาก
10	เนื้อหาเรื่อง “การหาปริมาตรในระบบพิกัดฉาก” ทำให้มีความเข้าใจในเรื่องการหาปริมาตร	3.59	0.82	มาก

ข้อที่	รายการ	$\bar{X}$	SD.	ความหมาย
11	การได้รับความรู้จากเนื้อหาเรื่อง “บททวนการเขียนรูป” มีประโยชน์	4.12	0.26	มาก
12	การได้รับความรู้จากเนื้อหาเรื่อง “บททวนการหาปริพันธ์” มีประโยชน์	4.15	0.49	มาก
13	การได้รับความรู้จากเนื้อหาเรื่อง “การใส่ลิมิตปริพันธ์สองชั้นระบบพิกัดฉาก” มีประโยชน์	4.01	0.61	มาก
14	การได้รับความรู้จากเนื้อหาเรื่อง “การหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้นระบบพิกัดฉาก” มีประโยชน์	3.87	0.81	มาก
	ด้านแบบทดสอบ	4.59		มากที่สุด
15	แบบทดสอบเรื่อง “บททวนการเขียนรูป” ทำให้มีความพร้อมในการเรียนเรื่องการหาปริมาตรมากขึ้น	4.72	0.28	มากที่สุด
16	แบบทดสอบเรื่อง “บททวนการหาปริพันธ์” ทำให้มีความพร้อมในการเรียนเรื่องการหาปริมาตรมากขึ้น	4.59	0.58	มากที่สุด
17	แบบทดสอบเรื่อง “การใส่ลิมิตปริพันธ์สองชั้นระบบพิกัดฉาก” ทำให้มีความพร้อมในการสอบ	4.61	0.72	มากที่สุด
18	แบบทดสอบเรื่อง “การหาปริมาตรในระบบพิกัดฉาก” ทำให้มีความพร้อมในการสอบ	4.42	0.81	มาก
	ด้านอื่นๆ	4.23		มาก
19	การรู้วัตถุประสงค์ของเนื้อหาที่มีประโยชน์	4.25	0.39	มาก
20	หลังจากใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน นักศึกษามีความสามารถในระดับใด	3.99	0.62	มาก
21	การเรียนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน มีประโยชน์ในระดับใด	4.50	0.44	มาก
22	นักศึกษาชอบการทบทวนและการเรียนด้วยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้ในระดับใด	4.92	0.43	มากที่สุด
23	การใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้ช่วยให้ทำข้อสอบได้	3.78	0.78	มาก
	รวม	4.27		มาก

จากตารางที่ 4.4 แสดงว่านักศึกษามีความพึงพอใจต่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับ ทบทวนเรื่อง ปริมาตร ในภาพรวมอยู่ในระดับมาก และเมื่อพิจารณาในแต่ละด้าน พบว่านักศึกษามีความพึงพอใจในด้าน ภาษาที่ใช้ในเนื้อหาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนทุกเรื่อง รวมทั้งภาษาที่ใช้ในแบบทดสอบอยู่ในระดับมาก ในด้าน รูปแบบคอมพิวเตอร์ช่วยสอนทำให้การนำเสนอทั้งเนื้อหา และแบบทดสอบมีความน่าสนใจ นักศึกษามีความ พึงพอใจในด้านนี้อยู่ในระดับมากที่สุด ทำให้ภาพรวมในด้านนี้อยู่ในระดับมากที่สุด สำหรับด้านเนื้อหาที่นำเสนอ ทำให้มีความเข้าใจในเรื่องนั้นดีขึ้น โดยรวมนักศึกษามีความพอใจอยู่ในระดับมาก และในแต่ละด้าน ย่อยนักศึกษามีความพอใจอยู่ในระดับมากที่สุดทั้งหมด ในด้านต่อไปคือด้าน แบบทดสอบ โดยภาพรวม นักศึกษามีความพอใจอยู่ในระดับมากที่สุด และเมื่อพิจารณาในแต่ละด้านย่อยพบว่า แบบทดสอบเรื่อง ทบทวนการเขียนรูป แบบทดสอบเรื่องการหาปริพันธ์ และแบบทดสอบเรื่องการใส่ลิมิตปริพันธ์สองชั้น ระบบฝึกคิดจาก ทำให้นักศึกษามีความพร้อมในการเรียนแต่ละเรื่องอยู่ในระดับมากที่สุด ส่วนแบบทดสอบ เรื่องการหาปริมาตรในระบบฝึกคิดจาก ทำให้มีความพร้อมในการสอบอยู่ในระดับมาก สำหรับด้านสุดท้าย คือด้านอื่นๆ นักศึกษามีความพอใจในภาพรวมอยู่ในระดับมาก โดยแต่ละด้านย่อยมีความพึงพอใจแตกต่างกันบ้าง คือในด้านการรู้วัตถุประสงค์ของเนื้อหาทำให้มีประโยชน์ ในด้านหลังจากใช้คอมพิวเตอร์ช่วย สอนเรื่องนี้แล้วทำให้นักศึกษามีความสามารถมากขึ้น ในด้านการเรียนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนมี ประโยชน์ และในด้านการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้ช่วยให้ทำข้อสอบได้ ในด้านเหล่านี้ นักศึกษามี ความพึงพอใจอยู่ในระดับมาก สำหรับในด้านความชอบการทบทวนและการเรียนด้วยคอมพิวเตอร์ช่วยสอน นักศึกษามีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากที่สุด

บทที่ 5

สรุปการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

1. สรุปการวิจัย

1.1 วัตถุประสงค์การวิจัย

- 1.1.1 พัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร
- 1.1.2 หาประสิทธิภาพของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร
- 1.1.3 หาความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร

1.2 วิธีดำเนินการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการทดลอง เป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรี ปีการศึกษา 2550 คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ และกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการหาประสิทธิภาพของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร เป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ ภาคเรียนที่ 2/2550 จำนวน 12 คน ส่วนกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองภาคสนาม สุ่มมาจากประชากรที่เป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาคเรียนที่ 2/2550 ในชั้นเรียนปกติ จำนวน 30 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหา 3 หน่วยเรียน ได้แก่การบททวนการเขียนรูป 2 มิติ และ 3 มิติ การบททวนการหาปริพันธ์ และการหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้นระบบฝึกคิดจาก แบบทดสอบพื้นฐานก่อนเรียน แบบทดสอบหลังเรียนเรื่องการหาปริมาตร และแบบสอบถามความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ผู้วิจัยได้ทดสอบประสิทธิภาพของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร แบบเดี่ยว แบบกลุ่มเล็ก และแบบภาคสนาม แล้วรวบรวมข้อมูลนำไปวิเคราะห์หาประสิทธิภาพคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ด้วยการวิเคราะห์ประสิทธิภาพของกระบวนการ (E_1) กับผลลัพธ์ (E_2) และวิเคราะห์ความพึงพอใจของผู้เรียนที่เรียนด้วยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ด้วยค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

1.3 ผลการวิจัย

- 1.3.1 สื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ที่มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 80/80 ได้แก่ บททวนการเขียนรูป (83.45 / 82.68) บททวนการหาปริพันธ์ (80.74 / 81.25) และการหาปริมาตร (80.95 / 81.22)

1.3.2 ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ในภาพรวม อยู่ในระดับมาก และสำหรับในแต่ละด้านย่อยๆพบว่า นักศึกษามีความพึงพอใจในด้านภาษาที่ใช้ในเนื้อหาซึ่งทำให้มีความเข้าใจในการเรียนเรื่องการหาปริมาตร อยู่ในระดับมาก และมีความพึงพอใจในด้านอื่นๆ อยู่ในระดับมากเช่นเดียวกัน ส่วนในด้านรูปแบบคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ช่วยทำให้การนำเสนอเนื้อหาและแบบทดสอบมีความน่าสนใจ และในด้านแบบทดสอบ ทำให้มีความพร้อมในการสอบ นักศึกษามีความพึงพอใจในด้านทั้งสองนี้อยู่ในระดับมากที่สุด

2. อภิปรายผลการวิจัย

2.1 สื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 80/80 ซึ่งสาเหตุสำคัญที่ทำให้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตรนี้มีประสิทธิภาพ เพราะอาศัยหลักการและกระบวนการสร้าง ดังนี้

2.1.1 หลักการและรูปแบบการพัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร และแบบทดสอบ มีหลักการพัฒนาประกอบด้วย 4 องค์ประกอบ ดังนี้

- 1) ความตระหนักในคุณค่าของการฝึกทำโจทย์
- 2) ฝึกทำเพื่อให้เกิดทักษะ
- 3) รู้ผลการทำแบบทดสอบทันที
- 4) ฝึกทำแบบทดสอบอย่างต่อเนื่อง

จากหลักการดังกล่าว นำมาพัฒนาเป็นรูปแบบการพัฒนา 5 ขั้นตอน ดังนี้

- 1) สร้างแรงจูงใจด้วยการบอกวัตถุประสงค์
- 2) ให้รู้เทคนิคจากใบความรู้
- 3) ฝึกทำแบบทดสอบแต่ละเรื่องด้วยตนเองจากคอมพิวเตอร์
- 4) รู้ผลการฝึกทำแบบทดสอบทันทีจากคอมพิวเตอร์
- 5) ฝึกซ้ำ

2.1.2 กระบวนการสร้างและพัฒนาเนื้อหาและแบบทดสอบในเรื่องการหาปริมาตร

การสร้างเนื้อหาในแต่ละเรื่อง และแบบทดสอบในเรื่องการหาปริมาตรนั้นได้ใช้วิธีการระดมความคิดร่วมกันระหว่างอาจารย์ที่มีประสบการณ์ในการสอนวิชาแคลคูลัส และผู้ทรงคุณวุฒิที่มีความรู้ความสามารถด้านการสอนและเนื้อหาในแต่ละเรื่อง จนได้แนวทางที่ชัดเจน ในด้านโครงสร้าง รูปแบบแนวทางการเสนอเนื้อหา การสร้างแบบทดสอบ และการประเมินผล จากนั้นจึงนำไปทดสอบประสิทธิภาพโดยการทดสอบแบบเดี่ยว และแบบกลุ่มเล็ก ซึ่งในแต่ละขั้นตอนนี้ได้ใช้กลุ่มตัวอย่างที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ ในสัดส่วน ดังนี้

- 1) ทดสอบแบบเดี่ยว สูง : ปานกลาง : ต่ำ เป็น 1 : 1 : 1
- 2) ทดสอบแบบกลุ่มเล็ก สูง : ปานกลาง : ต่ำ เป็น 3 : 3 : 3

จากการทดสอบแบบเดี่ยวพบว่า เนื้อหาทั้ง 3 เรื่อง มีประสิทธิภาพ ไม่เป็นไปตามเกณฑ์ จึงมีการปรับปรุงด้านเนื้อหา คำถามของโจทย์ และเวลา แล้วนำไปทดสอบแบบกลุ่มเล็ก และทดลองภาคสนาม จนได้ประสิทธิภาพตามเกณฑ์ทุกเรื่อง

2.2 นักศึกษามีความเห็นว่ สื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตรนี้เป็นสื่อที่น่าสนใจ ภาษาที่ใช้มีความชัดเจนและเข้าใจง่าย เนื้อหาในเรื่องบททวนการเขียนรูป บททวนการหาปริพันธ์ และการหาปริมาตร ทำให้เข้าใจง่าย กระบวนการสรุปและแบบทดสอบในแต่ละเรื่องมีความเหมาะสมมาก การรู้วัตถุประสงค์ก่อนเรียนเนื้อหา ทำให้ได้รับความรู้ครอบคลุมเนื้อหาและประเด็นสำคัญอย่างมีขั้นตอนที่ชัดเจน และในการทำแบบทดสอบ นักศึกษาจะรู้ผลทันทีและสามารถทำซ้ำกี่ครั้งก็ได้ การได้ฝึกทำแบบทดสอบ ทำให้นักศึกษามีความพร้อมที่จะทำการสอบจริง และสามารถทำข้อสอบได้ ทำให้นักศึกษามีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น ทั้งนี้ พบว่านักศึกษามีความสนใจและกระตือรือร้นในการดูเนื้อหาและฝึกทำแบบทดสอบจากคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร

3. ข้อเสนอแนะในการวิจัย

3.1 การนำผลวิจัยไปใช้

3.1.1 จากผลการวิจัยพบว่า รูปแบบของการพัฒนาสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ดังนี้ 1) สร้างแรงจูงใจด้วยการบอกวัตถุประสงค์ 2) ให้ความรู้และเทคนิค 3) ฝึกทำแบบทดสอบแต่ละเรื่องด้วยตนเองจากคอมพิวเตอร์ 4) รู้ผลการฝึกทำแบบทดสอบทันทีจากคอมพิวเตอร์ 5) ฝึกซ้ำได้ จากรูปแบบที่ค้นพบนี้ สามารถนำไปพัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับวิชาอื่นๆ และโครงสร้างของเนื้อหาและแบบทดสอบควรประกอบด้วยวัตถุประสงค์ของการฝึก กระบวนการฝึก และการปฏิบัติกิจกรรมตามขั้นตอน

3.1.2 การที่จะใช้บทสรุปเนื้อหา และแบบทดสอบในแต่ละเรื่องให้มีประสิทธิผล และมีประสิทธิภาพ บุคคลที่จะช่วยให้บรรลุเป้าหมายดังกล่าว ได้แก่ นักวิชาการ อาจารย์ผู้มีประสบการณ์การสอน ซึ่งจะร่วมกันสร้างแบบทดสอบให้มีความหลากหลายและครบตามจุดประสงค์ สถานศึกษามีนโยบายการพัฒนาทักษะการเรียนรู้และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเพื่อสนองตามพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติที่มุ่งให้นักศึกษาเรียนได้ด้วยตนเอง ผู้บริหารให้การสนับสนุนเงินทุน วัสดุอุปกรณ์ และกำลังใจแก่ผู้สอน และผู้ผลิตสื่อสามารถสื่อให้นักศึกษาเข้าใจได้

3.2 ข้อเสนอแนะในการวิจัยต่อไป

3.2.1 ควรจะมีการพัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในวิชาแคลคูลัสเรื่องอื่นๆ และหลักสูตรของสาขาอื่นๆ เช่น สาขาทางวิศวกรรมศาสตร์ สาขาทางบริหารธุรกิจ และสาขาทางศิลปศาสตร์ เป็นต้น

3.2.2 ควรจะมีการพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้สื่อในลักษณะอื่นๆ เช่น วิดีทัศน์ เทปเสียง และสื่อผสม เป็นต้น

บรรณานุกรม

- คณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ และกระทรวงศึกษาธิการ ปฏิรูปการเรียนรู้ ผู้เรียนสำคัญที่สุด
กรุงเทพมหานคร บริษัทพิมพ์ดีดจำกัด 2543
- คณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ สำนักงาน แนวการจัดการศึกษา ตามพระราชบัญญัติการศึกษา
แห่งชาติ พ.ศ. 2542 สถาบันแห่งชาติเพื่อปฏิรูปการเรียนรู้ สำนักงานคณะกรรมการการศึกษา
แห่งชาติ 2542
- จารึก ศรีคุณโน. 2535 การศึกษา การแก้ปัญหา การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนที่ผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนสูง. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท. มหาวิทยาลัยขอนแก่น , ขอนแก่น.
- อนอมพร เลาหจรัสแสง. 2541. คอมพิวเตอร์ช่วยสอน. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.
- นงนุช วรรณนวะ. 2538. คอมพิวเตอร์ศึกษาในระดับโรงเรียน. คณะกรรมการแห่งชาติว่าด้วยการศึกษา
สหประชาชาติ 27 มกราคม-มีนาคม 2538. 43-52 น.
- ฝนทิพย์ อมาตยกุล. 2531. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนรู้
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท.
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร, กรุงเทพฯ.
- ยุพิน พิพิธกุล. 2539. การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. บริษัทการพิมพ์, กรุงเทพฯ.
- วีระ ไทยพรนิข. “บทบาทและปัญหาของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน” ในรวมบทความเทคโนโลยี
ทางการศึกษา หน้า 9-19 กรุงเทพฯ ศูนย์เทคโนโลยีทางการศึกษา กรมการศึกษานอกโรงเรียน
กระทรวงศึกษาธิการ 2527.
- ศึกษาธิการ, กระทรวง พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 สำนักงานปลัดกระทรวง
กระทรวงศึกษาธิการ กรุงเทพฯ โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว 2542.
- สันต์ชัย เปี่ยมจุฬา. 2535. การวิเคราะห์เนื้อหาและปัญหาการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ช่วงอุตสาหกรรม
ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยานิพนธ์ ปริญญาโท.
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.
- อัศวฤดี จินคานุรักษ์. 2547. การพัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับเตรียมสอบวิชาแคลคูลัส
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ กรุงเทพฯ.
- Alessi, Stephen M., Trollip, Stanley R. Computer-Based Instruction : Methods and
Development. Second edition., New Jersey, Pentice-Hall, Inc.,k 1991.
- Collins, Thomas, JR. 1997. “The Effects of Computer-Assisted Algebra Instruction on
Achievement, Mathematics Anxiety Levels and Attitudes Toward Personal Use
of Computers of students In an Historically Black University” Dissertation
Abstracts by UMI Company , AAC 9637023, Jan 1997.

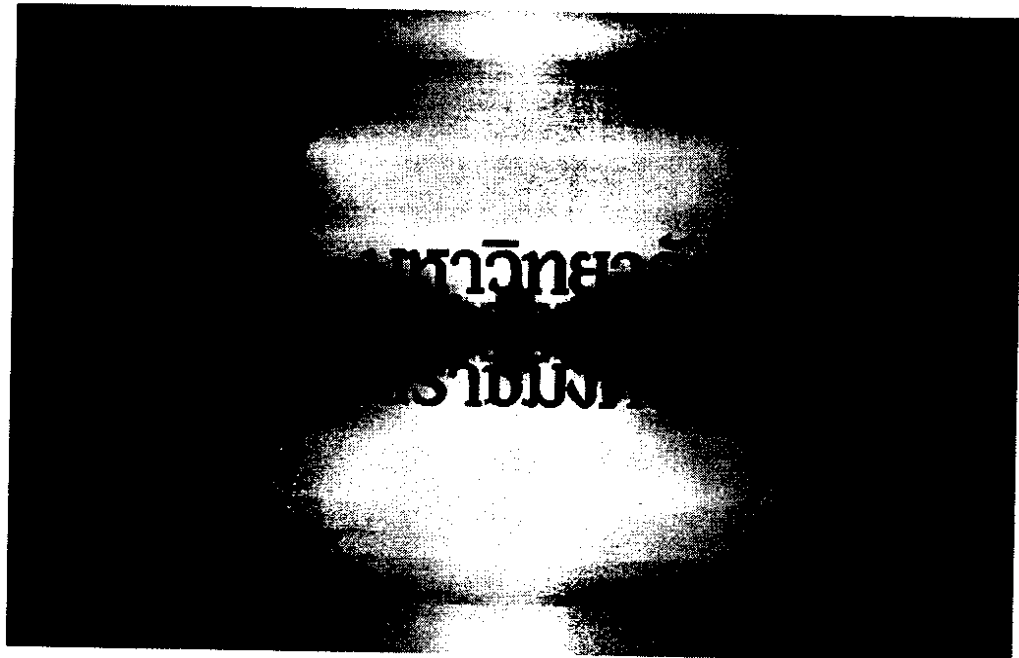
-
- De Cecco, John P., *The Psychology of Learning and Instruction : Educational Psychology*. New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 1968.
- Hall, Keith A. "Computer-Based Education" in *Encyclopedia of Educational Research* 3 :353-363 : 1982.
- Kemp, Jerrold E. 1988. *Planning & Producing Audiovisual Materials*. (6 th ed.) Scranton, Chandler, Pennsylvania.
- Morgan, Alistir. *Improving Your Students Learning Reflections on the Experience of Study*. London : Kogan Page, 1993.
- Rinaldi, Iris Lillian. 1997. *A Study of the Effects of Computer-Assisted Instruction And Teacher Instruction on Achievement in Mathematics* Dissertation Abstracts 1998 by UMI Company, AAC B84652, Oct 1997.
- Smith, Samuel. *Best Methods of Study*. New York : Bamer & Noble, Inc., 1970.
- Teltlock, Katharine Dawn. 1997. *Implementing Computer-Assisted Instruction In the Mathematics Classroom : Effect on Study Attitudes and the Teaching Process*. Dissertation Abstracts 1998 by UMI Company, AAC MM13526, April 1997.

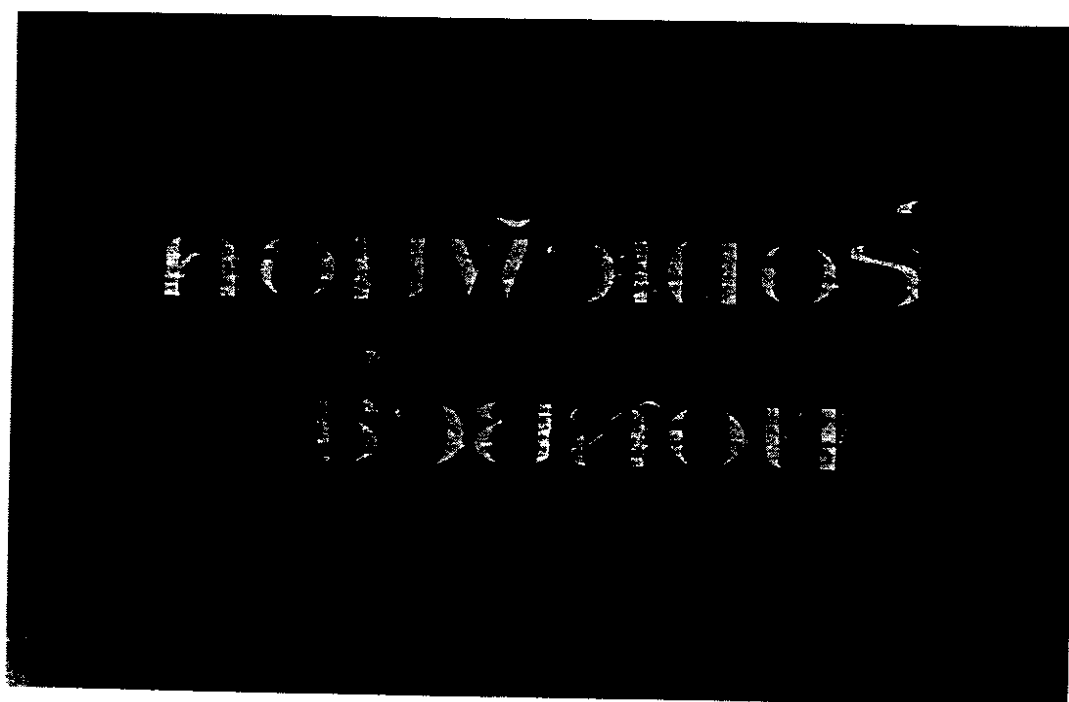
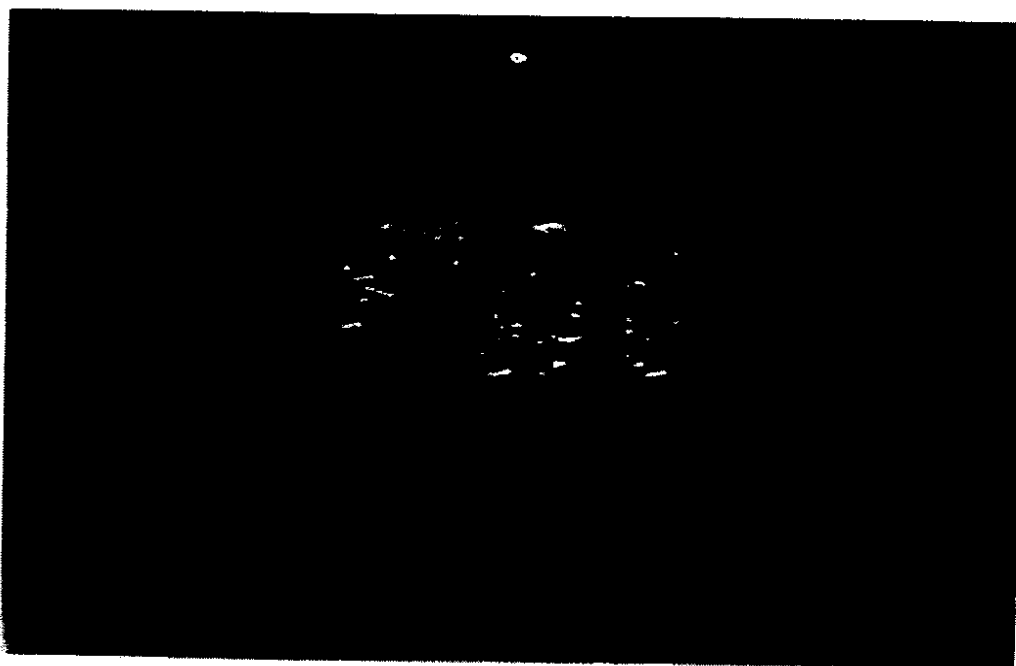


ภาคผนวก

1. ตัวอย่างบทเรียนช่วยสอนเรื่อง “การพัฒนา
คอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่อง
ปริมาตร”
2. สรุปเนื้อหา
 - 2.1 สรุปเนื้อหา “บททวนการเขียนรูป”
 - 2.2 สรุปเนื้อหา “บททวนการหาปริพันธ์”
 - 2.3 สรุปเนื้อหา “การหาปริมาตร”
3. แบบทดสอบ
 - 3.1 แบบทดสอบเรื่อง “บททวนการเขียนรูป”
 - 3.2 แบบทดสอบเรื่อง “บททวนการหา
ปริพันธ์”
 - 3.3 แบบทดสอบเรื่อง “การหาปริมาตร”

1. ตัวอย่างบทเรียนช่วยสอนเรื่อง “การพัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอน สำหรับบททวนเรื่องปริมาตร”





เรื่อง

การขยายตัวของ

โดยใช้บริษัทสองชั้น

โดย

ศาสตราจารย์ ดร. ชัยวัฒน์

คำแนะนำสำหรับ CAI

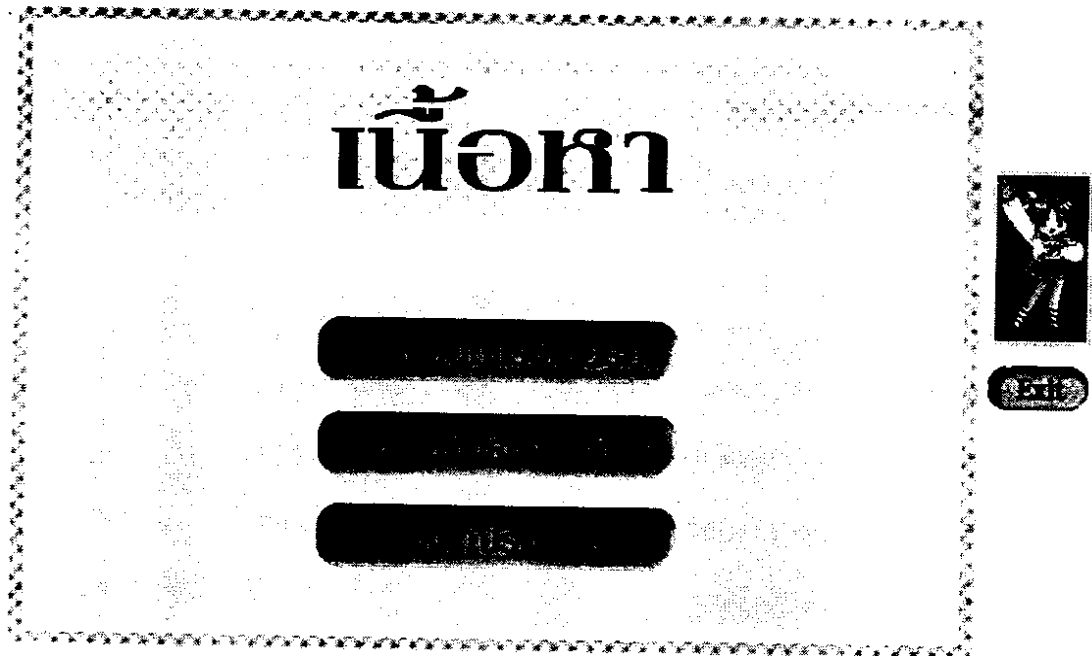
1. ปรับหน้าจอเป็น 800x600 โดยทำดังนี้
Settings → Control Panel → Display → Settings →
ปรับ Screen resolution เป็น 800x600 pixels
2. CAI เรื่องการหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น
 - 2.1 เนื้อหา > ทบทวนการเขียนรูป 2 มิติ และ 3 มิติ
> ทบทวนการหาปริพันธ์ชั้นเดียว และสองชั้น
> การหาปริมาตร
 - 2.2 แบบทดสอบ > การเขียนรูป 2 มิติ และ 3 มิติ
> การหาปริพันธ์ชั้นเดียว และสองชั้น
> การหาปริมาตร
3. ศึกษาเนื้อหา ทำแบบฝึกหัด แล้วทำแบบทดสอบ
หากได้คะแนนไม่เป็นที่น่าพอใจ ให้ศึกษาซ้ำไปเรื่อยๆ

การหาปริมาตร โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

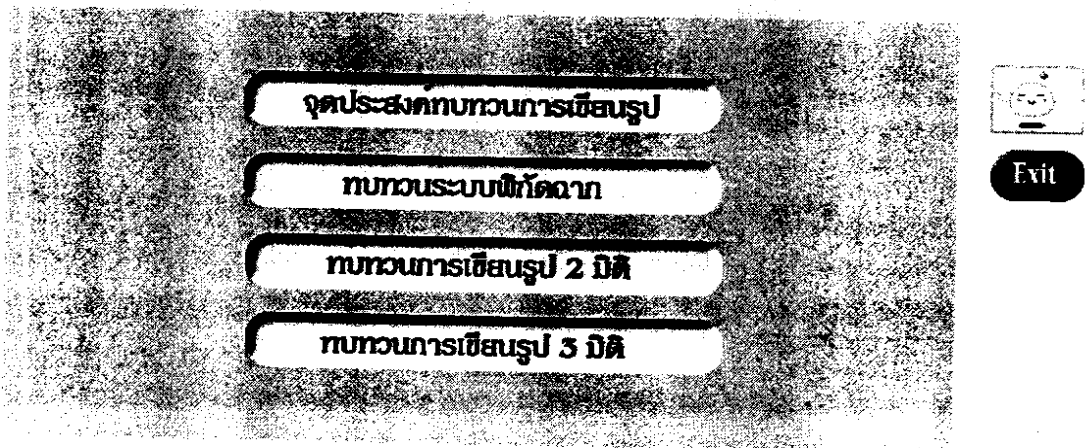
เนื้อหา

ทดสอบ

Exit

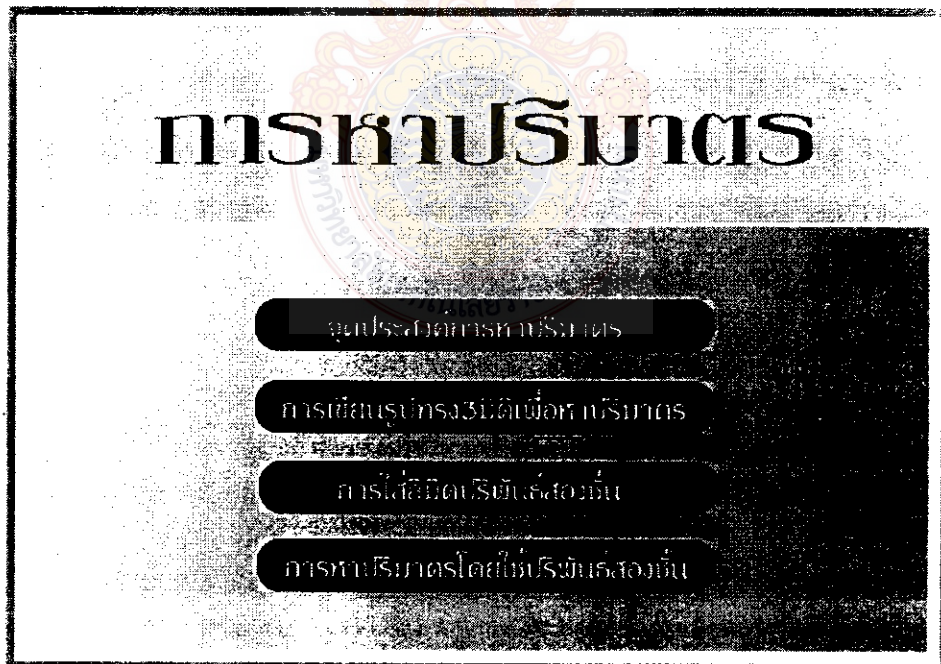


บททวนการเขียนรูป

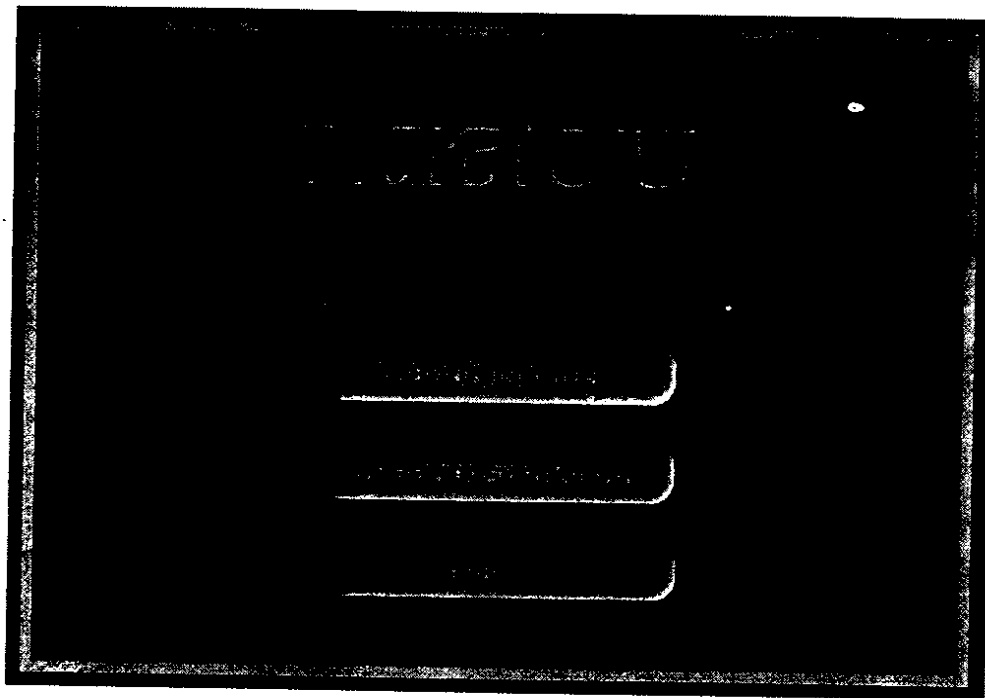




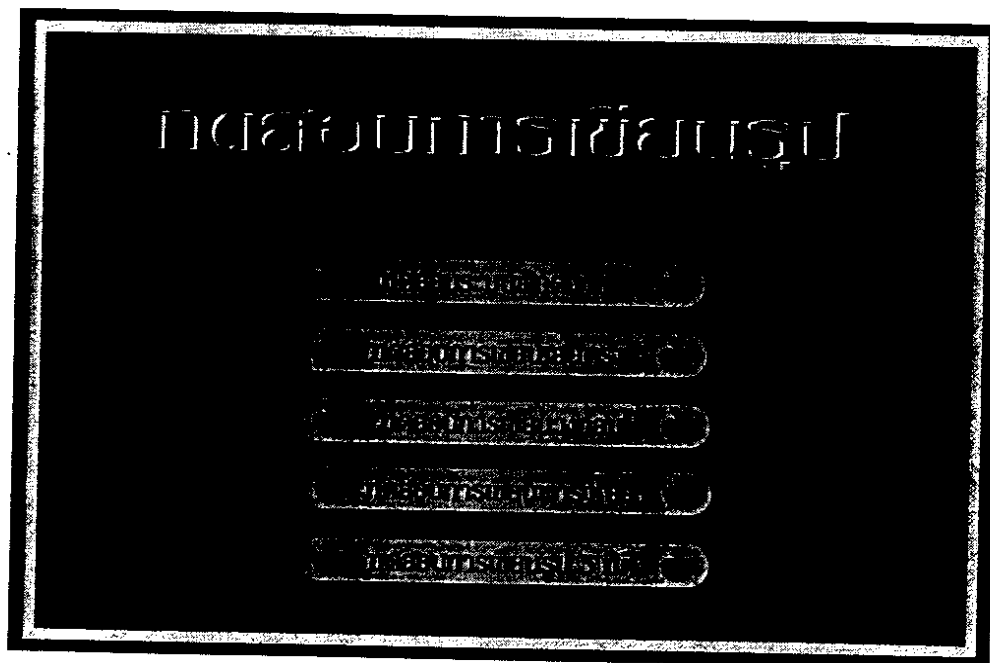
Exit



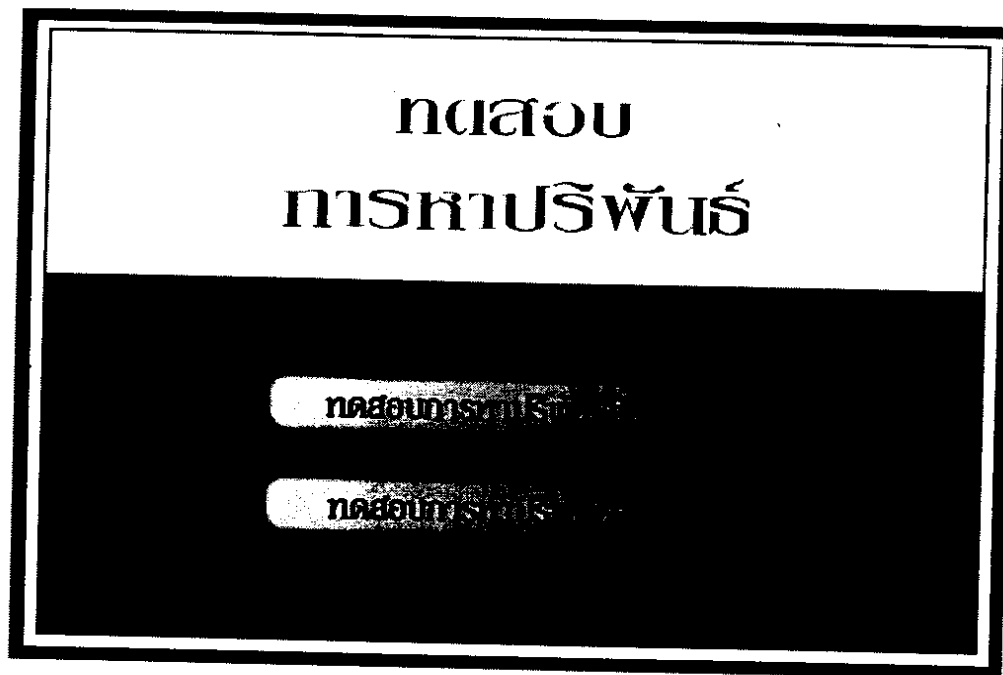
Exit



Exit



Exit



Exit



Exit

ทดสอบเรื่อง "ทบทวนการหาปริพันธ์ชั้นเดียว"

กรุณาพิมพ์ชื่อของท่าน แล้วกด Enter

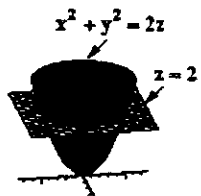
▶ โสรญา

ทดสอบเรื่อง "การหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น"

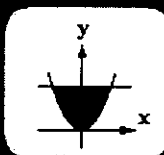
Exit

ตัวอย่างข้อที่ > 1.

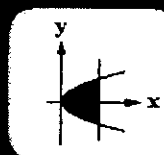
จากรูปที่แสดงให้เห็นว่า ปริมาตรของของตัน $x^2 + y^2 = 2z$
ที่ตัดระนาบ $z = 2$ จะมีการหาปริมาตรของ xy ตรงกับข้อใด



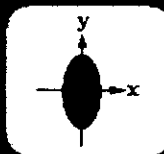
1



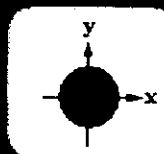
2



3



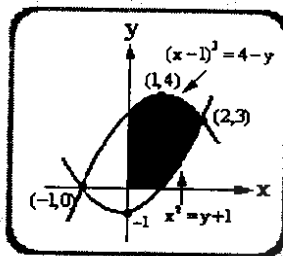
4



ถูกต้อง



คำถามข้อที่ ๖



1 $\int_0^1 \int_0^{(x-1)^2} dy dx + \int_1^3 \int_{x^2}^{(x-1)^2} dy dx$

2 $\int_0^1 \int_0^{-(x-1)^2} dy dx + \int_1^2 \int_{x^2-1}^{-(x-1)^2} dy dx$

3 $\int_0^2 \int_{x^2-1}^{-(x-1)^2} dy dx$

4 $\int_0^3 \int_0^{-(x-1)^2} dy dx$

CAI จบแล้ว

ขอให้โชคดี

2. สรุ₁ป²เนื้อหา



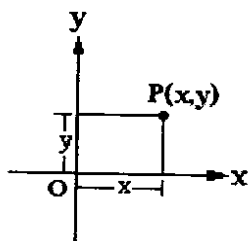
2.1 ทบทวนการเขียนรูป

2.1.1 จุดประสงค์การทบทวนการเขียนรูป

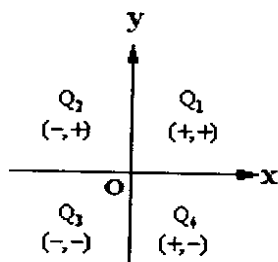
1. บอกส่วนประกอบของระบบพิกัดฉากได้
2. เขียนจุดในระบบพิกัดฉากได้
3. เขียนรูป 2 มิติ ในระบบพิกัดฉากได้
4. เขียนรูป 3 มิติ ในระบบพิกัดฉากได้

2.1.2 ทบทวนระบบพิกัดฉาก

ระบบพิกัดฉากใน 2 มิติ



รูปที่ 1



รูปที่ 2

ระบบพิกัดฉากประกอบด้วย

- แกน x และแกน y ตัดตั้งฉากกัน
- จุดตัดของแกน x และแกน y เรียกว่าจุดกำเนิด(Origin) แทนด้วยจุด O
- ถ้า P เป็นจุดใดๆบนระนาบ โดยที่ P อยู่ห่างจากแกน x เป็นระยะ y หน่วยและอยู่ห่างจากแกน y เป็นระยะ x หน่วย
- ดังนั้นจะเรียกคู่อันดับ (x, y) ว่าเป็นพิกัดฉากของจุด P ดังรูปที่ 1

- ระนาบ xy จะถูกแบ่งเป็นสี่ส่วน

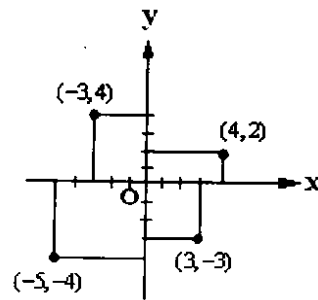
แต่ละส่วนเรียกว่า ควอดรนต์ (Quadrant)

จุด (x, y) ในแต่ละส่วนมีเครื่องหมายของ x, y ต่างกัน ดังรูปที่ 2

- ในควอดรนต์ที่ 1 (Q_1) ค่า x และค่า y เป็นบวก
- ในควอดรนต์ที่ 2 (Q_2) ค่า x เป็นลบและค่า y เป็นบวก
- ในควอดรนต์ที่ 3 (Q_3) ค่า x และค่า y เป็นลบ
- ในควอดรนต์ที่ 4 (Q_4) ค่า x เป็นบวกและค่า y เป็นลบ

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนจุด $(4, 2)$, $(-3, 4)$, $(-5, -4)$, $(3, -3)$

วิธีทำ เขียนจุดต่างๆได้ตามรูปที่ 3



รูปที่ 3

ระบบพิกัดฉากใน 3 มิติ

ระบบพิกัดฉากในปริภูมิ 3 มิติ ประกอบด้วย

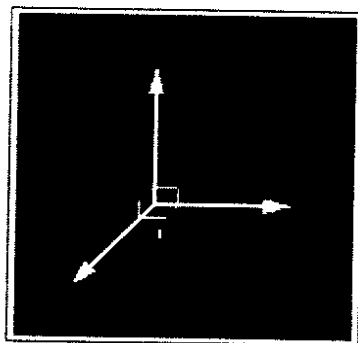
- แกน 3 แกน คือ แกน x และแกน y และแกน z เรียกว่าแกนพิกัด
- แกนพิกัดทั้งสามแกนตัดกันที่จุดคงที่จุดหนึ่ง เรียกว่าจุดกำเนิด (Origin) แทนด้วยจุด O ดังรูปที่ 4
- เมื่อแกนพิกัดทั้งสามแกนตัดกัน จะทำให้เกิดระนาบ 3 ระนาบ เรียกว่าระนาบพิกัด คือ

ระนาบ xy (xy -plane) ประกอบด้วยแกน x และแกน y มีสมการอยู่ในรูป $z = 0$

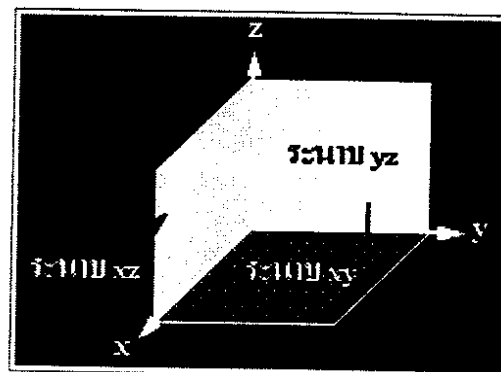
ระนาบ xz (xz -plane) ประกอบด้วยแกน x และแกน z มีสมการอยู่ในรูป $y = 0$

ระนาบ yz (yz -plane) ประกอบด้วยแกน y และแกน z มีสมการอยู่ในรูป $x = 0$

ระนาบทั้งสามจะแบ่งปริภูมิ 3 มิติ ออกเป็น 8 ส่วน แต่ละส่วนเรียก อัฐภาค (Octant)



รูปที่ 4

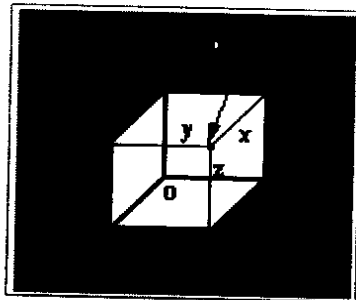


รูปที่ 5

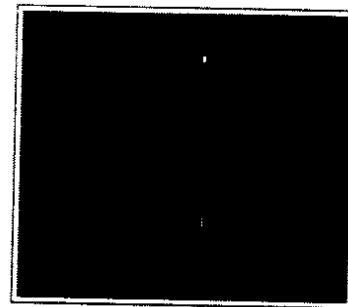
ถ้า $P(x,y,z)$ เป็นจุดในปริภูมิ 3 มิติ แสดงว่าจุด P อยู่ห่างจากระนาบ yz ระนาบ xz และระนาบ xy เป็นระยะ x , y และ z หน่วย ตามลำดับ ดังรูปที่ 6

วิธีเขียนจุด $P(x,y,z)$

- เขียนจุด $(x,y,0)$ บนระนาบ xy โดยวัดระยะตามแนวแกน x ยาว $|x|$ หน่วย แล้วลากเส้นขนานแกน y และวัดระยะตามแนวแกน y ยาว $|y|$ หน่วย แล้วลากเส้นขนานแกน x จะได้จุด $(x,y,0)$
- จากจุด $(x,y,0)$ ลากเส้นขนานแกน z ยาว $|z|$ หน่วย จะได้จุดปลายเส้นตรงนี้คือจุด $P(x,y,z)$ ดังรูปที่ 7



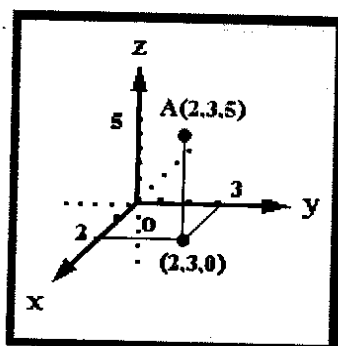
รูปที่ 6



รูปที่ 7

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนจุด $A(2,3,5)$

วิธีทำ

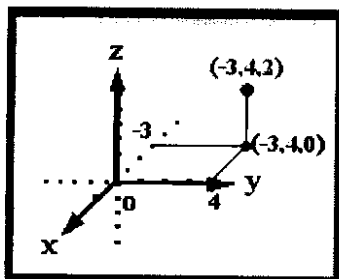


รูปที่ 8

- วัดระยะตามแนวแกน x ไปทางเส้นที่ 2 หน่วย แล้วลากเส้นขนานแกน y
- วัดระยะตามแนวแกน y ไปทางเส้นที่ 3 หน่วย แล้วลากเส้นขนานแกน x จะได้จุด $(2,3,0)$ บนระนาบ xy
- จากจุด $(2,3,0)$ ลากเส้นขนานแกน z ไปทางเส้นที่ 5 หน่วย จะได้จุด $(2,3,5)$ ดังรูปที่ 8

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนจุด $B(-3,4,2)$

วิธีทำ

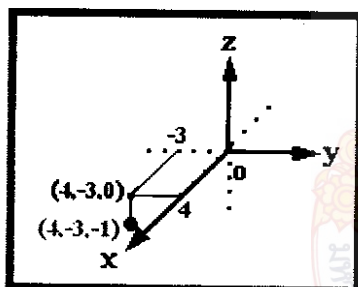


รูปที่ 9

- วัดระยะตามแนวแกน x ไปทางเส้นประ 3 หน่วย
แล้วลากเส้นขนานแกน y
- วัดระยะตามแนวแกน y ไปทางเส้นทึบ 4 หน่วย
แล้วลากเส้นขนานแกน x จะได้จุด $(-3, 4, 0)$ บนระนาบ xy
- จากจุด $(-3, 4, 0)$ ลากเส้นขนานแกน z ไปทางเส้นทึบยาว
2 หน่วย จะได้จุด $(-3, 4, 2)$ ดังรูปที่ 9

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนจุด $C(4,-3,-1)$

วิธีทำ



รูปที่ 10

- วัดระยะตามแนวแกน x ไปทางเส้นทึบ 4 หน่วย
แล้วลากเส้นขนานแกน y
- วัดระยะตามแนวแกน y ไปทางเส้นประ 3 หน่วย
แล้วลากเส้นขนานแกน x จะได้จุด $(4, -3, 0)$ บนระนาบ xy
- จากจุด $(4, -3, 0)$ ลากเส้นขนานแกน z ไปทางเส้นประยาว
1 หน่วย จะได้จุด $(4, -3, -1)$ ดังรูปที่ 10

2.1.3 ทบทวนการเขียนรูป 2 มิติ

ในการหาปริมาตร จำเป็นต้องมีการเขียนรูป 2 มิติ โดยจะเขียนในลักษณะวิเคราะห์จากสมการ ซึ่งจะได้อุปกรณ์ที่ไม่ละเอียดนัก แต่รวดเร็ว รูปที่ควรทราบและพบบ่อยๆคือ

1. เส้นตรง
2. วงกลม
3. พาราโบลา

เส้นตรง

สมการเส้นตรง

สมการทั่วไปของเส้นตรงคือ $Ax + By = C$ เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัว

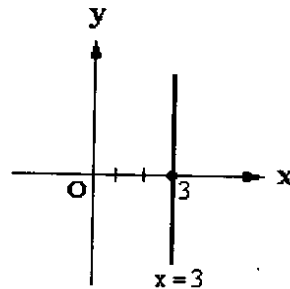
สมการเส้นตรง $Ax + By = C$		
ถ้า	รูปแบบสมการ	ลักษณะเส้นตรง
$B = 0, C = 0$	$x = 0$	แกน y
$A = 0, C = 0$	$y = 0$	แกน x
$A = 0$	$y = \frac{C}{B}$ หรือ $y = d_1$	ขนานแกน x และอยู่ห่างจากแกน x เป็นระยะ d_1 หน่วย
$B = 0$	$x = \frac{C}{A}$ หรือ $x = d_2$	ขนานแกน y และอยู่ห่างจากแกน y เป็นระยะ d_2 หน่วย

การเขียนเส้นตรง

1. ถ้า A, B, C เป็นศูนย์ (0) บางตัว ให้พิจารณาตามตารางข้างต้น
2. ถ้า A, B, C ไม่เป็นศูนย์ (0) ให้เขียนเส้นตรงโดยสร้างตารางแล้วลงจุด

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนเส้นตรง $x = 3$

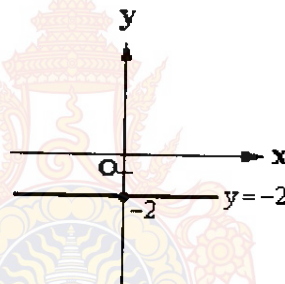
วิธีทำ เส้นตรง $x = 3$ เป็นเส้นตรงที่ขนานแกน y และอยู่ห่างจากแกน y เป็นระยะ 3 หน่วย ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนเส้นตรง $y = -2$

วิธีทำ เส้นตรง $y = -2$ เป็นเส้นตรงที่ขนานแกน x และอยู่ห่างจากแกน x เป็นระยะ -2 หน่วย (เครื่องหมายลบ หมายถึงอยู่ใต้แกน x) ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนเส้นตรง $2x + y = 4$

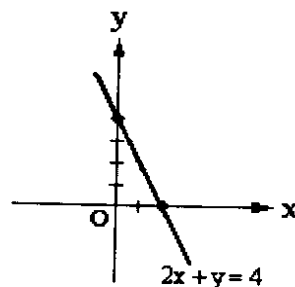
วิธีทำ เขียนเส้นตรงโดยสร้างตาราง แล้วลงจุด จะได้ดังรูปที่ 3

จาก

$$2x + y = 4$$

$$y = 4 - 2x$$

x	0	2
y	4	0



รูปที่ 3

วงกลม (Circle)

นิยามวงกลม วงกลมคือทางเดินของจุดซึ่งเคลื่อนที่ไปบนระนาบ โดยมีระยะทางห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน

สมการวงกลม

สมการมาตรฐานของวงกลม

1. สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) และรัศมี r หน่วยคือ
- $$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
2. สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และรัศมี r หน่วยคือ
- $$x^2 + y^2 = r^2$$

สมการทั่วไปของวงกลม

3. สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$
- และรัศมี $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ หน่วย คือ
- $$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad \text{เมื่อ } A, B, C \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

สรุปสมการวงกลม

สูตร	สมการวงกลม	จุดศูนย์กลาง	รัศมี
1.	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	(h,k)	r
2.	$x^2 + y^2 = r^2$	$(0,0)$	r
3.	$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	$\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$

การเขียนวงกลม หาจุดศูนย์กลาง และรัศมี โดยใช้สูตรตามตารางข้างต้น
แล้วนำไปเขียนรูปวงกลม

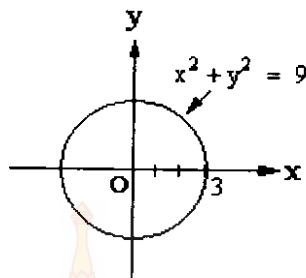
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนรูปของสมการ $x^2 + y^2 = 9$

วิธีทำ จาก $x^2 + y^2 = 9$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

เทียบกับ $x^2 + y^2 = r^2$

จะได้วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ และรัศมี 3 หน่วย ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1

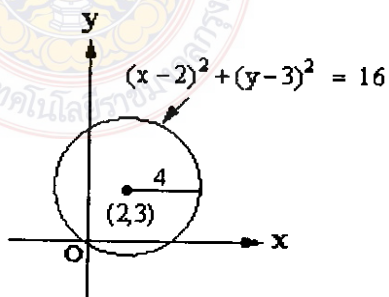
ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนรูปของสมการ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$

วิธีทำ จาก $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$$

เทียบกับ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

จะได้วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2,3)$ และรัศมี 4 หน่วย ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนรูปของสมการ $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$

วิธีทำ จาก $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$

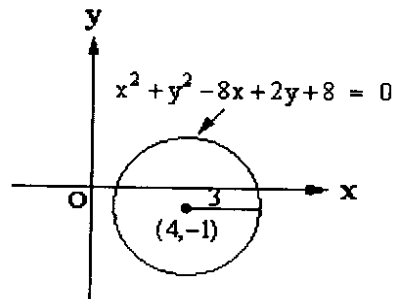
เทียบกับ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

จะได้ $A = -8$, $B = 2$, $C = 8$

ดังนั้นจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(-\frac{-8}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (4, -1)$

$$\begin{aligned} \text{และรัศมี} &= \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} = \frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2 + (2)^2 - 4(8)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{64 + 4 - 32} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3 \end{aligned}$$

จึงได้วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(4, -1)$ และรัศมี 3 หน่วย ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3

พาราโบลา (Parabola)

นิยามพาราโบลา พาราโบลาคือทางเดินของจุดซึ่งเคลื่อนที่ไปบนระนาบ โดยมีระยะทาง
ห่างจากจุดคงที่เท่ากับระยะทางที่ห่างจากเส้นตรงคงที่

สมการพาราโบลา

สมการมาตรฐานของพาราโบลา

1. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$
 - 1.1 สมการพาราโบลาหงาย $\Rightarrow x^2 = 4py$
 - 1.2 สมการพาราโบลาคู่ $\Rightarrow x^2 = -4py$
 - 1.3 สมการพาราโบลาตะแคงขวา $\Rightarrow y^2 = 4px$
 - 1.4 สมการพาราโบลาตะแคงซ้าย $\Rightarrow y^2 = -4px$
2. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k)
 - 2.1 สมการพาราโบลาหงาย $\Rightarrow (x-h)^2 = 4p(y-k)$
 - 2.2 สมการพาราโบลาคู่ $\Rightarrow (x-h)^2 = -4p(y-k)$
 - 2.3 สมการพาราโบลาตะแคงขวา $\Rightarrow (y-k)^2 = 4p(x-h)$
 - 2.4 สมการพาราโบลาตะแคงซ้าย $\Rightarrow (y-k)^2 = -4p(x-h)$

สมการทั่วไปของพาราโบลา

3. สมการพาราโบลาหงายหรือคู่ $\Rightarrow y = Ax^2 + Bx + C$
4. สมการพาราโบลาตะแคง $\Rightarrow x = Ay^2 + By + C$

สรุปสมการพาราโบลา

ลักษณะรูป	สมการมาตรฐาน		สมการทั่วไป
	จุดยอด $(0,0)$	จุดยอด (h,k)	
หงาย	$x^2 = 4py$	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$y = Ax^2 + Bx + C$
คู่	$x^2 = -4py$	$(x-h)^2 = -4p(y-k)$	
ตะแคงขวา	$y^2 = 4px$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$x = Ay^2 + By + C$
ตะแคงซ้าย	$y^2 = -4px$	$(y-k)^2 = -4p(x-h)$	

การเขียนรูปพาราโบลา หาจุดยอด และลักษณะของรูป แล้วนำไปเขียนรูป โดยหาดังนี้

1. ถ้าสมการอยู่ในรูปสมการมาตรฐาน ให้อ่านจุดยอด และลักษณะรูปตามตาราง
2. ถ้าสมการอยู่ในรูปสมการทั่วไป

$y = Ax^2 + Bx + C$ จะได้รูปพาราโบลาหงายเมื่อ A เป็นบวก และคว่ำเมื่อ A เป็นลบ

และหาจุดยอดโดยให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

$x = Ay^2 + By + C$ จะได้รูปพาราโบลาตะแคงขวาเมื่อ A เป็นบวก และตะแคงซ้าย

เมื่อ A เป็นลบ และหาจุดยอดโดยให้ $\frac{dx}{dy} = 0$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนรูปของสมการ $y = x^2$

วิธีทำ

จาก

$$y = x^2$$

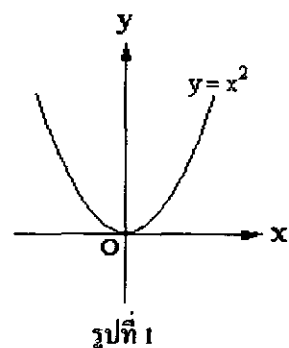
$$x^2 = y$$

เทียบกับ

$$x^2 = 4py$$

จะได้รูปพาราโบลาหงายที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$

ดังรูปที่ 1



ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนรูปของสมการ $y^2 + 2x = 0$

วิธีทำ

จาก

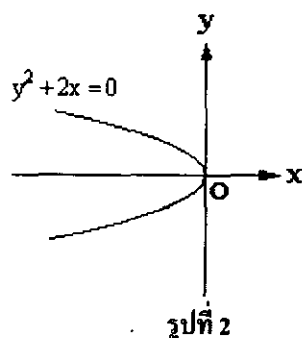
$$y^2 + 2x = 0$$

$$y^2 = -2x$$

เทียบกับ

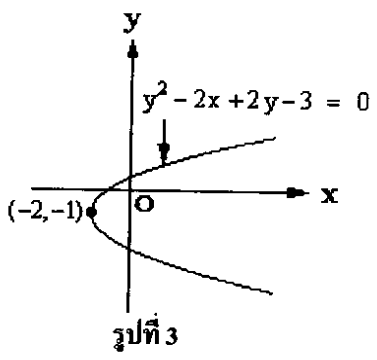
$$y^2 = -4px$$

จะได้รูปพาราโบลาตะแคงซ้ายที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$ ดังรูปที่ 2



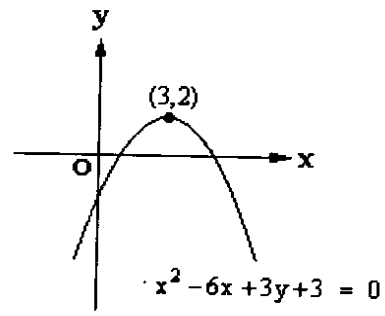
ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนรูปของสมการ $y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$

วิธีทำ

หาลักษณะรูป	หาจุดยอด	สรุป
จาก $y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ $-2x = -y^2 - 2y + 3$ $x = \frac{1}{2}y^2 + y - \frac{3}{2} \dots (1)$ เทียบกับ $x = Ay^2 + By + C$ จะได้รูปพาราโบลาหงาย เพราะ A เป็นบวก	จาก(1) $\frac{dx}{dy} = y + 1$ ให้ $\frac{dx}{dy} = y + 1 = 0$ $\therefore y = -1$ แทน $y = -1$ ใน (1) จะได้ $x = -2$	เป็นรูปพาราโบลาหงาย จุดยอดอยู่ที่จุด $(-2, -1)$ ดังรูปที่ 3  รูปที่ 3

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนรูปของสมการ $x^2 - 6x + 3y + 3 = 0$

วิธีทำ

หาลักษณะรูป	หาจุดยอด	สรุป
จาก $x^2 - 6x + 3y + 3 = 0$ $3y = -x^2 + 6x - 3$ $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1 \dots (1)$ เทียบกับ $y = Ax^2 + Bx + C$ จะได้รูปพาราโบลาคว่ำ เพราะ $A = -\frac{1}{3}$ เป็นลบ	จาก(1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}x + 2$ ให้ $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}x + 2 = 0$ $\therefore x = 3$ แทน $x = 3$ ใน (1) จะได้ $y = 2$	เป็นรูปพาราโบลาคว่ำ จุดยอดอยู่ที่จุด $(3, 2)$ ดังรูปที่ 4  รูปที่ 4

2.1.4 ทบทวนการเขียนรูป 3 มิติ

ในการหาปริมาตร จำเป็นต้องมีการเขียนรูป 3 มิติ โดยจะเขียนในลักษณะวิเคราะห์จากสมการ ซึ่งจะได้อุปกรณ์ที่ไม่ละเอียดนัก แต่รวดเร็ว รูปที่ควรทราบและพบบ่อยๆคือ

1. ระนาบ
2. ทรงกลม
3. ผิวทรงกระบอก
4. ทรงรี
5. ทรงไฮเพอร์โบลานิดชั้นเดียว
6. ทรงไฮเพอร์โบลานิดสองชั้น
7. ทรงพาราโบลาละเอียด
8. กรวยเชิงวงรี

ระนาบ (Plane)

นิยาม ระนาบ คือผิวที่ประกอบด้วยจุดทั้งหลายที่สอดคล้องกับสมการกำลังหนึ่งของสามตัวแปร x, y และ z ดังนี้

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

โดยที่ A, B, C, D เป็นค่าคงตัว และ A, B, C ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด

1. ถ้าให้ $B = 0, C = 0$ จะได้ระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด yz
2. ถ้าให้ $A = 0, C = 0$ จะได้ระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด xz
3. ถ้าให้ $A = 0, B = 0$ จะได้ระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด xy

ระนาบที่ขนานกับแกนพิกัด

1. ถ้าให้ $C = 0$ จะได้ระนาบที่ขนานกับแกน z
2. ถ้าให้ $B = 0$ จะได้ระนาบที่ขนานกับแกน y
3. ถ้าให้ $A = 0$ จะได้ระนาบที่ขนานกับแกน x

สรุป ระนาบที่ขนานกับระนาบพิทักและขนานกับแกนพิทัก ในรูปแบบต่างๆดังนี้

$B = 0, C = 0$	$Ax + D = 0$ หรือ $x = x_0$	ขนานและอยู่ห่างจากระนาบ $yz = x_0$ หน่วย
$A = 0, C = 0$	$By + D = 0$ หรือ $y = y_0$	ขนานและอยู่ห่างจากระนาบ $xz = y_0$ หน่วย
$A = 0, B = 0$	$Cz + D = 0$ หรือ $z = z_0$	ขนานและอยู่ห่างจากระนาบ $xy = z_0$ หน่วย
$C = 0$	$Ax + By + D = 0$	ขนานกับแกน z
$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$	ขนานกับแกน y
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	ขนานกับแกน x

- ข้อสังเกต**
1. สมการระนาบที่มีตัวแปรหายไป 2 ตัว กราฟของระนาบจะอยู่ในแนวขนานกับระนาบของตัวแปรที่หายไป
 2. สมการระนาบที่มีตัวแปรหายไป 1 ตัว กราฟของระนาบจะอยู่ในแนวขนานกับแกนของตัวแปรที่หายไป

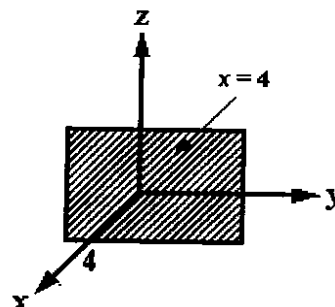
การเขียนกราฟของสมการระนาบ

การเขียนกราฟของสมการระนาบใน 3 มิติ สรุปได้ดังนี้

1. ถ้าเป็นสมการที่มีตัวแปรปรากฏ 1 ตัว จะได้ระนาบที่ตัดแกนของตัวแปรที่ปรากฏในสมการ และขนานกับระนาบของตัวแปรที่หายไป
2. ถ้าเป็นสมการที่มีตัวแปรปรากฏ 2 ตัว จะได้ระนาบที่ตัดแกนของตัวแปรที่ปรากฏในสมการ โดยหาจุดตัดบนแกนนั้น และขนานกับแกนของตัวแปรที่หายไป
3. ถ้าเป็นสมการที่มีตัวแปรปรากฏ 3 ตัว จะได้ระนาบที่ตัดแกนของตัวแปรที่ปรากฏในสมการ ทั้งสามแกน โดยหาจุดตัดบนแกนเหล่านั้น

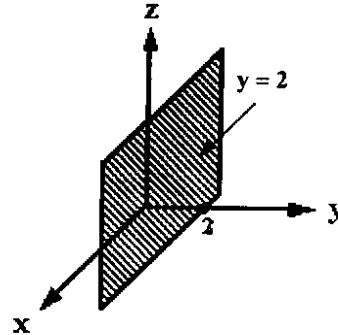
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของสมการระนาบ $x = 4$

วิธีทำ ระนาบ $x = 4$ เป็นระนาบที่ขนานกับระนาบ yz และอยู่ห่างจากระนาบ $yz = 4$ หน่วย ดังรูป



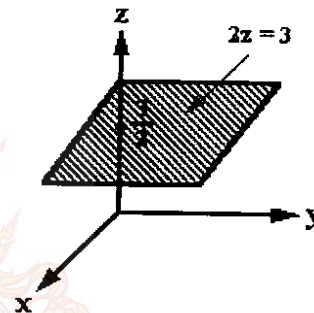
ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของสมการระนาบ $y = 2$

วิธีทำ ระนาบ $y = 2$ เป็นระนาบที่ขนานกับระนาบ xz และอยู่ห่างจากระนาบ $xz = 2$ หน่วย ดังรูป



ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนกราฟของสมการระนาบ $2z = 3$

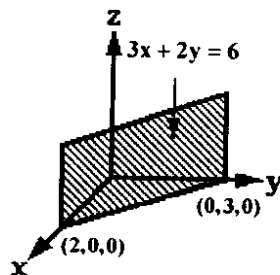
วิธีทำ ระนาบ $2z = 3$ หรือ $z = \frac{3}{2}$ เป็นระนาบที่ขนานกับระนาบ xy และอยู่ห่างจากระนาบ $xy = \frac{3}{2}$ หน่วย ดังรูป



ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนกราฟของสมการระนาบ $3x + 2y = 6$

วิธีคิด การเขียนกราฟของระนาบ นิยมหาจุดตัดบนแกน x แกน y และแกน z
 ถ้าจะหาจุดตัดบนแกน x ให้แทนค่า $y = 0$ และ $z = 0$ ในสมการระนาบ
 ถ้าจะหาจุดตัดบนแกน y ให้แทนค่า $x = 0$ และ $z = 0$ ในสมการระนาบ
 ถ้าจะหาจุดตัดบนแกน z ให้แทนค่า $x = 0$ และ $y = 0$ ในสมการระนาบ

วิธีทำ



$$3x + 2y = 6 \quad \dots\dots\dots(1)$$

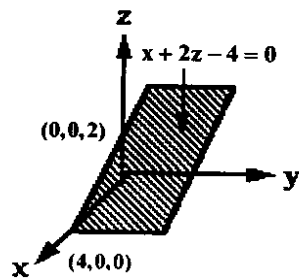
แทนค่า $y = 0$ ใน (1) จะได้ $x = 2$

แทนค่า $x = 0$ ใน (1) จะได้ $y = 3$

ดังนั้น ระนาบ $3x + 2y = 6$ เป็นระนาบที่ขนานแกน z และตัดแกน x ที่จุด $(2, 0, 0)$ ตัดแกน y ที่จุด $(0, 3, 0)$ ดังรูป

ตัวอย่างที่ 5 จงเขียนกราฟของสมการระนาบ $x + 2z - 4 = 0$

วิธีทำ



$$x + 2z - 4 = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

แทนค่า $z=0$ ใน (1) จะได้ $x=4$

แทนค่า $x=0$ ใน (1) จะได้ $z=2$

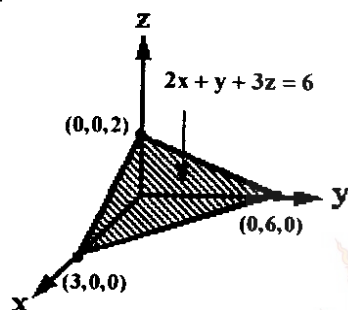
ดังนั้นระนาบ $x + 2z - 4 = 0$ เป็นระนาบที่ขนานแกน y

และตัดแกน x ที่จุด $(4, 0, 0)$ ตัดแกน z ที่จุด $(0, 0, 2)$

ดังรูป

ตัวอย่างที่ 6 จงเขียนกราฟของสมการระนาบ $2x + y + 3z = 6$

วิธีทำ



$$2x + y + 3z = 6 \quad \dots\dots\dots(1)$$

แทนค่า $y=0, z=0$ ใน (1) จะได้ $x=3$

แทนค่า $x=0, z=0$ ใน (1) จะได้ $y=6$

แทนค่า $x=0, y=0$ ใน (1) จะได้ $z=2$

ดังนั้น ระนาบ $2x + y + 3z = 6$ เป็นระนาบที่ตัด

แกน x แกน y และแกน z ที่จุด $(3, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$

และ $(0, 0, 2)$ ตามลำดับ ดังรูป

ทรงกลม (Sphere)

นิยาม ทรงกลม คือ ผิวที่ประกอบด้วยจุด (x, y, z) ทั้งหมดใน 3 มิติ ที่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง (เรียกว่าจุดศูนย์กลาง) เป็นระยะทางคงที่ (เรียกว่ารัศมี)

สมการมาตรฐานของทรงกลม

1. สมการมาตรฐานของทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k, l) และรัศมี r หน่วย คือ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

2. สมการมาตรฐานของทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และรัศมี r หน่วย คือ

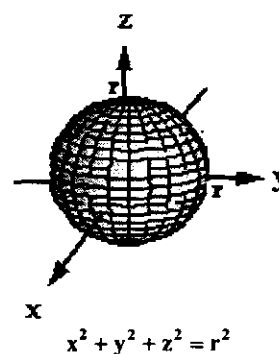
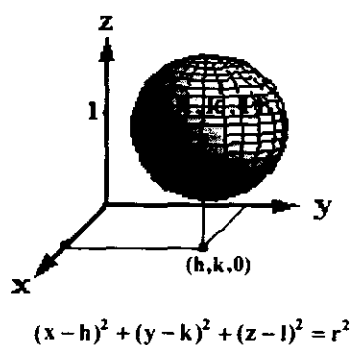
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

สมการทั่วไปของทรงกลม

$$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

สรุป สมการของทรงกลม

สูตร	สมการทรงกลม	จุดศูนย์กลาง	รัศมี
2.7	$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$	(h, k, l)	r
2.8	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	$(0, 0, 0)$	r
2.9	$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$	$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}, -\frac{F}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 + F^2 - 4G}$



ตัวอย่างที่ 7 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 8z + 10 = 0$

วิธีคิด ทำได้ 2 วิธี คือ

1. เทียบกับสมการทั่วไป และอ่านค่า D, E, F และ G แล้วแทนในสูตรเพื่อหาจุดศูนย์กลาง และรัศมี
2. จัดสมการให้เข้ารูปมาตรฐาน โดยทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ แล้วอ่านค่า h, k, l และ r

วิธีที่ 1

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 8z + 10 = 0$$

เทียบกับสมการ $x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$

จะได้ $D = -2, E = -6, F = 8, G = 10$

จากสูตร 3 จุดศูนย์กลางคือจุด $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}, -\frac{F}{2}\right) = \left(-\frac{-2}{2}, -\frac{-6}{2}, -\frac{8}{2}\right) = (1, 3, -4)$

$$\text{รัศมี} = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 + F^2 - 4G} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 + 64 - 40} = \frac{1}{2}\sqrt{64} = 4 \text{ หน่วย}$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของทรงกลมคือจุด $(1, 3, -4)$ และรัศมีเท่ากับ 4 หน่วย

วิธีที่ 2

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 8z + 10 = 0$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 6y) + (z^2 + 8z) = -10$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 8z + 16) = -10 + 1 + 9 + 16$$

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 4^2$$

เทียบกับสมการ $(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$

จะได้ $h = 1, k = 3, l = -4, r = 4$

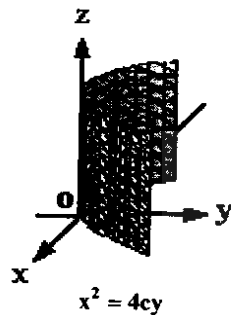
ดังนั้น จุดศูนย์กลางของทรงกลมคือจุด $(1, 3, -4)$ และรัศมีเท่ากับ 4 หน่วย

ผิวทรงกระบอก (Cylinder Surfaces)

นิยาม ผิวทรงกระบอก คือ ผิวที่ประกอบด้วยจุดทั้งหลายที่สอดคล้องกับสมการกำลังสองของสองตัวแปร

ผิวทรงกระบอกที่พบบ่อยๆมี 4 แบบ ดังนี้

1. **ทรงกระบอกเชิงพาราโบลา (Parabolic Cylinder)** คือผิวกำลังสองและกำลังหนึ่งของสองตัวแปร ที่มีสมการมาตรฐานเป็นรูปแบบใดแบบหนึ่ง ดังต่อไปนี้



$$1. \quad x^2 = \pm 4cy$$

$$2. \quad x^2 = \pm 4cz$$

$$3. \quad y^2 = \pm 4cx$$

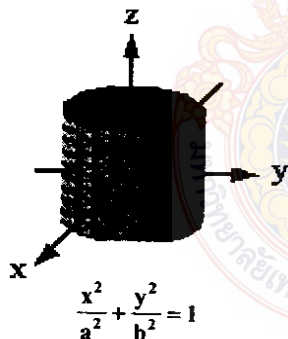
$$4. \quad y^2 = \pm 4cz$$

$$5. \quad z^2 = \pm 4cx$$

$$6. \quad z^2 = \pm 4cy$$

เมื่อ c เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

2. **ทรงกระบอกเชิงวงรี (Elliptic Cylinder)** คือ ผิวกำลังสองของสองตัวแปร ที่มีสมการมาตรฐาน เป็นรูปแบบใดแบบหนึ่ง ดังต่อไปนี้



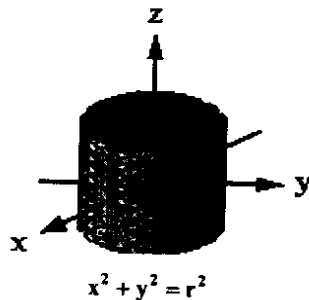
$$1. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$2. \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$3. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

3. **ทรงกระบอกกลม (Circular Cylinder)** คือ ผิวกำลังสองของสองตัวแปร ที่มีสมการมาตรฐาน เป็นรูปแบบใดแบบหนึ่ง ดังต่อไปนี้

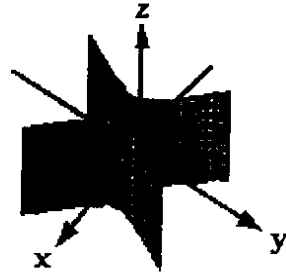


$$1. \quad x^2 + y^2 = r^2$$

$$2. \quad y^2 + z^2 = r^2$$

$$3. \quad x^2 + z^2 = r^2$$

4. ทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา (Hyperbolic Cylinder) คือ ผิวกำลังสองของสองตัวแปร ที่มีสมการมาตรฐาน เป็นรูปแบบใดแบบหนึ่ง ดังต่อไปนี้



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

$$1. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

$$2. \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

$$3. \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \pm 1$$

เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

สรุป การเขียนกราฟของสมการผิวทรงกระบอกใน 3 มิติ

สมการผิวทรงกระบอกใน 3 มิติ เป็นสมการที่มีตัวแปรปรากฏ 2 ตัว และมีกำลังสูงสุดเท่ากับ 2 การเขียนกราฟทำดังนี้

1. เขียนกราฟของสมการนั้นใน 2 มิติ
2. เขียนผิวทรงกระบอกตามกราฟนั้น โดยให้ขนานกับแกนของตัวแปรที่หายไป

ข้อสังเกต การเขียนกราฟจากสมการใดสมการหนึ่งใน 2 มิติ และ 3 มิติ จะได้รูปต่างกันดังนี้

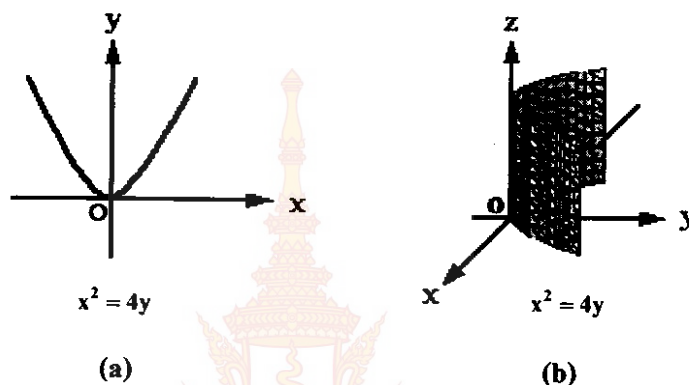
- ถ้ากราฟใน 2 มิติเป็นเส้นตรง ใน 3 มิติจะเป็นระนาบ
- ถ้ากราฟใน 2 มิติเป็นพาราโบลา ใน 3 มิติจะเป็นทรงกระบอกเชิงพาราโบลา
- ถ้ากราฟใน 2 มิติเป็นวงกลม ใน 3 มิติจะเป็นทรงกระบอกกลม
- ถ้ากราฟใน 2 มิติเป็นวงรี ใน 3 มิติจะเป็นทรงกระบอกเชิงวงรี
- ถ้ากราฟใน 2 มิติเป็นไฮเพอร์โบลา ใน 3 มิติจะเป็นทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา

ตัวอย่างที่ 8 จงเขียนรูปผิว $x^2 = 4y$

วิธีคิด จะเห็นว่าสมการที่โจทย์กำหนด เป็นสมการที่มีตัวแปรปรากฏ 2 ตัว และกำลังสูงสุดเท่ากับ 2 ดังนั้นจะได้รูปกราฟใน 2 มิติเป็นทรงกระบอก และวิธีการเขียนกราฟให้เขียนกราฟใน 2 มิติ ก่อน แล้วเขียนผิวทรงกระบอกตามกราฟนั้น โดยให้ขนานกับแกนของตัวแปรที่หายไป

วิธีทำ ขั้นที่ 1 เขียนกราฟของสมการ $x^2 = 4y$ ใน 2 มิติ จะได้กราฟพาราโบลาหงาย มีจุดยอดที่จุด $(0,0)$ ดังรูป (a)

ขั้นที่ 2 เขียนผิวตามเส้นกราฟพาราโบลา โดยให้ขนานกับแกน z (ตัวแปรที่หายไป) จะได้ผิว $x^2 = 4y$ ใน 3 มิติ เป็นทรงกระบอกเชิงพาราโบลา ดังรูป (b)

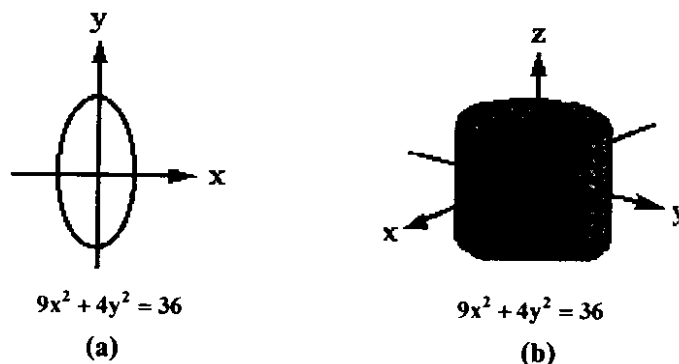


ตัวอย่างที่ 9 จงเขียนรูปผิว $9x^2 + 4y^2 = 36$

วิธีคิด ทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 8

วิธีทำ ขั้นที่ 1 เขียนกราฟของสมการ $9x^2 + 4y^2 = 36$ หรือ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ใน 2 มิติ จะได้กราฟวงรี ที่มีจุดศูนย์กลาง $(0,0)$ แกนยาวทับแกน y ดังรูป (a)

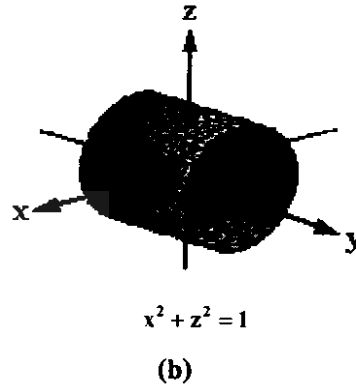
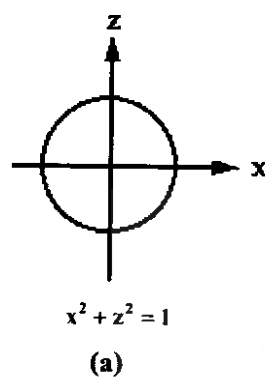
ขั้นที่ 2 เขียนผิวตามเส้นกราฟวงรี โดยให้ขนานกับแกน z (ตัวแปรที่หายไป) จะได้ผิวใน 3 มิติ เป็นทรงกระบอกเชิงวงรี ดังรูป (b)



ตัวอย่างที่ 10 จงเขียนรูปผิว $x^2 + z^2 = 1$

วิธีคิด ทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 8

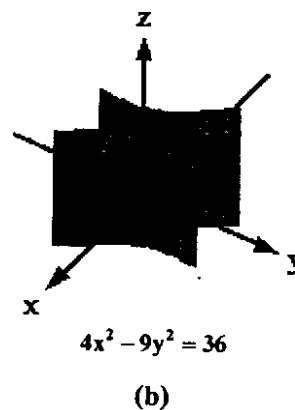
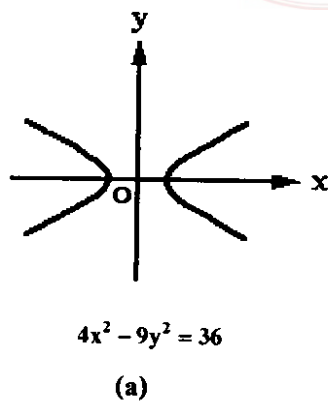
- วิธีทำ ขั้นที่ 1 เขียนกราฟของสมการ $x^2 + z^2 = 1$ ใน 2 มิติ (ระนาบ xz) จะได้กราฟวงกลม
ที่มีจุดศูนย์กลาง (0,0) รัศมี 1 หน่วย ดังรูป (a)
ขั้นที่ 2 เขียนผิวตามเส้นกราฟวงกลม โดยให้ขนานกับแกน y (ตัวแปรที่หายไป)
จะได้ผิวใน 3 มิติ เป็นทรงกระบอกกลม ดังรูป (b)



ตัวอย่างที่ 11 จงเขียนรูปผิว $4x^2 - 9y^2 = 36$

วิธีคิด ทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 8

- วิธีทำ ขั้นที่ 1 เขียนกราฟของสมการ $4x^2 - 9y^2 = 36$ หรือ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ ใน 2 มิติ
จะได้กราฟไฮเพอร์โบลา ที่มีจุดศูนย์กลาง (0,0) แกนตามขวางทับแกน x ดังรูป (a)
ขั้นที่ 2 เขียนผิวตามเส้นกราฟไฮเพอร์โบลา โดยให้ขนานกับแกน z (ตัวแปรที่หายไป)
จะได้ผิวใน 3 มิติ เป็นทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา ดังรูป (b)



ผิวกำลังสอง (Quadric Surface)

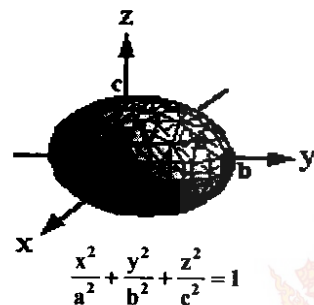
นิยาม ผิวกำลังสอง คือ ผิวที่ประกอบด้วยจุดทั้งหลาย ที่สอดคล้องกับสมการ กำลังสอง ของสามตัวแปร x, y และ z ดังนี้

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

โดยที่ $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ และ J เป็นค่าคงตัว และ A, B, C ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ผิวที่เกิดจากสมการผิวกำลังสองที่จะกล่าวในที่นี้มี 5 แบบดังนี้

1. **ทรงรี (Ellipsoid)** คือ ผิวกำลังสองที่มีสมการมาตรฐานอยู่ในรูป



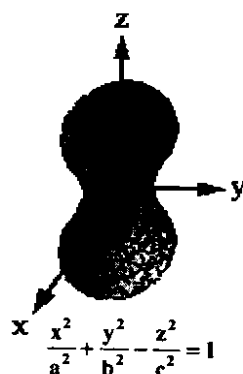
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

สรุป ลักษณะผิวทรงรี ที่มีสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

- จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด
- ตัดแกน x , แกน y และแกน z ที่จุด $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ และ $(0, 0, \pm c)$ ตามลำดับ
- สมมาตรกับแกนพิกัดทั้งสาม และระนาบพิกัดทั้งสาม
- รอยตัดบนระนาบพิกัด เป็นวงรี
- รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัดเป็นวงรี จุด หรือไม่มีรอยตัด

2. **ทรงไฮเพอร์โบลานิคชั้นเดียว (Hyperboloid of One Sheet)** คือผิวกำลังสองที่มีสมการมาตรฐานเป็นรูปแบบใดแบบหนึ่ง ในสามแบบต่อไปนี้



$$1. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$2. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

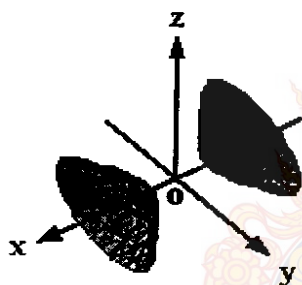
$$3. -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

สรุป ลักษณะของผิวทรงไฮเพอร์โบลานิดชั้นเดียว ที่มีสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

- จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด
- ตัดแกน x ที่จุด $(\pm a, 0, 0)$ และ ตัดแกน y ที่จุด $(0, \pm b, 0)$ แต่ไม่ตัดแกน z
- สมมาตรกับแกนพิกัดทั้งสาม และระนาบพิกัดทั้งสาม
- รอยตัดบนระนาบ xy เป็นวงรี รอยตัดบนระนาบ xz และ ระนาบ yz เป็นรูปไฮเพอร์โบลาล
- รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ xy เป็นวงรี ถ้า $a \neq b$ และเป็นวงกลม ถ้า $a = b$ และรอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ xz และ ระนาบ yz เป็นไฮเพอร์โบลาลหรือเส้นตรง

3. ทรงไฮเพอร์โบลานิดสองชั้น (Hyperboloid of Two Sheet) คือผิวกำลังสองที่มีสมการมาตรฐานเป็นรูปแบบใดแบบหนึ่ง ในสามแบบต่อไปนี้



$$1. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$2. -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$3. -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

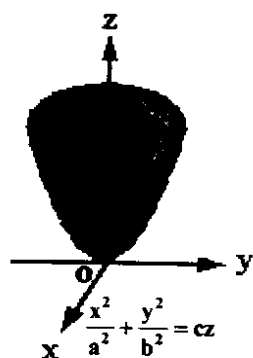
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

สรุป ลักษณะของผิวทรงไฮเพอร์โบลานิดสองชั้น ที่มีสมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

- จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด
- ตัดแกน x ที่จุด $(\pm a, 0, 0)$ แต่ไม่ตัดแกน y และไม่ตัดแกน z
- สมมาตรกับแกนพิกัดทั้งสาม และระนาบพิกัดทั้งสาม
- รอยตัดบนระนาบ xy และ ระนาบ xz เป็นรูปไฮเพอร์โบลาล
- รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ xy และ ระนาบ xz เป็นรูปไฮเพอร์โบลาล
- รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ yz เป็นวงรี ถ้า $b \neq c$ และเป็นวงกลม ถ้า $b = c$

4. ทรงพาราโบล่าเชิงวงรี (Elliptic Paraboloid) คือผิวกำลังสองที่มีสมการมาตรฐาน

เป็นรูปแบบใดแบบหนึ่งในสามแบบต่อไปนี้



$$1. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm cz$$

$$2. \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm by$$

$$3. \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm ax$$

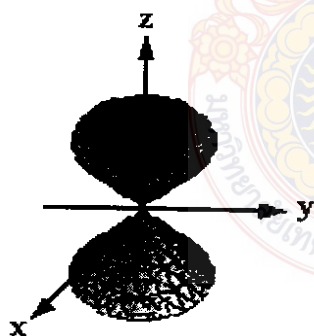
เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

สรุป ลักษณะของผิวทรงพาราโบล่าเชิงวงรี ที่มีสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm cz$

- รอยตัดบนระนาบ xy เป็นจุดกำเนิดเพียงจุดเดียว
- รอยตัดบนระนาบ xz และ ระนาบ yz เป็นพาราโบลา
- รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ xy เป็นวงรี เมื่อ $a \neq b$ และเป็นวงกลมเมื่อ $a = b$
- รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ xz และ ระนาบ yz เป็นพาราโบลา
- ถ้าเครื่องหมายหน้า c เป็นบวก จะได้ผิวทรงพาราโบล่าเชิงวงรีอยู่เหนือระนาบ xy แต่ถ้าเครื่องหมายหน้า c เป็นลบ จะได้ผิวอยู่ใต้ระนาบ xy

5. กรวยเชิงวงรี (Elliptic Cone) คือ ผิวกำลังสองที่มีสมการมาตรฐาน เป็นรูปแบบใด

แบบหนึ่งในสามแบบต่อไปนี้



$$1. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$2. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$3. -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

สรุป ลักษณะของผิวกรวยเชิงวงรี ที่มีสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

- จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด
- รอยตัดบนระนาบ xy เป็นจุดกำเนิดเพียงจุดเดียว
- รอยตัดบนระนาบ xz และ ระนาบ yz เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุดกำเนิด
- รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ xy เป็นวงรี
- รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ xz และ yz เป็นไฮเพอร์โบลา

หมายเหตุ ถ้า $a = b$ จะเรียก กรวยเชิงวงรี ว่ากรวยกลม (Circular Cone)

ตัวอย่างที่ 12 จงเขียนผิวของสมการ $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$

วิธีคิด สมการที่โจทย์กำหนด เป็นสมการสามตัวแปร กำลังสูงสุด เท่ากับ 2 ดังนั้นจะได้รูปกราฟ ใน 3 มิติ เป็นผิวกำลังสอง และวิธีการเขียนผิว ให้จัดสมการเข้ารูปสมการมาตรฐาน

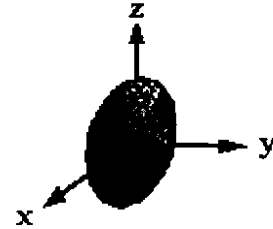
วิธีทำ

$$9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$$

เอา 36หาร สองข้าง ; $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$$

เทียบกับสมการ ; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



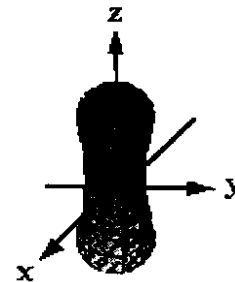
จะได้รูปกราฟเป็นผิวทรงรี มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ตัดแกน x แกน y และแกน z ที่จุด $(\pm 2, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ และ $(0, 0, \pm 3)$ ตามลำดับ ดังรูป

ตัวอย่างที่ 13 จงเขียนผิวของสมการ $36x^2 - y^2 + 9z^2 = 144$

วิธีทำ เอา 144 หาร สองข้าง ; $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{144} + \frac{z^2}{16} = 1$

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{12^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$$

เทียบกับสมการมาตรฐาน ; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



จะได้รูปกราฟเป็นผิวทรงไฮเพอร์โบลานิคชั้นเดียว โดยมีแกน y เป็นแกนสมมาตร ตัดแกน x ที่จุด $(\pm 2, 0, 0)$ และตัดแกน z ที่จุด $(0, 0, \pm 4)$ ตามลำดับ แต่ไม่ตัดแกน y ดังรูป

ตัวอย่างที่ 14 จงเขียนผิวของสมการ $x^2 - y^2 - z^2 = 4$

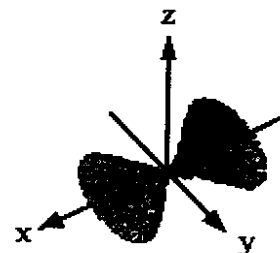
วิธีทำ

$$x^2 - y^2 - z^2 = 4$$

เอา 4 หาร สองข้าง ; $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} - \frac{z^2}{2^2} = 1$$

เทียบกับสมการมาตรฐาน ; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



จะได้รูปกราฟเป็นผิวทรงไฮเพอร์โบลานิคสองชั้น โดยมีแกน x เป็นแกนสมมาตร จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ตัดแกน x ที่จุด $(\pm 2, 0, 0)$ แต่ไม่ตัดแกน y และไม่ตัดแกน z ดังรูป

ตัวอย่างที่ 15 จงเขียนผิวของสมการ $x^2 + y^2 = z$

วิธีทำ

$$x^2 + y^2 = z$$

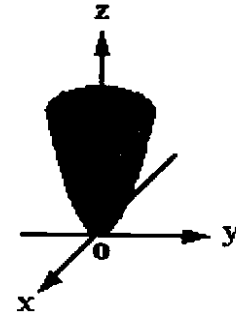
เทียบกับสมการมาตรฐาน;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm cz$$

จะได้รูปกราฟเป็นผิวทรงพาราโบลเชิงวงรี

มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด อยู่เหนือระนาบ xy

(เพราะสัมประสิทธิ์ของ z เป็นบวก) ดังรูป



ตัวอย่างที่ 16 จงเขียนผิวของสมการ $y^2 + 9z^2 = x^2$

วิธีทำ

$$y^2 + 9z^2 = x^2$$

$$-x^2 + y^2 + 9z^2 = 0$$

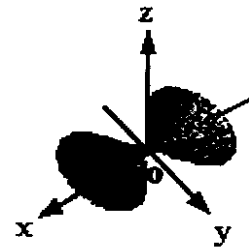
เอา 9หาร สองข้าง ;

$$-\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{1^2} = 0$$

เทียบกับสมการมาตรฐาน;

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

จะได้กราฟเป็นผิวกรวยเชิงวงรี โดยมีจุดยอดที่จุดกำเนิด ดังรูป



2.2 ทบทวนการหาปริพันธ์

2.2.1 จุดประสงค์การทบทวนการหาปริพันธ์

1. บอกนิยามของปริพันธ์ได้
2. หาค่าของปริพันธ์ชั้นเดียวในระบบพิกัดฉากได้
3. หาค่าของปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดฉากได้

2.2.2 ทบทวนการหาปริพันธ์ชั้นเดียว

นิยาม ถ้า $F(x)$ เป็น “ปฏิยานุพันธ์” ของ $f(x)$ ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต คือ

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ดังนี้

$$\text{ถ้า } F'(x) = f(x) \text{ แล้วจะได้ว่า } \int f(x)dx = F(x) + c$$

สัญลักษณ์ $\int$ เรียกว่า “เครื่องหมายปริพันธ์” (Integral sign)

$\int f(x)dx$ เรียกว่า “ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ $f(x)$ เมื่อเทียบกับตัวแปร x ”

$f(x)$ เรียกว่า “ปริพันธ์” (Integrand)

x เรียกว่า “ตัวแปรของการหาปริพันธ์” (Variable of Integration)

c เรียกว่า “ค่าคงตัวของหาปริพันธ์” (Constant of Integration)

วิธีการหาปฏิยานุพันธ์ เรียกว่า การหาปริพันธ์ (Integration หรือ Antidifferentiation)

การทบทวนการหาปริพันธ์ชั้นเดียว แบ่งเป็น 6 หัวข้อ ดังนี้

1. ปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต
2. ปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ให้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันลอการิทึม
3. ปริพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลัง
4. ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
5. ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง

1. ปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต (Integral of Algebraic Function)

สูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

สูตรเบื้องต้นสำหรับการหาปริพันธ์ฟังก์ชันพีชคณิต มี 5 สูตร ดังนี้

ให้ u, v, w เป็นฟังก์ชันของ x และ c, a, n เป็นค่าคงตัว

1. $\int 0 dx = c$
2. $\int a du = a \int du$
3. $\int dx = x + c$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
5. $\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า $\int (3x^2 - 2x + 6) dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 2x + 6) dx &= \int 3x^2 dx - \int 2x dx + \int 6 dx \\ &= 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + 6 \int dx \\ &= 3 \left(\frac{x^{2+1}}{2+1} \right) - 2 \left(\frac{x^{1+1}}{1+1} \right) + 6x + c \\ &= x^3 - x^2 + 6x + c \end{aligned}$$

##

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า $\int \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \int \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} \right) dx &= \int 2\sqrt{x} dx + \int \frac{3}{x^2} dx - \int \frac{4}{\sqrt[3]{x}} dx \\ &= 2 \int \sqrt{x} dx + 3 \int \frac{1}{x^2} dx - 4 \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \\ &= 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 3 \int x^{-2} dx - 4 \int x^{-\frac{1}{3}} dx \\ &= 2 \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right) + 3 \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right) - 4 \left(\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \right) + c \\ &= \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{x} - 6x^{\frac{2}{3}} + c \end{aligned}$$

##

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่า $\int \sqrt{x}(x^2 - 2\sqrt{x}) dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{x}(x^2 - 2\sqrt{x}) dx &= \int \left(x^{\frac{5}{2}} - 2x \right) dx \\
 &= \int x^{\frac{5}{2}} dx - \int 2x dx \\
 &= \int x^{\frac{5}{2}} dx - \int 2x dx \\
 &= \left(\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} \right) - 2 \left(\frac{x^{1+1}}{1+1} \right) + c \\
 &= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - x^2 + c
 \end{aligned}$$

##

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่า $\int (2x-1)(3x^3+2) dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \int (2x-1)(3x^3+2) dx &= \int (6x^4 - 3x^3 + 4x - 2) dx \\
 &= 6 \int x^4 dx - 3 \int x^3 dx + 4 \int x dx - 2 \int dx \\
 &= 6 \left(\frac{x^5}{5} \right) - 3 \left(\frac{x^4}{4} \right) + 4 \left(\frac{x^2}{2} \right) - 2x + c \\
 &= \frac{6}{5} x^5 - \frac{3}{4} x^4 + 2x^2 - 2x + c
 \end{aligned}$$

##

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่า $\int \frac{x^4 + 2x^3 - 4x}{x^3} dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^4 + 2x^3 - 4x}{x^3} dx &= \int \left(\frac{x^4}{x^3} + \frac{2x^3}{x^3} - \frac{4x}{x^3} \right) dx \\
 &= \int (x + 2 - 4x^{-2}) dx \\
 &= \int x dx + \int 2 dx - \int 4x^{-2} dx \\
 &= \int x dx + 2 \int dx - 4 \int x^{-2} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{4x^{-1}}{-1} + c \\
 &= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{4}{x} + c
 \end{aligned}$$

##

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่า $\int (x+3)^5 dx$

วิธีคิด เลือกเคาสูตร $\int u^n du$ และตรวจสอบดังในกรอบสี่เหลี่ยม

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \int (x+3)^5 dx &= \int (x+3)^5 d(x+3) \\ &= \frac{(x+3)^6}{6} + c\end{aligned}$$

วิธีคิด

สูตร $\int u^n du$

ให้ $u = x+3 ; n=5$

$du = d(x+3)$

$= dx$

##

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่า $\int x(x^2-5)^8 dx$

วิธีคิด เลือกเคาสูตร $\int u^n du$ และตรวจสอบดังในกรอบสี่เหลี่ยม

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \int x(x^2-5)^8 dx &= \int (x^2-5)^8 (x dx) \\ &= \int (x^2-5)^8 \frac{(2x dx)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int (x^2-5)^8 d(x^2-5) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x^2-5)^9}{9} + c \\ &= \frac{(x^2-5)^9}{18} + c\end{aligned}$$

วิธีคิด

สูตร $\int u^n du$

ให้ $u = x^2-5 ; n=8$

$du = d(x^2-5)$

$= 2x dx$

##

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่า $\int \sin^2 x \cos x dx$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \int \sin^2 x \cos x dx &= \int \sin^2 x (\cos x dx) \\ &= \int \sin^2 x d(\sin x) \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} + c\end{aligned}$$

วิธีคิด

สูตร $\int u^n du$

ให้ $u = \sin x ; n=2$

$du = d(\sin x)$

$= \cos x dx$

##

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่า $\int (e^{2x}+3)^2 e^{2x} dx$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \int (e^{2x}+3)^2 e^{2x} dx &= \int (e^{2x}+3)^2 (e^{2x} dx) \\ &= \frac{1}{2} \int (e^{2x}+3)^2 (2e^{2x} dx) \\ &= \frac{1}{2} \int (e^{2x}+3)^2 d(e^{2x}+3) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(e^{2x}+3)^3}{3} + c \\ &= \frac{1}{6} (e^{2x}+3)^3 + c\end{aligned}$$

วิธีคิด

สูตร $\int u^n du$

ให้ $u = e^{2x}+3 ; n=2$

$du = d(e^{2x}+3)$

$= 2e^{2x} dx$

##

2. ปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ให้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันลอการิทึม

สูตรสำหรับการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ให้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันลอการิทึมมี 1 สูตร
ให้ u เป็นฟังก์ชันของ x

สูตร

$$6. \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c \quad (u \neq 0)$$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่า $\int \frac{1}{2x+3} dx$

วิธีคิด เลือกเคาสูตร $\int \frac{1}{u} du$ และตรวจสอบดังในกรอบสี่เหลี่ยม

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2x+3} dx &= \int \frac{1}{2x+3} \cdot \frac{(2dx)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2x+3} (2dx) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2x+3} d(2x+3) \\ &= \frac{1}{2} \ln|2x+3| + c \end{aligned}$$

วิธีคิด

สูตร $\int \frac{1}{u} du$
ให้ $u = 2x+3$
 $du = d(2x+3)$
 $= 2dx$

##

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่า $\int \frac{x^2}{x^3+5} dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^3+5} dx &= \int \frac{1}{x^3+5} (x^2 dx) \\ &= \int \frac{1}{x^3+5} \cdot \left(\frac{3x^2 dx}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^3+5} (3x^2 dx) \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^3+5} d(x^3+5) \\ &= \frac{1}{3} \ln|x^3+5| + c \end{aligned}$$

วิธีคิด

สูตร $\int \frac{1}{u} du$
ให้ $u = x^3+5$
 $du = d(x^3+5)$
 $= 3x^2 dx$

#

ตัวอย่างที่ 12 จงหาค่า $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} dx &= \int \frac{1}{1+\cos 2x} (\sin 2x dx) \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\cos 2x} (-2 \sin 2x dx) \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\cos 2x} d(1+\cos 2x) \\ &= -\frac{1}{2} \ln|1+\cos 2x| + c \end{aligned}$$

วิธีคิด

สูตร $\int \frac{1}{u} du$
ให้ $u = 1+\cos 2x$
 $du = d(1+\cos 2x)$
 $= -2 \sin 2x dx$

##

3. ปริพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลัง (Integral of Exponential Function)

สูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลัง มี 2 สูตร ดังนี้

ให้ u เป็นฟังก์ชันของ x และ a เป็นค่าคงตัว

สูตร

$$\begin{aligned} 7. \int a^u du &= \frac{a^u}{\ln a} + c \\ 8. \int e^u du &= e^u + c \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 13 จงหาค่า $\int 3^{5x} dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \int 3^{5x} dx &= \int 3^{5x} \left(\frac{5dx}{5} \right) \\ &= \frac{1}{5} \int 3^{5x} (5dx) \\ &= \frac{1}{5} \int 3^{5x} d(5x) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{3^{5x}}{\ln 3} + c \\ &= \frac{3^{5x}}{5 \ln 3} + c \end{aligned}$$

วิธีคิด

สูตร $\int a^u du$

ให้ $u = 5x ; a = 3$

$du = d(5x)$

$= 5dx$

##

ตัวอย่างที่ 14 จงหาค่า $\int 7^{(x^4+4x)} (x^3+1) dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \int 7^{(x^4+4x)} (x^3+1) dx &= \int 7^{(x^4+4x)} \frac{4(x^3+1) dx}{4} \\ &= \frac{1}{4} \int 7^{(x^4+4x)} (4(x^3+1) dx) \\ &= \frac{1}{4} \int 7^{(x^4+4x)} d(x^4+4x) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{7^{(x^4+4x)}}{\ln 7} + c \\ &= \frac{7^{(x^4+4x)}}{4 \ln 7} + c \end{aligned}$$

วิธีคิด

สูตร $\int a^u du$

ให้ $u = x^4 + 4x ; a = 7$

$du = d(x^4 + 4x)$

$= (4x^3 + 4)dx$

$= 4(x^3 + 1)dx$

##

ตัวอย่างที่ 15 จงหาค่า $\int x^2 e^{x^3+5} dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \int x^2 e^{x^3+5} dx &= \int e^{x^3+5} (x^2 dx) \\ &= \frac{1}{3} \int e^{x^3+5} (3x^2 dx) \\ &= \frac{1}{3} \int e^{x^3+5} d(x^3+5) \\ &= \frac{1}{3} e^{x^3+5} + c \end{aligned}$$

วิธีคิด

สูตร $\int e^u du$

ให้ $u = x^3 + 5$

$du = d(x^3 + 5)$

$= 3x^2 dx$

##

ตัวอย่างที่ 16 จงหาค่า $\int \frac{e^{\ln 2x}}{x} dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \int \frac{e^{\ln 2x}}{x} dx &= \int e^{\ln 2x} \left(\frac{dx}{x} \right) \\ &= \int e^{\ln 2x} d(\ln 2x) \\ &= e^{\ln 2x} + c \end{aligned}$$

วิธีคิด

สูตร $\int e^u du$

ให้ $u = \ln 2x$

$du = d(\ln 2x)$

$= \frac{dx}{x}$

##

4. ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Integral of Trigonometric Function)

สูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ มี 10 สูตร ดังนี้

ให้ u เป็นฟังก์ชันของ x

สูตร

9. $\int \sin u du = -\cos u + c$
10. $\int \cos u du = \sin u + c$
11. $\int \sec^2 u du = \tan u + c$
12. $\int \operatorname{cosec}^2 u du = -\cot u + c$
13. $\int \sec u \cdot \tan u du = \sec u + c$
14. $\int \operatorname{cosec} u \cdot \cot u du = -\operatorname{cosec} u + c$
15. $\int \tan u du = \ln |\sec u| + c$
16. $\int \cot u du = \ln |\sin u| + c$
17. $\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + c$
18. $\int \operatorname{cosec} u du = \ln |\operatorname{cosec} u - \cot u| + c$

ตัวอย่างที่ 17 จงหาค่า $\int \sin(8x-3) dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int \sin(8x-3) dx &= \int \sin(8x-3) \left(\frac{8dx}{8} \right) \\ &= \frac{1}{8} \int \sin(8x-3) (8dx) \\ &= \frac{1}{8} \int \sin(8x-3) d(8x-3) \\ &= -\frac{1}{8} \cos(8x-3) + c \end{aligned}$$

วิธีคิด

สูตร $\int \sin u du$
ให้ $u = 8x-3$
 $du = d(8x-3)$
 $= 8 dx$

##

ตัวอย่างที่ 18 จงหาค่า $\int e^{2x} \cos e^{2x} dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int e^{2x} \cos e^{2x} dx &= \int \cos e^{2x} (e^{2x} dx) \\ &= \int \cos e^{2x} \left(\frac{2e^{2x} dx}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \cos e^{2x} (2e^{2x} dx) \\ &= \frac{1}{2} \int \cos e^{2x} d(e^{2x}) \\ &= \frac{1}{2} \sin e^{2x} + c \end{aligned}$$

วิธีคิด

สูตร $\int \cos u du$
ให้ $u = e^{2x}$
 $du = d(e^{2x})$
 $= 2e^{2x} dx$

##

ตัวอย่างที่ 19 จงหาค่า $\int \frac{\sec \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int \frac{\sec \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int \sec \sqrt{x} \left(\frac{dx}{\sqrt{x}} \right) \\ &= 2 \int \sec \sqrt{x} \left(\frac{dx}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= 2 \int \sec \sqrt{x} d(\sqrt{x}) \\ &= 2 \ln |\sec \sqrt{x} + \tan \sqrt{x}| + c \end{aligned}$$

วิธีคิด

สูตร $\int \sec u du$
ให้ $u = \sqrt{x}$
 $du = d(\sqrt{x})$
 $= \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

##

ตัวอย่างที่ 20 จงหาค่า $\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} dx &= \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} \right) dx \\ &= \int (\tan x + 1) dx \\ &= \int \tan x dx + \int dx \\ &= \ln |\sec x| + x + c \end{aligned}$$

วิธีคิด

สูตร $\int \sec u du$
ให้ $u = \sqrt{x}$
 $du = d(\sqrt{x})$
 $= \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

##

5. ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง

(Integrating Powers of Trigonometric Functions)

5.1 ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ ใช้สูตรลดทอน

$$\int \sin^n u \, du, \int \cos^n u \, du, \int \tan^n u \, du, \int \cot^n u \, du, \int \sec^n u \, du, \int \operatorname{cosec}^n u \, du,$$

สูตรลดทอน

$$\int \sin^n u \, du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cdot \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u \, du$$

$$\int \cos^n u \, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \cdot \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du$$

$$\int \tan^n u \, du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u \, du$$

$$\int \cot^n u \, du = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u \, du$$

$$\int \sec^n u \, du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \cdot \tan u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du$$

$$\int \operatorname{cosec}^n u \, du = -\frac{1}{n-1} \operatorname{cosec}^{n-2} u \cdot \cot u + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2} u \, du$$

ตัวอย่างที่ 21 จงหาค่า $\int \sin^4 x \, dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \int \sin^4 x \, dx &= -\frac{1}{4} \sin^{4-1} x \cdot \cos x + \frac{4-1}{4} \int \sin^{4-2} x \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cdot \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cdot \cos x + \frac{3}{4} \left[-\frac{1}{2} \sin^{2-1} x \cdot \cos x + \frac{2-1}{1} \int \sin^{2-2} x \, dx \right] \\ &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cdot \cos x - \frac{3}{8} \sin x \cdot \cos x + \frac{3}{8} \int \sin^0 x \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cdot \cos x - \frac{3}{8} \sin x \cdot \cos x + \frac{3}{8} \int dx \\ &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cdot \cos x - \frac{3}{8} \sin x \cdot \cos x + \frac{3x}{8} + c \end{aligned}$$

##

ตัวอย่างที่ 22 จงหาค่า $\int \cos^7 3x \, dx$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad & \int \cos^7 3x \, dx \\
 &= \frac{1}{3} \int \cos^7 3x \, d(3x) \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{7} \cos^6 3x \cdot \sin 3x + \frac{6}{7} \int \cos^5 3x \, d(3x) \right] \\
 &= \frac{1}{21} \cos^6 3x \cdot \sin 3x + \frac{2}{7} \int \cos^5 3x \, d(3x) \\
 &= \frac{1}{21} \cos^6 3x \cdot \sin 3x + \frac{2}{7} \left[\frac{1}{5} \cos^4 3x \cdot \sin 3x + \frac{4}{5} \int \cos^3 3x \, d(3x) \right] \\
 &= \frac{1}{21} \cos^6 3x \cdot \sin 3x + \frac{2}{35} \cos^4 3x \cdot \sin 3x + \frac{8}{35} \int \cos^3 3x \, d(3x) \\
 &= \frac{1}{21} \cos^6 3x \cdot \sin 3x + \frac{2}{35} \cos^4 3x \cdot \sin 3x + \frac{8}{35} \left[\frac{1}{3} \cos^2 3x \cdot \sin 3x + \frac{2}{3} \int \cos 3x \, d(3x) \right] \\
 &= \frac{1}{21} \cos^6 3x \cdot \sin 3x + \frac{2}{35} \cos^4 3x \cdot \sin 3x + \frac{8}{105} \cos^2 3x \cdot \sin 3x + \frac{16}{105} \sin 3x + c \quad \# \#
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 23 จงหาค่า $\int \tan^5 3x \, dx$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad & \int \tan^5 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \tan^5 3x \, d(3x) \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{5-1} \tan^{5-1} 3x - \int \tan^{5-2} 3x \, d(3x) \right] \\
 &= \frac{1}{12} \tan^4 3x - \frac{1}{3} \int \tan^3 3x \, d(3x) \\
 &= \frac{1}{12} \tan^4 3x - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3-1} \tan^{3-1} 3x - \int \tan^{3-2} 3x \, d(3x) \right] \\
 &= \frac{1}{12} \tan^4 3x - \frac{1}{6} \tan^2 3x + \frac{1}{3} \int \tan 3x \, d(3x) \\
 &= \frac{1}{12} \tan^4 3x - \frac{1}{6} \tan^2 3x + \frac{1}{3} \ln |\sec 3x| + c \quad \# \#
 \end{aligned}$$

5.2 การหาปริพันธ์ของ $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$ แบ่งเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 ถ้า m หรือ n เป็นจำนวนคี่บวก

❖ ถ้า m เป็นจำนวนคี่บวก ให้เขียน $\sin^m x = \sin^{m-1} x \cdot \sin x$ แล้วแทนค่า $\sin^{m-1} x$ ด้วยสูตร $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ และใช้ความรู้ $d(\cos x) = -\sin x \, dx$

❖ ถ้า n เป็นจำนวนคี่บวกให้เขียน $\cos^n x = \cos^{n-1} x \cdot \cos x$ แล้วแทนค่า $\cos^{n-1} x$ ด้วยสูตร $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ และใช้ความรู้ $d(\sin x) = \cos x \, dx$

กรณีที่ 2 ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่บวก

❖ การหาปริพันธ์ให้ใช้สูตรตรีโกณมิติ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ และ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ เข้าช่วย

ตัวอย่างที่ 24 จงหาค่า $\int \sin^3 x \cos^{-5} x \, dx$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } \int \sin^3 x \cos^{-5} x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^{-5} x (\sin x \, dx) \\
 &= - \int \sin^2 x \cos^{-5} x (-\sin x \, dx) \\
 &= - \int (1 - \cos^2 x) \cos^{-5} x \, d(\cos x) \\
 &= - \int \cos^{-5} x \, d(\cos x) + \int \cos^{-3} x \, d(\cos x) \\
 &= -\frac{\cos^{-4} x}{-4} + \frac{\cos^{-2} x}{-2} + c \\
 &= \frac{1}{4 \cos^4 x} - \frac{1}{2 \cos^2 x} + c \\
 &= \frac{1}{4} \sec^4 x - \frac{1}{2} \sec^2 x + c \quad \# \#
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 25 จงหาค่า $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \int \sin^2 x (\cos^2 x)^2 \, dx \\
 &= \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \right] \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right]^2 \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2 \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx \quad \# \#
 \end{aligned}$$

5.3 การหาปริพันธ์ของ $\int \tan^m x \sec^n x dx$ และ $\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x dx$ แบ่งเป็น 3 กรณี

กรณีที่ 1 ถ้า n เป็นจำนวนคู่บวก

❖ ถ้าจะหาค่า $\int \tan^m x \sec^n x dx$ ให้เขียน $\sec^n x = \sec^{n-2} x \cdot \sec^2 x$

แล้วแทนค่า $\sec^{n-2} x$ ด้วยสูตร $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

❖ ถ้าจะหาค่า $\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x dx$ ให้เขียน $\operatorname{cosec}^n x = \operatorname{cosec}^{n-2} x \cdot \operatorname{cosec}^2 x$

แล้วแทนค่า $\operatorname{cosec}^{n-2} x$ ด้วยสูตร $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$

กรณีที่ 2 ถ้า m เป็นจำนวนคี่บวก

❖ ถ้าจะหาค่า $\int \tan^m x \sec^n x dx$ ให้เขียน $\tan^m x = \tan^{m-1} x \cdot \tan x$ แล้วแทนค่า

$\tan^{m-1} x$ ด้วยสูตร $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ และใช้ความรู้ $d(\sec x) = \sec x \tan x dx$

❖ ถ้าจะหาค่า $\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x dx$ ให้เขียน $\cot^m x = \cot^{m-1} x \cdot \cot x$ แล้วแทนค่า

$\cot^{m-1} x$ ด้วยสูตร $\cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$ และใช้ความรู้ $d(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x dx$

กรณีที่ 3 ถ้า m เป็นจำนวนคู่บวก และ n เป็นจำนวนคี่บวก

❖ ถ้าจะหาค่า $\int \tan^m x \sec^n x dx$ ให้แทนค่า $\tan^m x$ ด้วยสูตร $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

แล้วใช้สูตรลดทอนหาค่าปริพันธ์

❖ ถ้าจะหาค่า $\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x dx$ ให้แทนค่า $\cot^m x$ ด้วยสูตร $\cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$

แล้วใช้สูตรลดทอนหาค่าปริพันธ์

ตัวอย่างที่ 26 จงหาค่า $\int \tan^{-\frac{1}{2}} x \sec^4 x dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \int \tan^{-\frac{1}{2}} x \sec^4 x dx &= \int \tan^{-\frac{1}{2}} x \sec^2 x (\sec^2 x dx) \\ &= \int \tan^{-\frac{1}{2}} x (1 + \tan^2 x) d(\tan x) \\ &= \int (\tan^{-\frac{1}{2}} x + \tan^{\frac{3}{2}} x) d(\tan x) \\ &= \int \tan^{-\frac{1}{2}} x d(\tan x) + \int \tan^{\frac{3}{2}} x d(\tan x) \\ &= \frac{\tan^{\frac{1}{2}} x}{\frac{1}{2}} + \frac{\tan^{\frac{5}{2}} x}{\frac{5}{2}} + c \\ &= 2 \tan^{\frac{1}{2}} x + \frac{2}{5} \tan^{\frac{5}{2}} x + c \end{aligned}$$

##

ตัวอย่างที่ 27 จงหาค่า $\int \cot^5 x \operatorname{cosec}^4 x \, dx$

วิธีทำ $\int \cot^5 x \operatorname{cosec}^4 x \, dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int \cot^4 x \operatorname{cosec}^3 x (\operatorname{cosec} x \cot x \, dx) \\
 &= - \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)^2 \operatorname{cosec}^3 x (-\operatorname{cosec} x \cot x \, dx) \\
 &= - \int (\operatorname{cosec}^4 x - 2\operatorname{cosec}^2 x + 1) \operatorname{cosec}^3 x d(\operatorname{cosec} x) \\
 &= - \int (\operatorname{cosec}^7 x - 2\operatorname{cosec}^5 x + \operatorname{cosec}^3 x) d(\operatorname{cosec} x) \\
 &= - \int \operatorname{cosec}^7 x \, d(\operatorname{cosec} x) + 2 \int \operatorname{cosec}^5 x \, d(\operatorname{cosec} x) - \int \operatorname{cosec}^3 x \, d(\operatorname{cosec} x) \\
 &= -\frac{1}{8} \operatorname{cosec}^8 x + \frac{1}{3} \operatorname{cosec}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{cosec}^4 x + c \quad \# \#
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 28 จงหาค่า $\int \cot^2 x \operatorname{cosec}^3 x \, dx$

วิธีทำ $\int \cot^2 x \operatorname{cosec}^3 x \, dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \operatorname{cosec}^3 x \, dx \\
 &= \int \operatorname{cosec}^5 x \, dx - \int \operatorname{cosec}^3 x \, dx \\
 &= \left[-\frac{1}{4} \operatorname{cosec}^3 x \cot x + \frac{3}{4} \int \operatorname{cosec}^3 x \, dx \right] - \int \operatorname{cosec}^3 x \, dx \\
 &= -\frac{1}{4} \operatorname{cosec}^3 x \cot x + \frac{3}{4} \int \operatorname{cosec}^3 x \, dx - \int \operatorname{cosec}^3 x \, dx \\
 &= -\frac{1}{4} \operatorname{cosec}^3 x \cot x - \frac{1}{4} \int \operatorname{cosec}^3 x \, dx \\
 &= -\frac{1}{4} \operatorname{cosec}^3 x \cot x - \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{cosec} x \cot x + \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec} x \, dx \right] \\
 &= -\frac{1}{4} \operatorname{cosec}^3 x \cot x + \frac{1}{8} \operatorname{cosec} x \cot x - \frac{1}{8} \int \operatorname{cosec} x \, dx \\
 &= -\frac{1}{4} \operatorname{cosec}^3 x \cot x + \frac{1}{8} \operatorname{cosec} x \cot x - \frac{1}{8} \ln |\operatorname{cosec} x - \cot x| + c \quad \# \#
 \end{aligned}$$

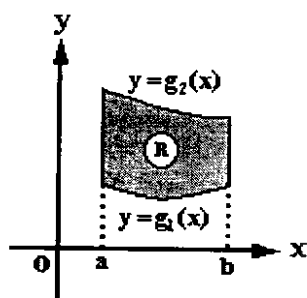
2.2.3 ทบทวนการหาปริพันธ์สองชั้น

นิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันของ x และ y ที่มีความต่อเนื่องบนบริเวณ R

ปริพันธ์ของ f บน R เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\iint_R f(x,y) dA$

$$\text{กำหนดโดย } \iint_R f(x,y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$$

บริเวณรูปแบบที่ 1

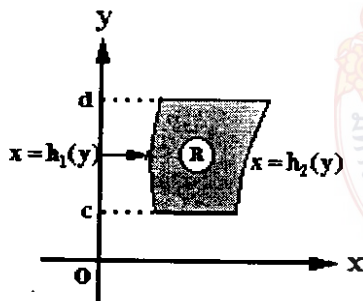


จากรูป R เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

$y = g_1(x), y = g_2(x)$, เส้นตรง $x = a$ และ

เส้นตรง $x = b$ เมื่อ $g_1(x)$ และ $g_2(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $g_1(x) \leq g_2(x)$ ทุกค่า $x \in [a,b]$ เราจะเรียกบริเวณ R ในรูปนี้ว่า บริเวณรูปแบบที่ 1 (Type I)

บริเวณรูปแบบที่ 2



จากรูป R เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

$x = h_1(y), x = h_2(y)$, เส้นตรง $y = c$ และ

เส้นตรง $y = d$ เมื่อ $h_1(y)$ และ $h_2(y)$ ต่อเนื่องบนช่วง $[c,d]$ และ $h_1(y) \leq h_2(y)$ ทุกค่า $y \in [c,d]$ เราจะเรียกบริเวณ R ในรูปนี้ว่า บริเวณรูปแบบที่ 2 (Type II)

ทฤษฎี ให้ $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนบริเวณ R

1. ถ้า R เป็นบริเวณรูปแบบที่ 1 แล้วจะได้ว่า

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$$

2. ถ้า R เป็นบริเวณรูปแบบที่ 2 แล้วจะได้ว่า

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$$

วิธีการหาค่าปริพันธ์สองชั้น ทำดังนี้

ถ้าต้องการหาค่า $\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx$ ขั้นแรกให้หาค่า $\int_c^d f(x,y) dy$ ก่อน ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้

หลังจากการแทนค่า y ด้วย d และ c จะเป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว แล้วจึงหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x อีกครั้งหนึ่ง

ถ้าต้องการหาค่า $\int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy$ ขั้นแรกให้หาค่า $\int_a^b f(x,y) dx$ ก่อน ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้

หลังจากการแทนค่า x ด้วย b และ a จะเป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว แล้วจึงหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร y อีกครั้งหนึ่ง

สรุปการหาค่าปริพันธ์สองชั้น

ในการหาค่าปริพันธ์สองชั้น สรุปได้ว่าให้หาค่าปริพันธ์ทีละชั้น โดยเริ่มหาค่าปริพันธ์จากข้างใน ออกสู่ข้างนอก และในการหาค่าปริพันธ์แต่ละชั้น ให้พิจารณาว่าขณะนั้น อะไรคือตัวแปร อะไรคือค่าคงตัว โดยดูที่ดิฟเฟอเรนเชียล เช่น

ถ้าเป็น dx จะถือว่าขณะนั้น x เป็นตัวแปร และ y เป็นค่าคงตัว

ถ้าเป็น dy จะถือว่าขณะนั้น y เป็นตัวแปร และ x เป็นค่าคงตัว

แล้วหาปริพันธ์โดยใช้สูตรหรือใช้วิธีการเช่นเดียวกับการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า $\int_0^1 \int_0^2 (x+4) dy dx$

วิธีคิด ขั้นแรกให้หาค่า $\int_0^2 (x+4) dy$ ก่อน โดยถือว่า y เป็นตัวแปร และ x เป็นค่าคงตัว เมื่อได้

ผลลัพธ์ซึ่งอยู่ในรูปฟังก์ชัน x อย่างเดียวแล้ว จึงหาปริพันธ์เทียบกับ x อีกครั้ง

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \int_0^1 \int_0^2 (x+4) dy dx &= \int_0^1 \left[\int_0^2 (x+4) dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 [xy + 4y]_{y=0}^{y=2} dx \\
 &= \int_0^1 (2x + 8) dx \\
 &= [x^2 + 8x]_0^1 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า $\int_2^5 \int_0^4 e^{x+y} dx dy$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \int_2^5 \int_0^4 e^{x+y} dx dy &= \int_2^5 \left[\int_0^4 e^{x+y} d(x+y) \right] dy &= \int_2^5 \left[e^{x+y} \right]_{x=0}^{x=4} dy \\ &= \int_2^5 (e^{4+y} - e^y) dy &= \int_2^5 e^{4+y} d(4+y) - \int_2^5 e^y dy \\ &= \left[e^{4+y} - e^y \right]_2^5 &= e^9 - e^5 - e^6 + e^2 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่า $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy dy dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy dy dx &= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy dy \right] dx &= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x(\sqrt{x})^2}{2} - \frac{x(x^2)^2}{2} \right] dx &= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{12} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่า $\int_1^3 \int_{1-y}^{y-1} (2x - y^2) dx dy$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \int_1^3 \int_{1-y}^{y-1} (2x - y^2) dx dy &= \int_1^3 \left[\int_{1-y}^{y-1} xy dy \right] dx &= \int_1^3 \left[x^2 - y^2 x \right]_{1-y}^{y-1} dy \\ &= \int_1^3 (2y^2 - 2y^3) dy &= \left[\frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{2} \right]_1^3 \\ &= -\frac{68}{3} \end{aligned}$$

2.3 การหาปริมาตร

2.3.1 จุดประสงค์การหาปริมาตร

1. เขียนรูปทรง 3 มิติที่จะหาปริมาตรได้
2. บอกสูตรการหาปริมาตรได้
3. สรุปขั้นตอนการหาปริมาตรได้
4. ใช้ลิมิตการหาปริพันธ์สองชั้นในการหาปริมาตรได้
5. หาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้นระบบพิกัดฉากได้

2.3.2 การเขียนรูปทรง 3 มิติเพื่อหาปริมาตร

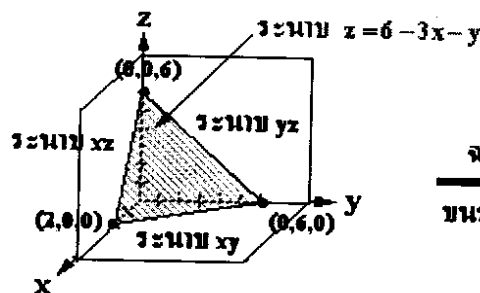
ให้เขียนผิวที่โจทย์กำหนด เมื่อประกอบกันจะได้รูปทรง 3 มิติที่จะหาปริมาตร

การเขียนภาพฉายบนระนาบ ให้ฉายภาพรูปทรง 3 มิติที่จะหาปริมาตรบนระนาบใดระนาบหนึ่ง แต่นิยมฉายบนระนาบ xy

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนรูปทรงสามมิติในอวกาศที่ 1 ซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบ $z = 6 - 3x - y$ และเขียนภาพฉายบนระนาบ xy

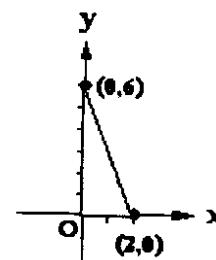
วิธีทำ เขียนรูปทรงสามมิติ จะได้ดังรูป 1(a) และฉายภาพจะได้ดังรูป 1(b) โดยวิเคราะห์ดังนี้

- อวกาศที่ 1 คือส่วนที่ถูกล้อมรอบด้วยระนาบพิกัด xy ระนาบพิกัด xz และระนาบพิกัด yz
- การเขียนระนาบ $z = 6 - 3x - y$ ให้หาจุดตัดบนแกน x แกน y และแกน z
- การหาจุดตัดบนแกน x ให้แทนค่า $y = 0$ และ $z = 0$ ใน $z = 6 - 3x - y$ จะได้ $x = 2$
- การหาจุดตัดบนแกน y ให้แทนค่า $x = 0$ และ $z = 0$ ใน $z = 6 - 3x - y$ จะได้ $y = 6$
- การหาจุดตัดบนแกน z ให้แทนค่า $x = 0$ และ $y = 0$ ใน $z = 6 - 3x - y$ จะได้ $z = 6$



รูปที่ 1(a)

ฉายภาพ
บนระนาบ xy

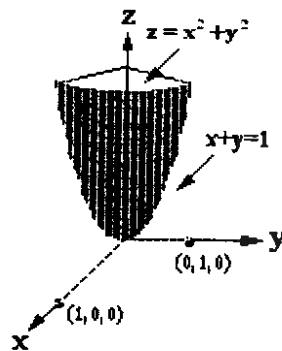


รูปที่ 1(b)

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนรูปทรงสามมิติ ซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบ $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$ และผิว $z=x^2+y^2$ และเขียนภาพฉายบนระนาบ xy

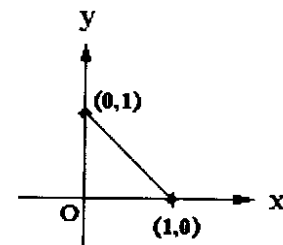
วิธีทำ เขียนรูปทรงสามมิติ จะได้ดังรูป 2(a) และฉายภาพจะได้ดังรูป 2(b) โดยวิเคราะห์ดังนี้

- ระนาบ $x=0$ คือระนาบ yz , ระนาบ $y=0$ คือระนาบ xz และระนาบ $z=0$ คือระนาบ xy
- ผิว $z=x^2+y^2$ เป็นผิวทรงพาราโบลาเชิงวงรี จุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0,0)$
- ระนาบ $x+y=1$ เป็นระนาบที่ตัดแกน x ที่ $x=1$, ตัดแกน y ที่ $y=1$ และขนานแกน z



รูปที่ 1(a)

ฉายภาพ
บนระนาบ xy

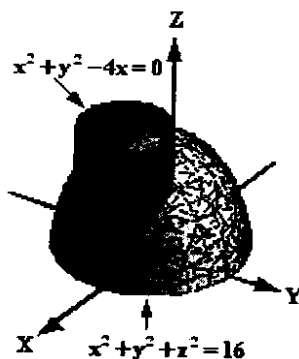


รูปที่ 1(b)

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนรูปทรงสามมิติ ซึ่งล้อมรอบด้วยครึ่งบนของทรงกลม $x^2+y^2+z^2=16$ และทรงกระบอก $x^2+y^2-4x=0$ และเขียนภาพฉายบนระนาบ xy

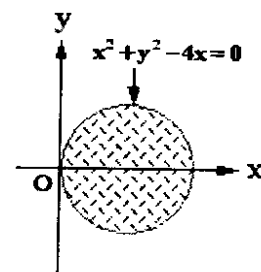
วิธีทำ เขียนรูปทรงสามมิติ จะได้ดังรูป 2(a) และฉายภาพจะได้ดังรูป 2(b) โดยวิเคราะห์ดังนี้

- กราฟของ $x^2+y^2+z^2=16$ เป็นผิวทรงกลม จุดศูนย์กลาง $(0,0,0)$ รัศมี = 4 หน่วย
- กราฟของ $x^2+y^2-4x=0$ ซึ่งจัดเข้ารูปมาตรฐานจะได้ $(x-2)^2+(y-0)^2=2^2$ เป็นผิวทรงกระบอกกลม จุดศูนย์กลาง $(2,0,0)$, รัศมี 2 หน่วย, ขนานแกน z



รูปที่ 2(a)

ฉายภาพ
บนระนาบ xy

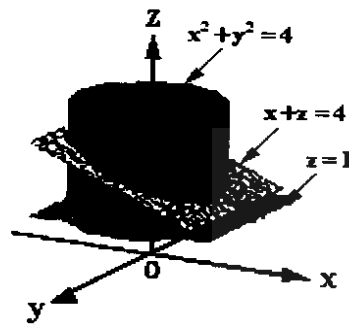


รูปที่ 2 (b)

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนรูปทรงสามมิติ ซึ่งล้อมรอบด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$,ระนาบ $z = 1$
และระนาบ $x + z = 4$ และเขียนภาพฉายบนระนาบ xy

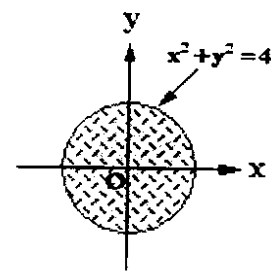
วิธีทำ เขียนรูปทรงสามมิติ จะได้ดังรูป 3(a) และฉายภาพจะได้ดังรูป 3(b) โดยวิเคราะห์ดังนี้

- กราฟของ $x^2 + y^2 = 4$ เป็นผิวทรงกระบอกตามแนวแกน z
- กราฟของ $z = 1$ เป็นระนาบที่ขนานกับระนาบ xy และอยู่ห่างจากระนาบ $xy = 1$ หน่วย
- กราฟของ $x + z = 4$ เป็นระนาบที่ตัดแกน x ที่จุด $(4,0,0)$ และตัดแกน z ที่จุด $(0,0,4)$



รูปที่ 3(a)

ฉายภาพ
บนระนาบ xy

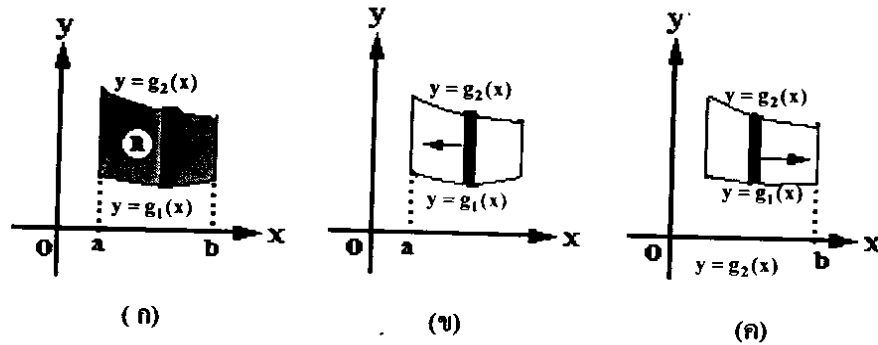


รูปที่ 3(b)

2.3.3 การใส่ลิมิตปริพันธ์สองชั้น

ในการหาค่าปริพันธ์สองชั้น สิ่งที่สำคัญคือการใส่ลิมิต โดยพิจารณาดังนี้

- เมื่อ R เป็นบริเวณรูปแบบที่ 1 การใส่ลิมิตให้ทำตามขั้นตอน ดังนี้



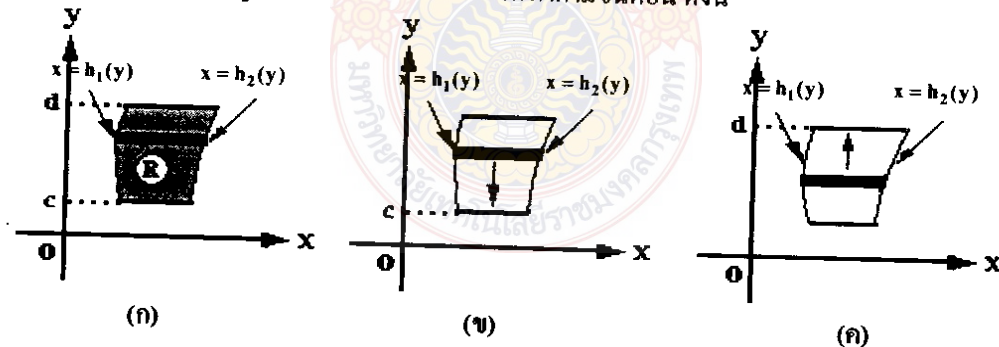
รูปที่ 1

- ให้ลากเส้นขนานแกน y (เรียกว่า Strip) ดังรูป 1 (ก) อ่านค่า y ที่ปลายของ Strip จาก y ของเส้นโค้งล่างไปยัง y ของเส้นโค้งบน ซึ่งจะเป็นค่าลิมิตล่าง และ ลิมิตบนของปริพันธ์ชั้นใน ตามลำดับ
- พิจารณา Strip ในชั้นที่ 1 ลากตั้งแต่ค่า x เท่าใดถึงเท่าใด จากซ้ายไปขวาในบริเวณ R ดังรูปที่ 1 (ข) และ 1 (ค) จะเป็นค่าลิมิตล่าง และลิมิตบน ของปริพันธ์ชั้นนอก ตามลำดับ

นั่นคือ

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$$

- เมื่อ R เป็นบริเวณรูปแบบที่ 2 การใส่ลิมิตให้ทำตามขั้นตอน ดังนี้



รูปที่ 2

- ให้ลากเส้นขนานแกน x (เรียกว่า Strip) ดังรูป 2 (ก) อ่านค่า x ที่ปลายของ Strip จากซ้ายไปขวา เป็นลิมิตปริพันธ์ชั้นใน
- พิจารณา Strip ในชั้นที่ 1 ลากตั้งแต่ค่า y เท่าใดถึงเท่าใด จากล่างขึ้นบนในบริเวณ R ดังรูปที่ 2 (ข) และ 2 (ค) จะเป็นค่าลิมิตของปริพันธ์ชั้นนอก ตามลำดับ

นั่นคือ

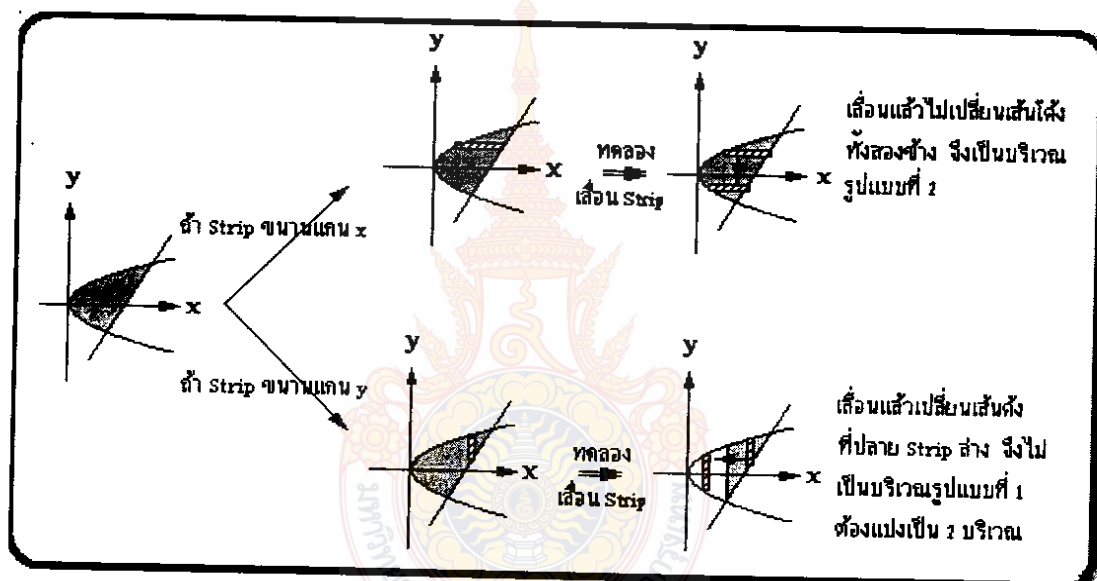
$$\iint_R f(x,y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$$

การพิจารณาบริเวณรูปแบบที่ 1 หรือ บริเวณรูปแบบที่ 2

ในการพิจารณาว่าบริเวณใดบริเวณหนึ่ง จะเป็นบริเวณรูปแบบที่ 1 ให้ Strip ขนานแกน y แล้วทดลองเลื่อน Strip จากซ้ายไปขวาให้เต็มบริเวณนั้น ถ้าปลาย Strip ทั้งสองข้างยังคงติดเส้นโค้งเดิม แสดงว่าบริเวณนั้นเป็นบริเวณรูปแบบที่ 1

ในทำนองเดียวกัน การพิจารณาว่าบริเวณใดบริเวณหนึ่งจะเป็นบริเวณรูปแบบที่ 2 ให้ Strip ขนานแกน x แล้วทดลองเลื่อน Strip จากล่างขึ้นบนให้เต็มบริเวณนั้น ถ้าปลาย Strip ทั้งสองข้างยังคงติดเส้นโค้งเดิม แสดงว่าบริเวณนั้นเป็นบริเวณรูปแบบที่ 2

ตัวอย่างการพิจารณาว่าบริเวณใดบริเวณหนึ่ง จะเป็นบริเวณรูปแบบที่ 1 หรือ บริเวณรูปแบบที่ 2 แต่ถ้าพิจารณาแล้วไม่เป็นทั้งสองแบบ จะต้องแบ่งบริเวณนั้นให้เป็นแบบใดแบบหนึ่งให้ได้



สรุป การใส่ลิมิตปริพันธ์สองชั้น ระบบพิกัดฉาก

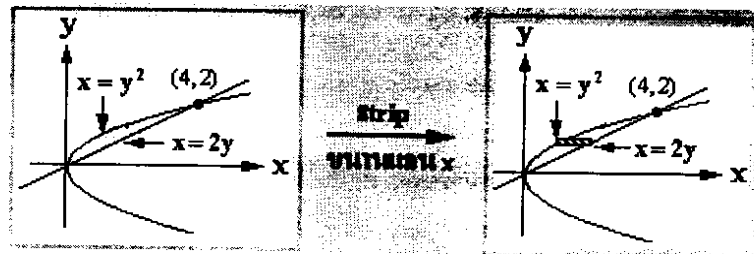
การใส่ลิมิตปริพันธ์สองชั้น ให้ใส่ลิมิตชั้นในก่อน แล้วจึงใส่ลิมิตชั้นนอก

- ถ้า Strip ขนานแกน y ให้อ่านค่า y ที่จุดปลายของ Strip จากเส้นโค้งล่างขึ้นบน จะเป็นลิมิตชั้นใน และอ่านค่า x โดยเลื่อน Strip จากซ้ายไปขวาให้เต็มบริเวณ R จะเป็นลิมิตชั้นนอก ซึ่งเป็นค่าคงตัว
- ถ้า Strip ขนานแกน x ให้อ่านค่า x ที่จุดปลายของ Strip จากเส้นโค้งซ้ายไปขวา จะเป็นลิมิตชั้นใน และอ่านค่า y โดยเลื่อน Strip จากล่างขึ้นบนให้เต็มบริเวณ R จะเป็นลิมิตชั้นนอก ซึ่งเป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 1 จากรูป 3 จงใส่ลำดับของการหาพื้นที่บริเวณที่แรเงา

วิธีคิด บริเวณที่แรเงาของรูปที่ 3 ไม่ว่าจะเลือก Strip ขนานแกน x หรือขนานแกน y ก็ตาม เมื่อทดลองเลื่อน Strip จะไม่มีการเปลี่ยนเส้นโค้งที่ปลาย Strip, ทั้งสองข้าง จึงใช้ได้ ไม่ต้องแบ่งบริเวณที่แรเงา

วิธีทำ



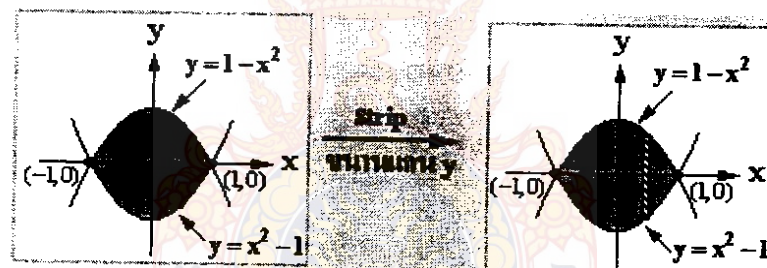
รูปที่ 3

$$\text{สูตร} \quad A = \iint_R dA = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=y^2}^{x=2y} dx dy = \int_0^2 \int_{y^2}^{2y} dx dy$$

ตัวอย่างที่ 2 จากรูป 4 จงใส่ลำดับของการหาพื้นที่บริเวณที่แรเงา

วิธีคิด สำหรับพื้นที่รูปที่ 4 นี้ ถ้าเลือก Strip ขนานแกน y เมื่อทดลองเลื่อน Strip จะไม่มีการเปลี่ยนเส้นโค้งที่ปลาย Strip จึงไม่ต้องแบ่งบริเวณพื้นที่ แต่ถ้าเลือก Strip ขนานแกน x เมื่อเลื่อน Strip ผ่านแกน x จะมีการเปลี่ยนเส้นโค้งที่ปลาย Strip ทั้งสองข้าง จึงต้องแบ่งบริเวณพื้นที่ ซึ่งจะยุ่งยากกว่า ดังนั้นในที่นี้จะเลือก Strip ขนานแกน y

วิธีทำ



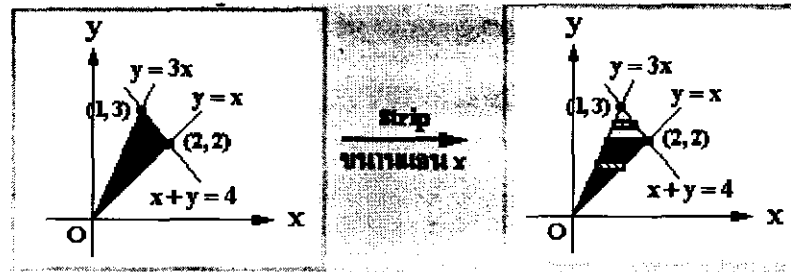
รูป 4

$$\text{สูตร} \quad \iint_R dA = \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=x^2-1}^{y=1-x^2} dy dx = \int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^{1-x^2} dy dx$$

ตัวอย่างที่ 3 จากรูป 5 จงได้ลิมิตของการหาพื้นที่บริเวณที่แรเงา

วิธีคิด สำหรับพื้นที่รูปนี้ ไม่ว่าจะเลือก Strip แบบใดก็ตาม จะต้องแบ่งบริเวณพื้นที่เสมอ
ในที่นี้จะเลือก Strip ขนานแกน x

วิธีทำ



รูปที่ 5

$$\begin{aligned}
 \text{สูตร} \quad A &= \iint_R dA = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=\frac{y}{3}}^{x=y} dx dy + \int_{y=2}^{y=3} \int_{x=\frac{y}{3}}^{x=4-y} dx dy \\
 &= \int_0^2 \int_{\frac{y}{3}}^y dx dy + \int_2^3 \int_{\frac{y}{3}}^{4-y} dx dy
 \end{aligned}$$

2.3.4 การหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระบบพิกัดฉาก

กรณีที่ 1 ให้ S เป็นทรงสามมิติซึ่งอยู่ใต้พื้นผิว $z = f(x, y)$ และอยู่เหนือบริเวณ R
 V เป็นปริมาตรของทรงสามมิติ S

ถ้า $f(x, y) \geq 0$ และ f มีความต่อเนื่องบนบริเวณ R

ถ้า R เป็นบริเวณรูป แบบที่ 1 หรือ 2 จะได้ $V = \iint_R f(x, y) dA$

กรณีที่ 2 ให้ S เป็นทรงสามมิติที่ถูกล้อมรอบด้วยผิวสองผิวที่ตัดกันคือ $z = f_1(x, y)$
 และ $z = f_2(x, y)$ โดยที่ $0 \leq f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$

V เป็นปริมาตรของทรงสามมิติ S

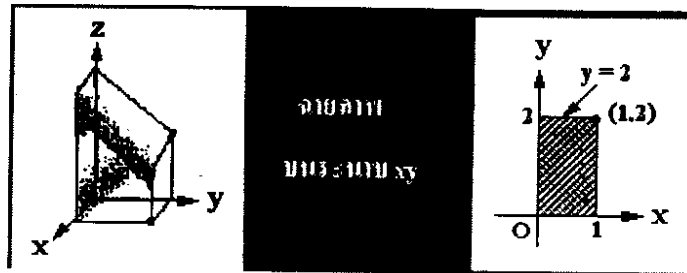
R เป็นภาพฉายของปริมาตรบนระนาบ xy ซึ่งเป็นบริเวณที่ถูกล้อมรอบด้วย
 เส้นโค้งที่เป็นรอยตัดระหว่างผิวทั้งสอง จะได้

$$V = \iint_R [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dA$$

สรุป การหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

1. เขียนรูปทรงสามมิติ โดยเขียนผิวที่โจทย์กำหนด
2. เขียนภาพฉายของปริมาตรบนระนาบ xy
3. สูตร $V = \iint_R f(x, y) dA$ หรือ $V = \iint_R [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dA$
 โดยที่ $dA = dydx$ เมื่อ Strip ขนานแกน y
 $dA = dx dy$ เมื่อ Strip ขนานแกน x
4. ใส่ค่าลิมิต
5. หาค่าปริพันธ์

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปที่ 1 จงหาปริมาตรในอวกาศที่ 1 ที่อยู่ภายใต้ผิว $z = 4 - x^2 - y$
บนบริเวณ $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$



$$\begin{aligned}
 \text{สูตร} \quad V &= \iint_R f(x, y) dA = \iint_R (4 - x^2 - y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^2 (4 - x^2 - y) dy dx = \int_0^1 \left[4y - x^2y - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx \\
 &= \int_0^1 (8 - 2x^2 - 2) dx = \left[6x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= \frac{16}{3} \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาปริมาตรของทรงสามมิติในอวกาศที่ 1 ซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบ $z = 6 - 3x - y$
วิธีทำ

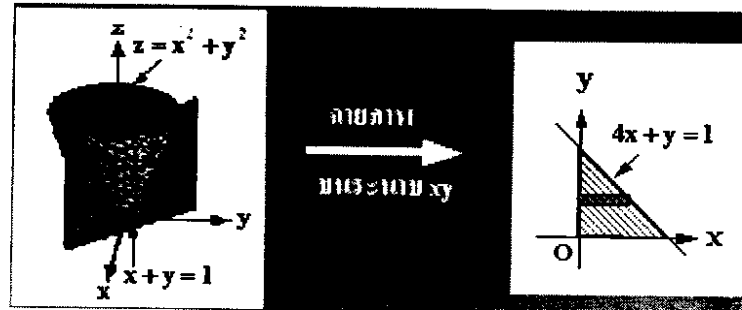


เลือก Stripขนานแกน y

$$\begin{aligned}
 \text{สูตร} \quad V &= \iint_R f(x, y) dA = \iint_R (6 - 3x - y) dy dx \\
 &= \int_0^2 \int_0^{6-3x} (6 - 3x - y) dy dx = \int_0^2 \left[6y - 3xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{6-3x} dx \\
 &= \int_0^2 \left(18 - 18x + \frac{9x^2}{2} \right) dx = \left[18x - 9x^2 + \frac{3x^3}{2} \right]_0^2 \\
 &= 12 \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาปริมาตรของทรงสามมิติ ซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบพิกัดทั้งสาม ผิว $z = x^2 + y^2$ และระนาบ $x + y = 1$ (ไม่ต้องหาค่าปริพันธ์)

วิธีทำ



เลือก Stripขนานแกน x

$$\begin{aligned}
 \text{สูตร} \quad V &= \iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy \\
 &= \iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} (x^2 + y^2) dx dy
 \end{aligned}$$



3. แบบทดสอบ



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

แบบทดสอบ “วัดความรู้พื้นฐาน”

วิชา แคลคูลัส (ปริมาตร)

จำนวน 40 ข้อ

เวลา 2 ชั่วโมง

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด โดย X ทับข้อนั้น

1. กราฟของสมการในข้อใดเป็นเส้นตรง

① $x - y = 4$

② $xy = 4$

③ $x^2 + y = 4$

④ $x^2 - y^2 = 4$

2. กราฟของสมการในข้อใดเป็นวงกลม

① $xy = 2$

② $x^2 + y = 2$

③ $x^2 + y^2 = 2$

④ $x^2 - y^2 = 2$

3. กราฟของสมการในข้อใดเป็นพาราโบลา

① $x + y^2 = 3$

② $x + y = 3$

③ $x^2y = 3$

④ $xy^2 = 3$

4. กราฟของสมการ $x + 3y = 6$ ตัดแกน x ตรงกับข้อใด

① $x = 2$

② $x = 3$

③ $x = -3$

④ $x = 6$

5. กราฟของสมการ $x + 3y = 6$ ตัดแกน y ตรงกับข้อใด

① $y = 2$

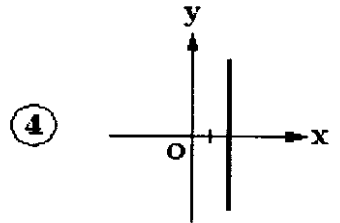
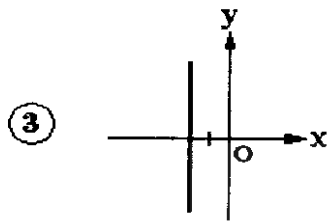
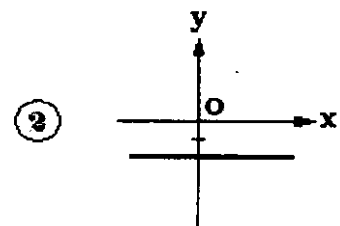
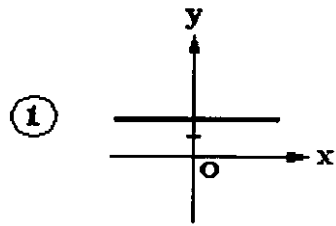
② $y = 3$

③ $y = -3$

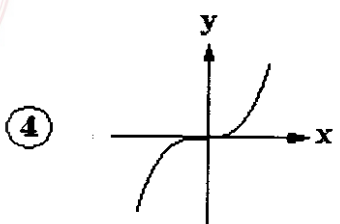
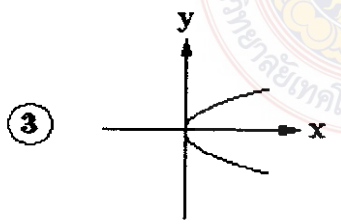
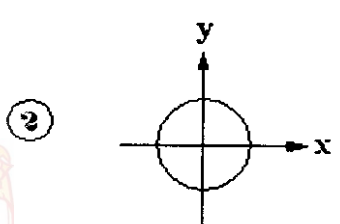
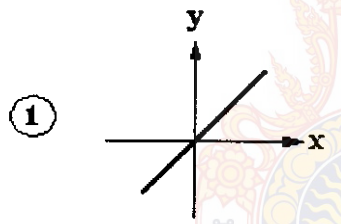
④ $y = 6$

6. กราฟของสมการ $y = 3x - x^2$ ตัดแกน x ตรงกับข้อใด
- (1) $x = 0, 1$ (2) $x = 0, 3$
- (3) $x = 1, 3$ (4) $x = -3, 3$
7. กราฟของสมการ $x^2 = y + 1$ ตัดแกน y ตรงกับข้อใด
- (1) $y = 0$ (2) $y = 1$
- (3) $y = -1$ (4) $y = 2$
8. กราฟของสมการในข้อใดเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(0, 0)$
- (1) $x + y^2 - 1 = 0$ (2) $x^2 + y^2 - 1 = 0$
- (3) $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (4) $x^2 y^2 - 1 = 0$
9. กราฟของสมการในข้อใดเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(2, 1)$ และรัศมี $= 2$ หน่วย
- (1) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ (2) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$
- (3) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ (4) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$
10. กราฟของสมการในข้อใดเป็นพาราโบลา ที่มีจุดยอด $(0, 0)$
- (1) $x^2 + y^2 = 0$ (2) $x + y^2 = 0$
- (3) $xy^2 = 0$ (4) $x^2 - y = 3$
11. กราฟของสมการในข้อใดเป็นพาราโบลาคู่
- (1) $x^2 + y - 4 = 0$ (2) $x + y^2 - 4 = 0$
- (3) $x^2 - y - 4 = 0$ (4) $x - y^2 - 4 = 0$
12. กราฟของสมการในข้อใดเป็นพาราโบลาตัดแก่งาน จุดยอด $(-1, 3)$
- (1) $(x+1) = (y-3)^2$ (2) $(x-1) = (y+3)^2$
- (3) $(y+1) = (x-3)^2$ (4) $(y-1) = (x+3)^2$

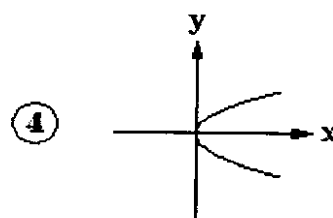
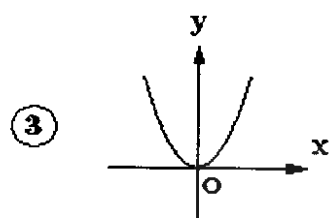
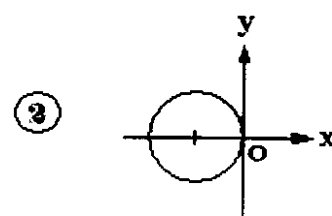
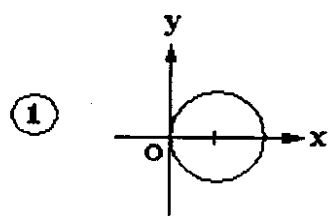
13. กราฟของสมการ $x = 2$ ตรงกับข้อใด



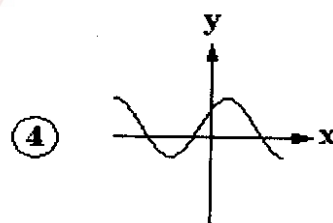
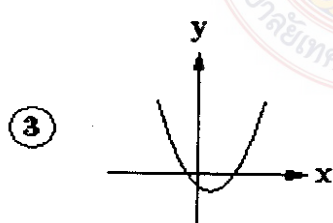
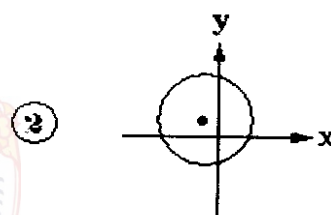
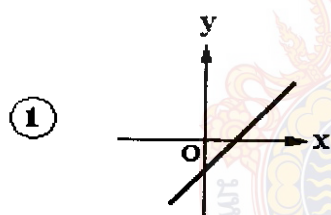
14. กราฟของสมการ $x^2 + y^2 = 2$ ตรงกับข้อใด



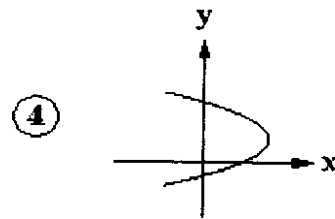
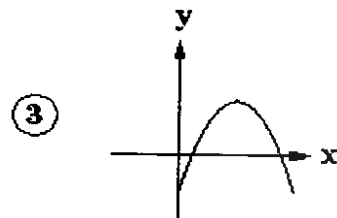
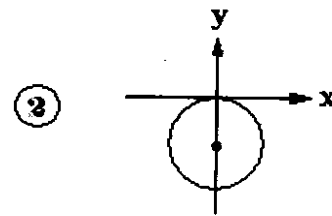
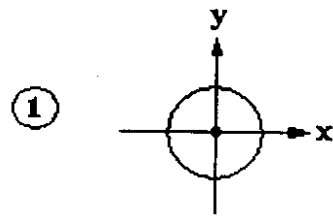
15. กราฟของสมการ $x = y^2$ ตรงกับข้อใด



16. กราฟของสมการ $y = x - 1$ ตรงกับข้อใด



17. กราฟของสมการ $y = -x^2 + 4x - 1$ ตรงกับข้อใด



18. จุดตัดระหว่างกราฟ $x + y = 6$ และ $x + 2y = 8$ ตรงกับข้อใด

① จุด (2,4)

② จุด (4,2)

③ จุด (1,3)

④ จุด (3,1)

19. จุดตัดระหว่างกราฟ $y = x^2$ และ $y = x$ ตรงกับข้อใด

① จุด (1,1) และ (-1,-1)

② จุด (1,-1) และ (-1,1)

③ จุด (0,0) และ (-1,-1)

④ จุด (0,0) และ (1,1)

20. จุดตัดระหว่างกราฟ $y^2 = 4 - x$ และ $y^2 = 4 - 4x$ ตรงกับข้อใด

① จุด (0,4) และ (0,-4)

② จุด (0,2) และ (0,-2)

③ จุด (4,0) และ (-4,0)

④ จุด (2,0) และ (-2,0)

21. จุดตัดระหว่างกราฟ $y = 2x^2 - 9$ และ $y = 6x - x^2$ ตรงกับข้อใด

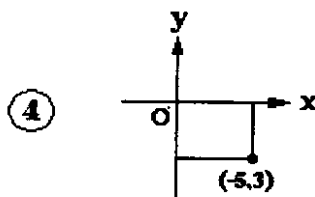
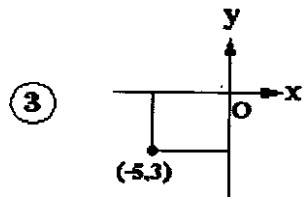
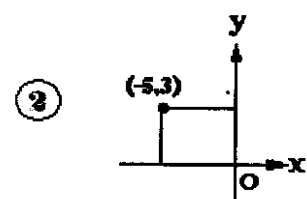
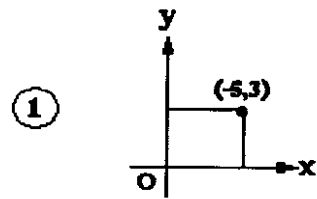
① จุด (1,7) และ (-3,9)

② จุด (1,-7) และ (3,-9)

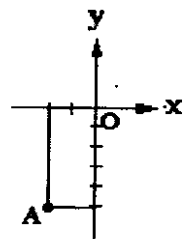
③ จุด (-1,-7) และ (3,9)

④ จุด (-1,7) และ (-3,-9)

22. จุด $(-5, 3)$ เขียนแล้วตรงกับข้อใด



23. จากรูป จุด A มีพิกัดตรงกับข้อใด



① $(2, -5)$

② $(-2, 5)$

③ $(2, 5)$

④ $(-2, -5)$

24. จุด $(7, -3)$ อยู่ในจุดภาค (Quadrant) ตรงกับข้อใด

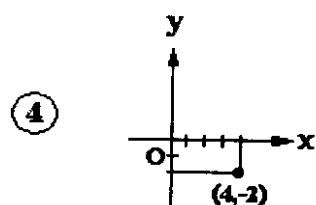
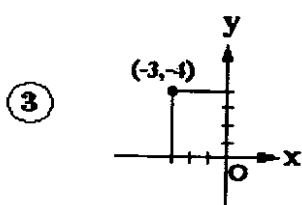
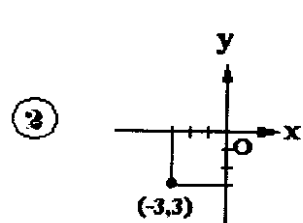
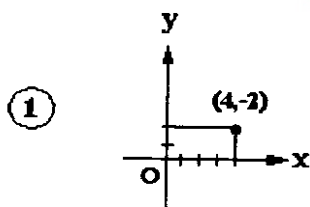
① จุดภาคที่ 1 (Q_1)

② จุดภาคที่ 2 (Q_2)

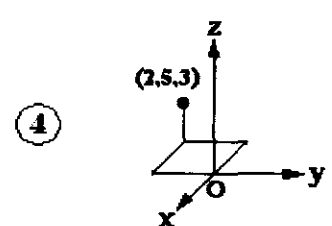
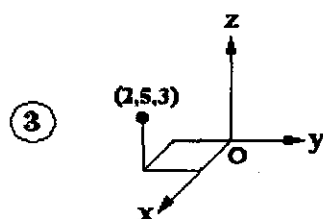
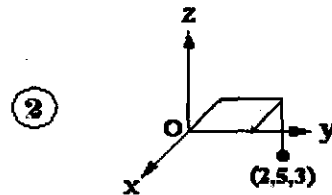
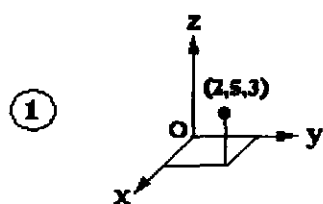
③ จุดภาคที่ 3 (Q_3)

④ จุดภาคที่ 4 (Q_4)

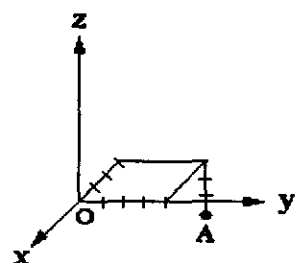
25. ข้อใดถูก



26. จุด $(2, 5, 3)$ เขียนด้วยตรงกับข้อใด



27. จากรูป จุด A มีพิกัดตรงกับข้อใด



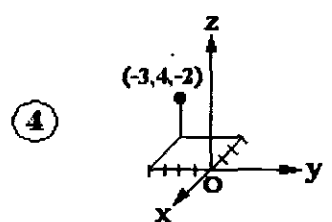
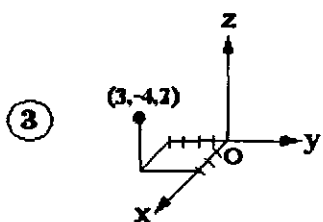
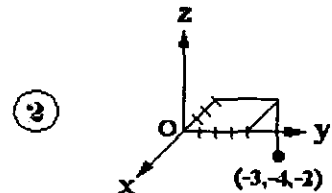
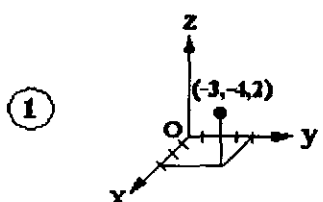
① $A(3, 4, 3)$

② $A(-3, 4, -3)$

③ $A(-3, -4, 3)$

④ $A(3, -4, -3)$

28. ข้อใดถูก



29. กราฟของ $x = 5$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด

- | | |
|-------------|----------|
| ① ระนาบ | ② ทรงกลม |
| ③ ทรงกระบอก | ④ ทรงรี |

30. กราฟของ $x^2 + y^2 = 6$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด

- | | |
|-------------|----------|
| ① ระนาบ | ② ทรงกลม |
| ③ ทรงกระบอก | ④ ทรงรี |

31. กราฟของ $3x^2 + y^2 - 9z^2 = 9$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด

- | | |
|----------------|------------------------------|
| ① ทรงรี | ② ทรงไฮเพอร์โบลานิคชั้นเดียว |
| ③ กรวยเชิงวงรี | ④ ทรงไฮเพอร์โบลานิคสองชั้น |

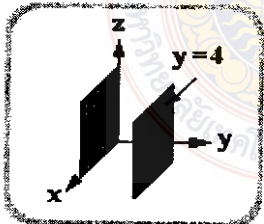
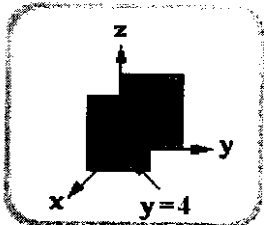
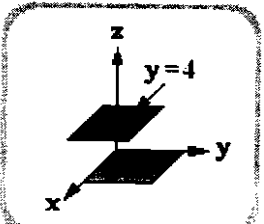
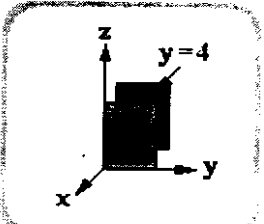
32. กราฟของ $x^2 + y^2 = z$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด

- | | |
|----------------------|---------------------|
| ① วงรี | ② ทรงกระบอกเชิงวงรี |
| ③ ทรงพาราโบลาลิงวงรี | ④ กรวยเชิงวงรี |

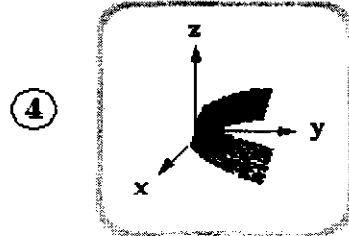
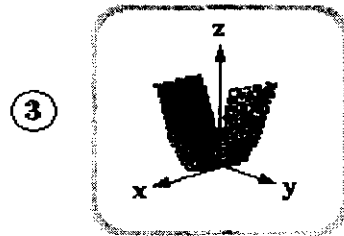
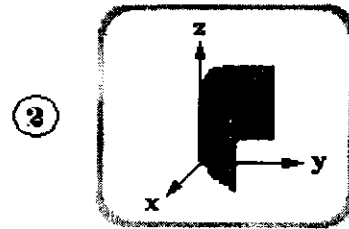
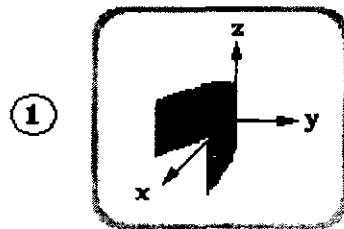
33. ระนาบ $2x - 4y + z = 8$ ตัดแกน x แกน y และแกน z ตรงกับข้อใด

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| ① $(2,0,0), (0,-4,0), (0,0,8)$ | ② $(-2,0,0), (0,4,0), (0,0,-8)$ |
| ③ $(4,0,0), (0,2,0), (0,0,8)$ | ④ $(4,0,0), (0,-2,0), (0,0,8)$ |

34. กราฟของ $y = 4$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด

- | | |
|---|---|
| ①  | ②  |
| ③  | ④  |

35. กราฟของ $y = x^2$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด



36. ค่าของ $\int (x^2 - 3x - 5)dx$ ตรงกับข้อใด

① $x^3 - 3x^2 - 5 + c$

② $x^3 - 3x - 5 + c$

③ $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 5x + c$

④ $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 5x + c$

37. ค่าของ $\int x(x^2 - 2)^5 dx$ ตรงกับข้อใด

① $\frac{x^2}{2} \left(\frac{x^3}{3} - 2x \right)^5 + c$

② $\frac{(x^2 - 2)^6}{6} + c$

③ $\frac{(x^2 - 2)^6}{12} + c$

④ $\frac{x^2}{2} \cdot \frac{(x^2 - 2)^6}{6} + c$

38. ค่าของ $\int \frac{1}{4x+1} dx$ ตรงกับข้อใด

① $\ln|4x+1| + c$

② $\ln|x+1| + c$

③ $\frac{1}{4} \ln|4x+1| + c$

④ $4 \ln|4x+1| + c$

39. ค่าของ $\int_1^2 \int_0^1 xy^3 dx dy$ ตรงกับข้อใด

① $\int_1^2 \left[\frac{x^2 y^3}{2} \right]_0^1 dy$

② $\int_1^2 \left[\frac{x^2 y^4}{8} \right]_0^1 dy$

③ $\int_0^1 \left[\frac{x^2 y^3}{2} \right]_1^2 dx$

④ $\int_0^1 \left[\frac{x^2 y^4}{8} \right]_1^2 dx$

40. ค่าของ $\int_0^2 \int_{-1}^{x^2} (xy^2 - xy) dy dx$ ตรงกับข้อใด

① 3

② 5

③ 7

④ 9

เฉลยแบบทดสอบ

ข้อที่	เฉลย	ข้อที่	เฉลย	ข้อที่	เฉลย	ข้อที่	เฉลย
1	(1)	11	(1)	21	(3)	31	(2)
2	(3)	12	(1)	22	(2)	32	(3)
3	(1)	13	(4)	23	(4)	33	(4)
4	(4)	14	(2)	24	(4)	34	(1)
5	(1)	15	(4)	25	(4)	35	(2)
6	(2)	16	(1)	26	(1)	36	(4)
7	(3)	17	(3)	27	(2)	37	(3)
8	(2)	18	(2)	28	(3)	38	(3)
9	(3)	19	(4)	29	(1)	39	(1)
10	(2)	20	(2)	30	(3)	40	(3)

3.1 แบบทดสอบเรื่อง "การเขียนรูป"

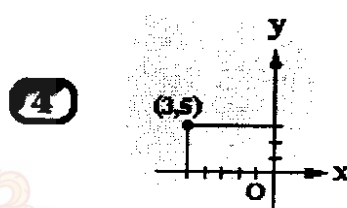
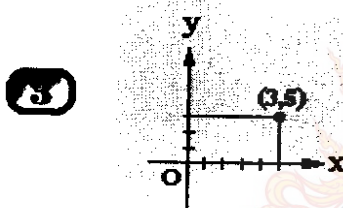
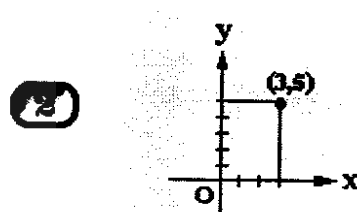
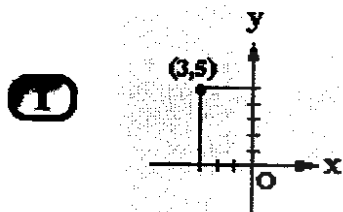
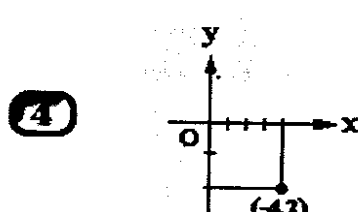
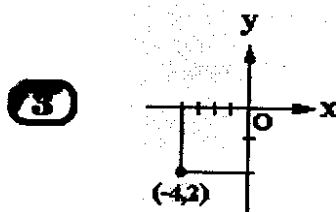
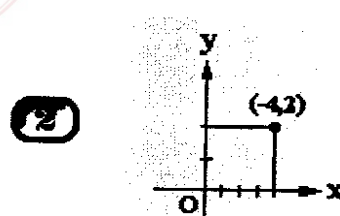
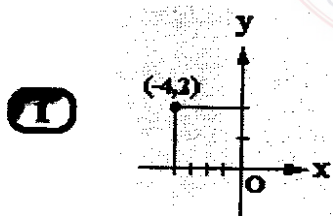


มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

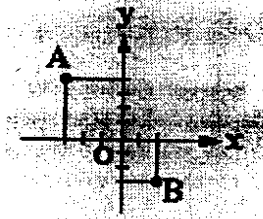
แบบทดสอบเรื่อง “ระบบพิกัดฉาก”

เวลา 45 นาที

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด โดย X ทับข้อนั้น

1. จุด $(3,5)$ เขียนแล้วตรงกับข้อใด2. จุด $(-4,2)$ เขียนแล้วตรงกับข้อใด

3. จากรูป จุด A มีพิกัดตรงกับข้อใด



(4, -3)



(-4, 3)

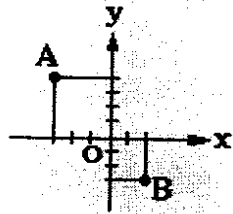


(-3, 4)



(3, -4)

4. จากรูป จุด B มีพิกัดตรงกับข้อใด



(-3, 2)



(2, 3)

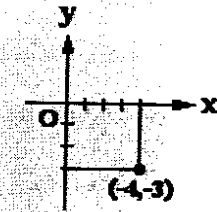
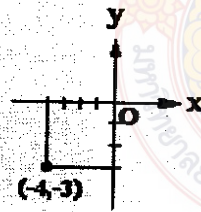
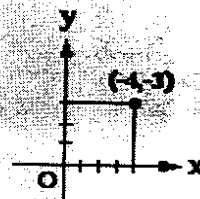
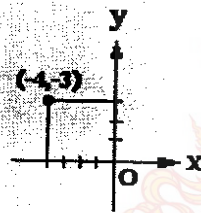


(-3, -2)

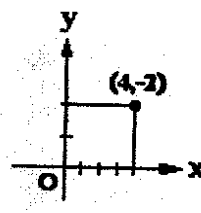
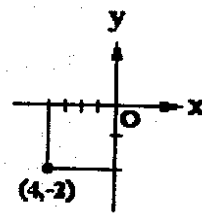
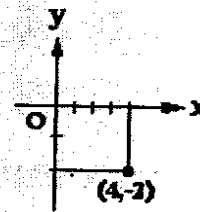
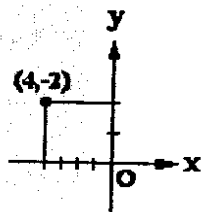


(2, -3)

5. จุด $(-4, -3)$ เขียนแล้วตรงกับข้อใด



6. จุด $(4, -2)$ เขียนแล้วตรงกับข้อใด



7. จุด $(-5, 8)$ อยู่ในจุดภาค (Quadrant) ตรงกับข้อใด



จุดภาคที่ 1 (Q_1)



จุดภาคที่ 2 (Q_2)



จุดภาคที่ 3 (Q_3)



จุดภาคที่ 4 (Q_4)

8. จุด $(6, -7)$ อยู่ในจุดภาค (Quadrant) ตรงกับข้อใด



จุดภาคที่ 1 (Q_1)



จุดภาคที่ 2 (Q_2)



จุดภาคที่ 3 (Q_3)



จุดภาคที่ 4 (Q_4)

9. จุด $(4, 5)$ อยู่ในจุดภาค (Quadrant) ตรงกับข้อใด



จุดภาคที่ 1 (Q_1)



จุดภาคที่ 2 (Q_2)

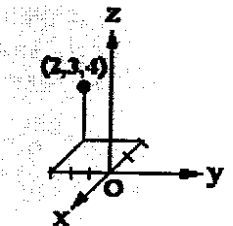
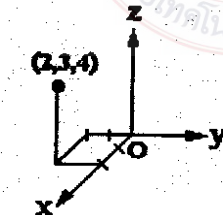
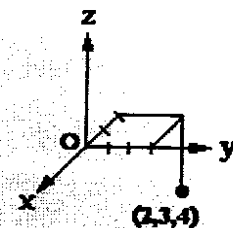
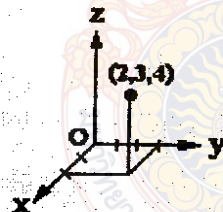


จุดภาคที่ 3 (Q_3)



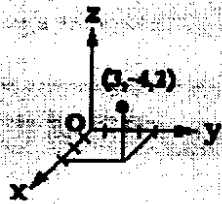
จุดภาคที่ 4 (Q_4)

10. จุด $(2, 3, 4)$ เขียนแล้วตรงกับข้อใด

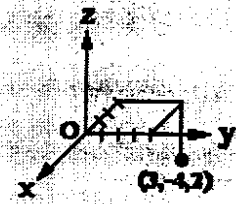


11. จุด $(3, -4, 2)$ เขียนแล้วตรงกับข้อใด

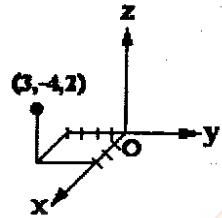
1



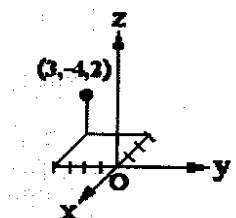
2



3

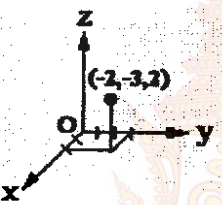


4

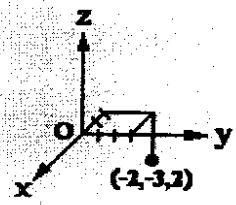


12. จุด $(-2, -3, 2)$ เขียนแล้วตรงกับข้อใด

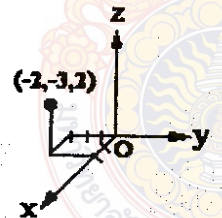
1



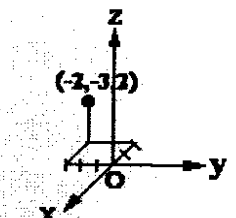
2



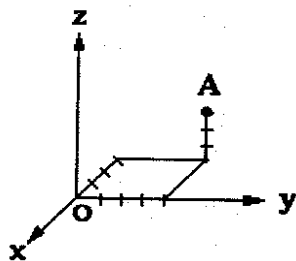
3



4



13. จากรูป จุด A มีพิกัดตรงกับข้อใด



1

$A(-3, -4, 3)$

2

$A(-3, 4, -3)$

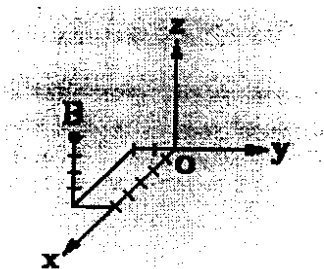
3

$A(3, 4, 3)$

4

$A(3, -4, -3)$

14. จากรูป จุด B มีพิกัดตรงกับข้อใด



1

B(5, -2, 4)

2

B(5, 2, -4)

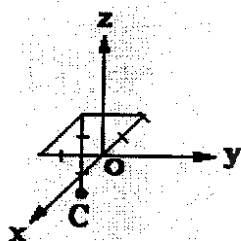
3

B(-5, 2, 4)

4

B(-5, -2, -4)

15. จากรูป จุด C มีพิกัดตรงกับข้อใด



1

C(2, -3, 4)

2

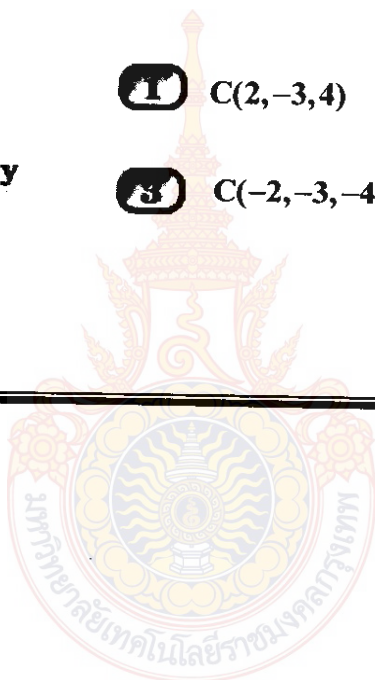
C(2, 3, 4)

3

C(-2, -3, -4)

4

C(-2, 3, -4)



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

แบบทดสอบเรื่อง “เส้นตรง”

เวลา 30 นาที

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด โดย X ทับบ้อนั้น

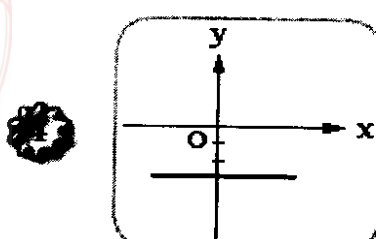
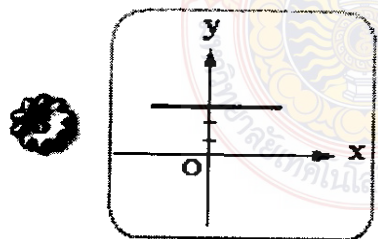
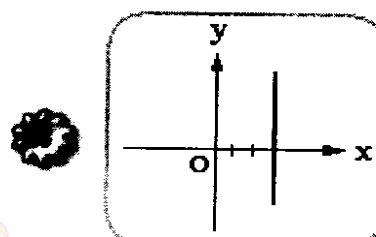
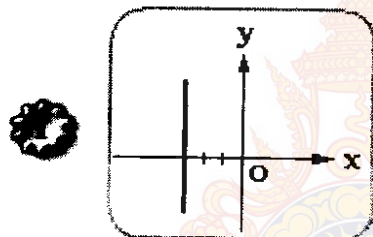
1. กราฟของสมการในข้อใดเป็นเส้นตรง

☐ $xy = 1$

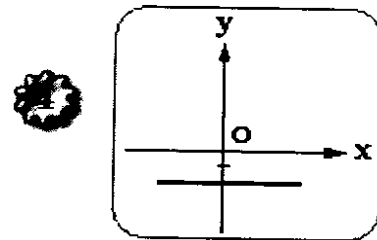
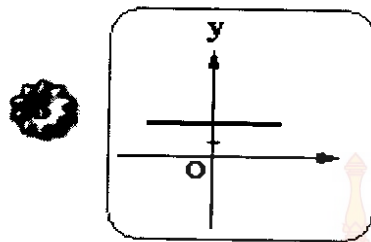
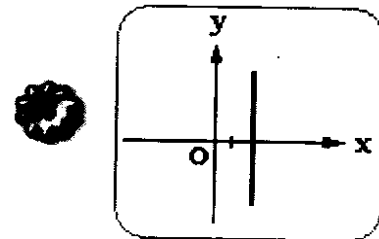
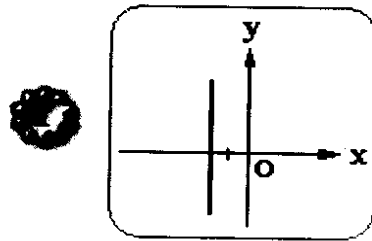
☐ $x + y = 1$

☐ $x^2 + y = 1$

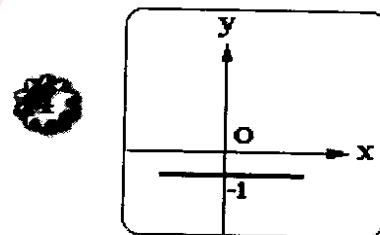
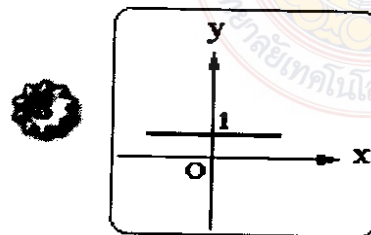
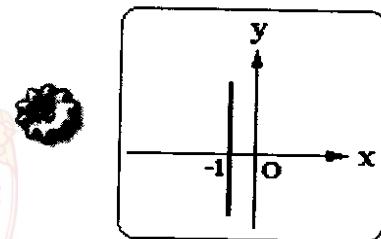
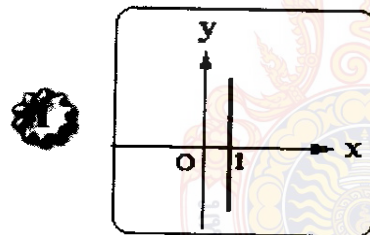
☐ $x^2 + y^2 = 1$

2. กราฟของสมการ $x = -3$ ตรงกับข้อใด

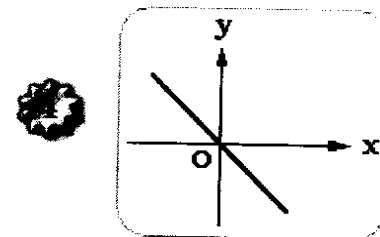
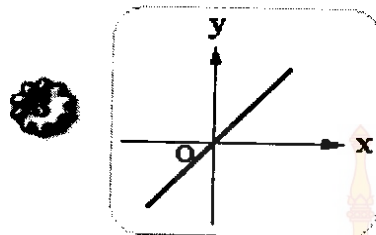
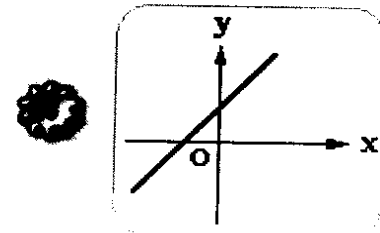
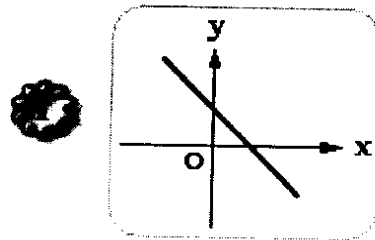
3. กราฟของสมการ $y + 2 = 0$ ตรงกับข้อใด



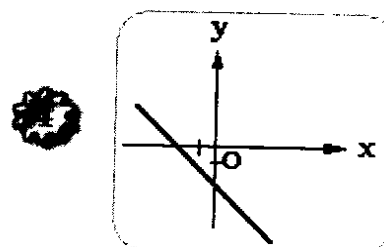
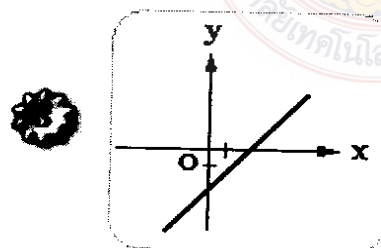
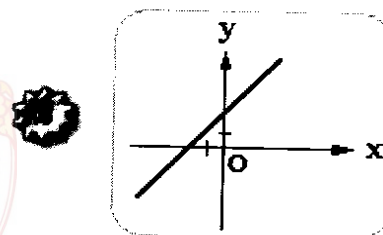
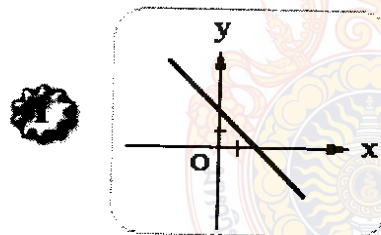
4. กราฟของสมการ $x - 1 = 0$ ตรงกับข้อใด



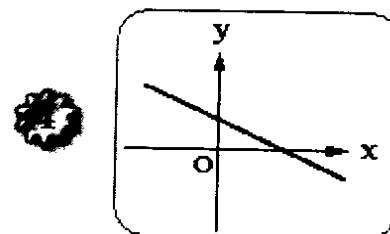
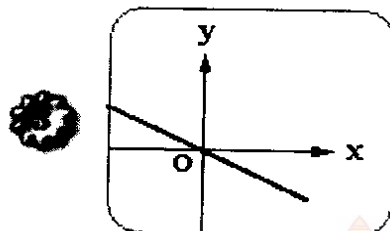
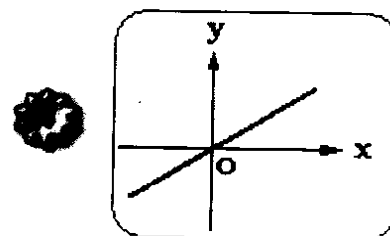
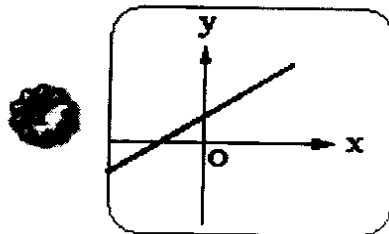
5. กราฟของสมการ $y = x$ ตรงกับข้อใด



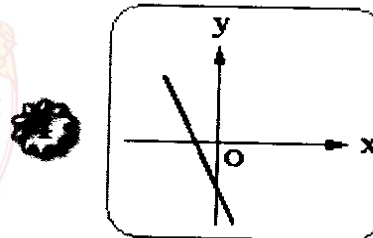
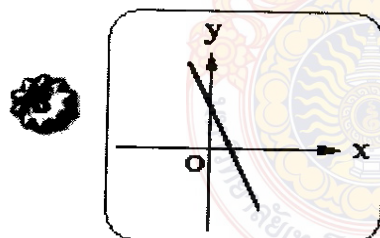
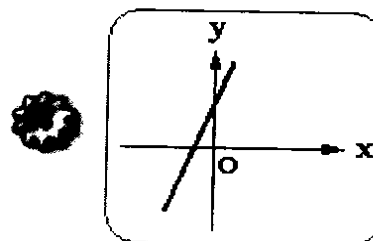
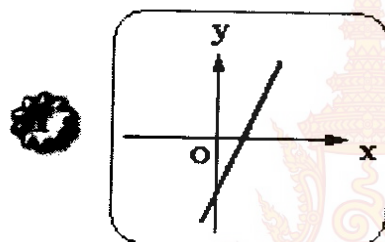
6. กราฟของสมการ $y = x + 2$ ตรงกับข้อใด



7. กราฟของสมการ $2x+4y = 1$ ตรงกับข้อใด



8. กราฟของสมการ $3x-y-2 = 0$ ตรงกับข้อใด



9. กราฟของสมการ $2x-y = 4$ ตัดแกน x ตรงกับข้อใด

$x = -2$

$x = 2$

$x = -4$

$x = 4$

10. กราฟของสมการ $3x+y = 1$ ตัดแกน y ตรงกับข้อใด

$y = \frac{1}{3}$

$y = -\frac{1}{3}$

$y = 1$

$y = -1$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

แบบทดสอบเรื่อง “วงกลม”

เวลา 30 นาที

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด โดย X ทับข้อนั้น

1. กราฟของสมการในข้อใดเป็นวงกลม

 $x + y = 4$

 $x^2 + y = 4$

 $x + y^2 = 4$

 $x^2 + y^2 = 4$

2. กราฟของสมการในข้อใดเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(0,0)$

 $x + y - 2 = 0$

 $x^2 + y - 2 = 0$

 $x^2 + y^2 - 2 = 0$

 $x^2 - y^2 - 2 = 0$

3. กราฟของสมการในข้อใดเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(2,-1)$ และรัศมี = 3 หน่วย

 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

 $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$

 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

4. กราฟของสมการ $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 2$ มีจุดศูนย์กลางและรัศมีตรงกับข้อใด

 จุดศูนย์กลาง $(-3,2)$ และรัศมี = 2

 จุดศูนย์กลาง $(-3,2)$ และรัศมี = $\sqrt{2}$

 จุดศูนย์กลาง $(3,-2)$ และรัศมี = 2

 จุดศูนย์กลาง $(3,-2)$ และรัศมี = $\sqrt{2}$

5. กราฟของสมการ $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$ มีจุดศูนย์กลางและรัศมีตรงกับข้อใด

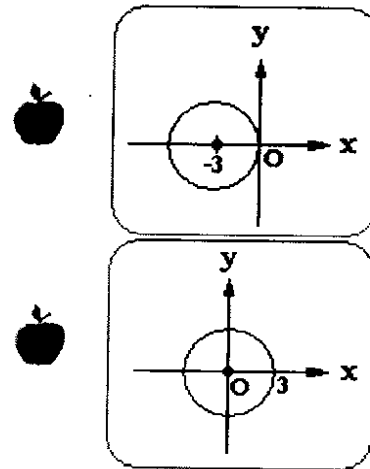
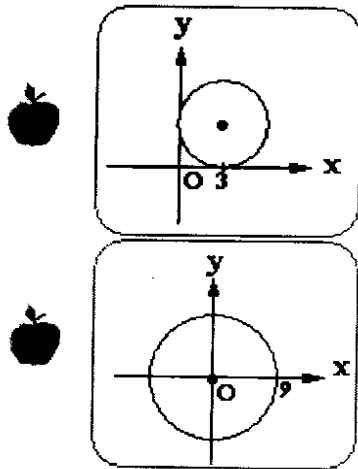
 จุดศูนย์กลาง $(-1,4)$ และรัศมี = 4

 จุดศูนย์กลาง $(1,4)$ และรัศมี = 4

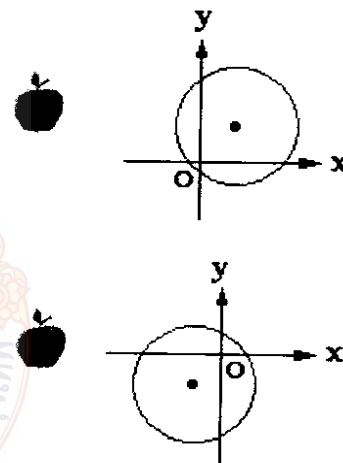
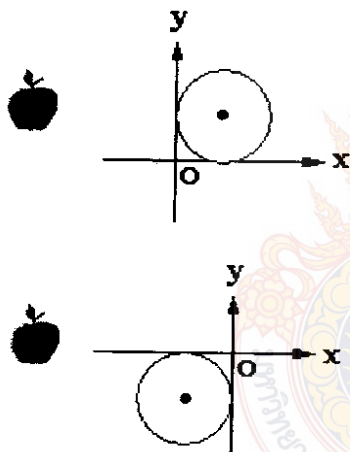
 จุดศูนย์กลาง $(-1,-4)$ และรัศมี = 2

 จุดศูนย์กลาง $(1,-4)$ และรัศมี = 2

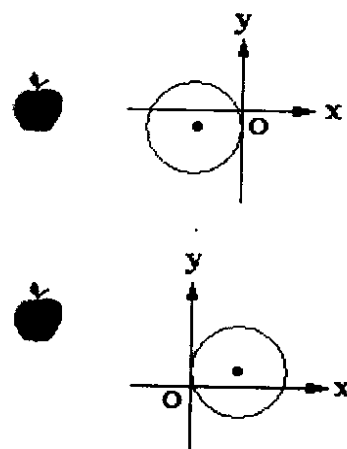
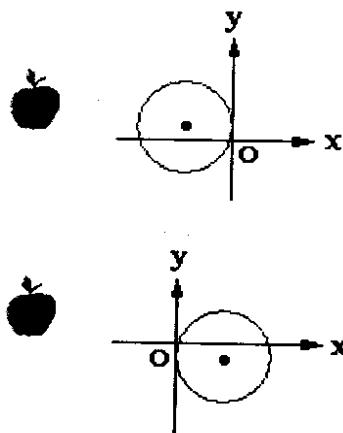
6. กราฟของสมการ $x^2 + y^2 = 9$ ตรงกับข้อใด



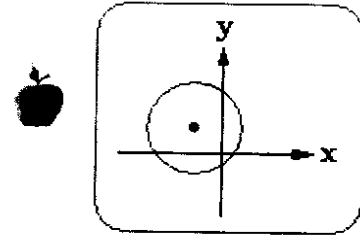
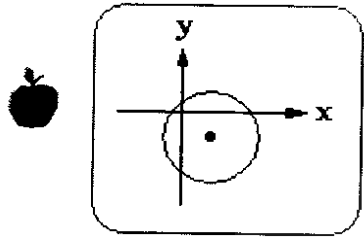
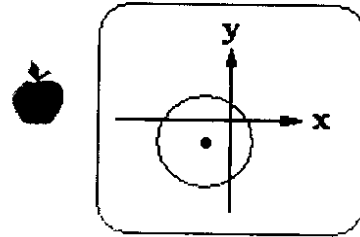
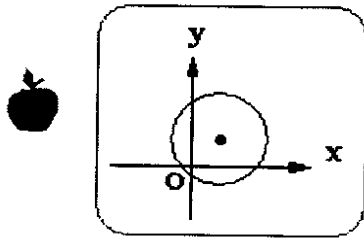
7. กราฟของสมการ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ ตรงกับข้อใด



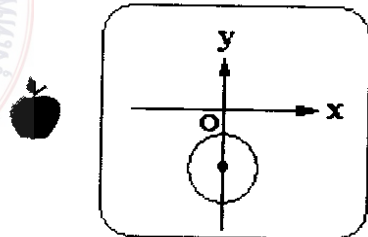
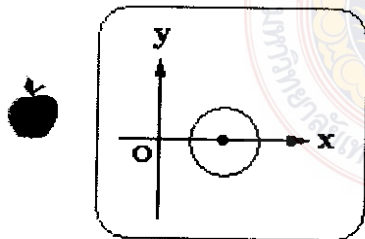
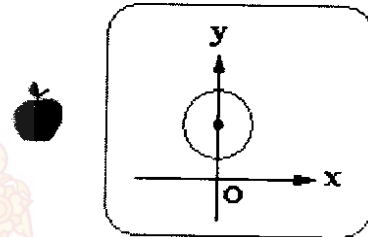
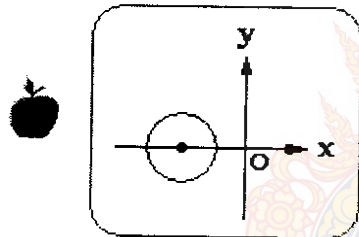
8. กราฟของสมการ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ ตรงกับข้อใด



9. กราฟของสมการ $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$ ตรงกับข้อใด



10. กราฟของสมการ $x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$ ตรงกับข้อใด



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

แบบทดสอบเรื่อง “พาราโบลา”

เวลา 30 นาที

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด โดย X ทับข้อนั้น

1. กราฟของสมการในข้อใดเป็นพาราโบลา

 $x + y = 2$

 $x^2 + y = 2$

 $x^2 + y^2 = 2$

 $x^2 - y^2 = 2$

2. กราฟของสมการในข้อใดเป็นพาราโบลา ที่มีจุดยอด (0,0)

 $x + y = 0$

 $x - y^2 = 0$

 $y^2 - x^2 = 0$

 $x^2 - y^2 = 0$

3. กราฟของสมการในข้อใดเป็นพาราโบลาหงาย

 $y^2 - x - 1 = 0$

 $y^2 + x - 1 = 0$

 $x^2 + y - 3 = 0$

 $x^2 - y - 4 = 0$

4. กราฟของสมการในข้อใดเป็นพาราโบลาตะแคงขวา จุดยอด (0,2)

 $y^2 - 4y - x + 4 = 0$

 $y^2 - 4y + x + 4 = 0$

 $x^2 - 4x - y + 4 = 0$

 $x^2 - 4x + y + 4 = 0$

5. กราฟของสมการในข้อใดเป็นพาราโบลาคว่ำ จุดยอด (3,9)

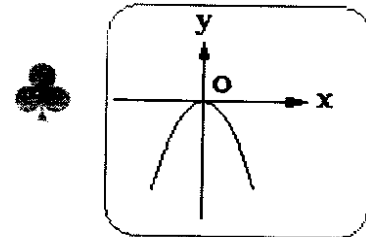
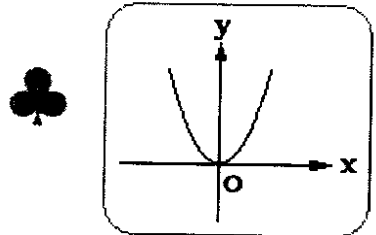
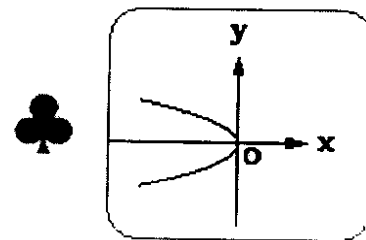
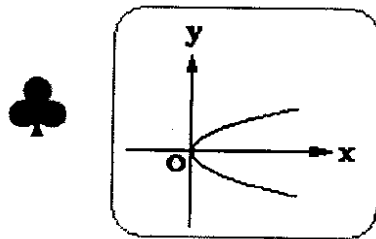
 $x = 6y + y^2$

 $x = 6y - y^2$

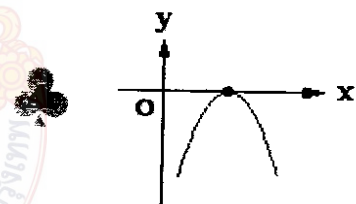
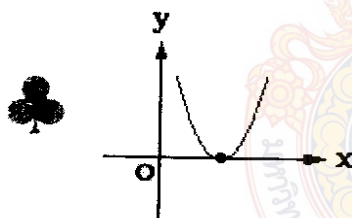
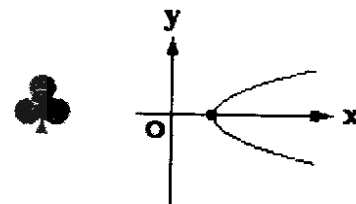
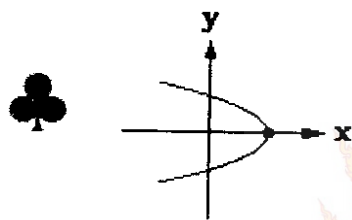
 $y = 6x + x^2$

 $y = 6x - x^2$

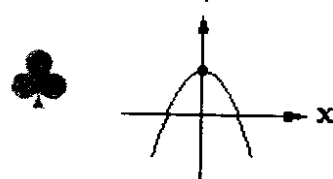
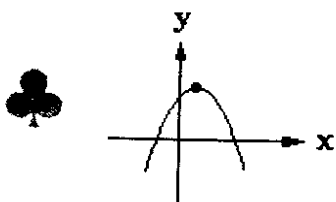
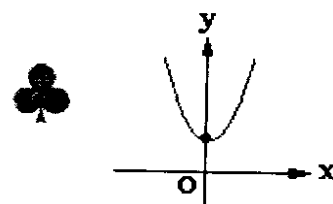
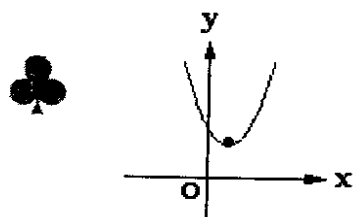
6. กราฟของสมการ $y = x^2$ ตรงกับข้อใด



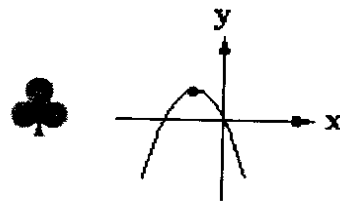
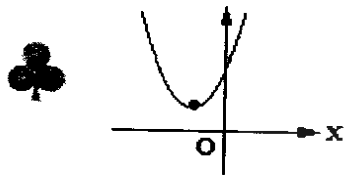
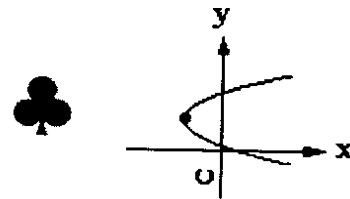
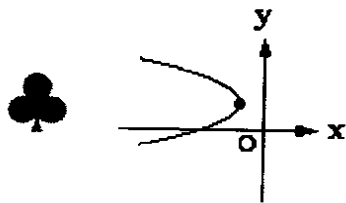
7. กราฟของสมการ $y^2 = 6 - x$ ตรงกับข้อใด



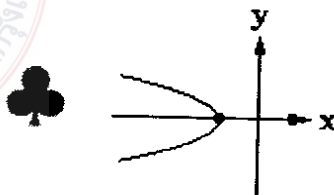
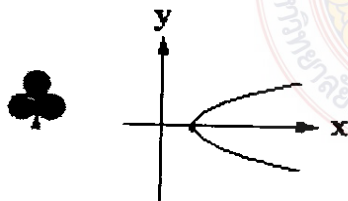
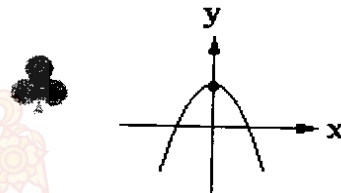
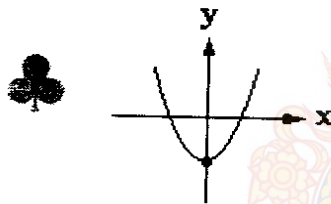
8. กราฟของสมการ $y = 3 + 2x - x^2$ ตรงกับข้อใด



9. กราฟของสมการ $x = y^2 - 4y + 2$ ตรงกับข้อใด



10. กราฟของสมการ $x^2 - y - 4 = 0$ ตรงกับข้อใด



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

แบบทดสอบเรื่อง “บททวนการเขียนรูป 3 มิติ”

เวลา 1 ชั่วโมง

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด โดย X ทับข้อนั้น

1. กราฟของ $x = 8$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด

ระนาบ



ทรงกลม



ทรงกระบอก



ทรงรี

2. กราฟของ $x^2 + y^2 = 4$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด

ระนาบ



ทรงกลม



ทรงกระบอก



ทรงรี

3. กราฟของ $x^2 = 3y$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด

ทรงกระบอกเชิงวงรี



ทรงกระบอกเชิงพาราโบลา



พาราโบลา



ไฮเพอร์โบลา

4. กราฟของ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด

วงรี



ทรงรี



วงกลม



ทรงกลม

5. กราฟของ $9x^2 + y^2 - 27z^2 = 108$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด

ทรงรี



ทรงไฮเพอร์โบลานิคชั้นเดียว



กรวยเชิงวงรี



ทรงไฮเพอร์โบลานิคสองชั้น

6. กราฟของ $9x^2 + 4y^2 = z$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด



วงรี



ทรงกระบอกเชิงวงรี



ทรงพาราโบลเชิงวงรี



กรวยเชิงวงรี

7. ระนาบ $2x + 3y - 4z = 12$ ตัดแกน x แกน y และแกน z ตรงกับข้อใด



$(6, 0, 0), (0, -4, 0), (0, 0, 0)$



$(0, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, -3)$

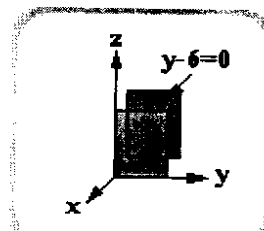
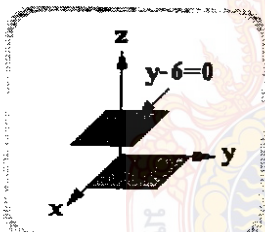
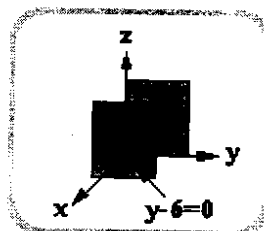
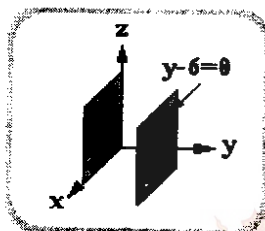


$(4, 0, 0), (0, -3, 0), (0, 0, 6)$

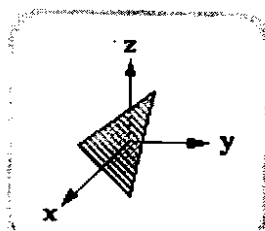
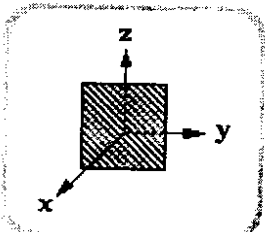
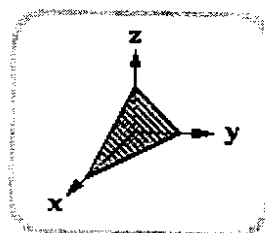
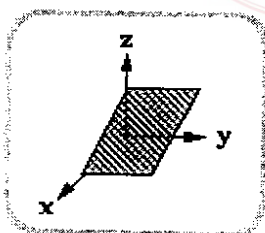


$(6, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, -3)$

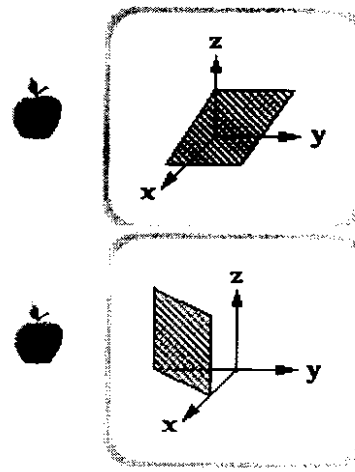
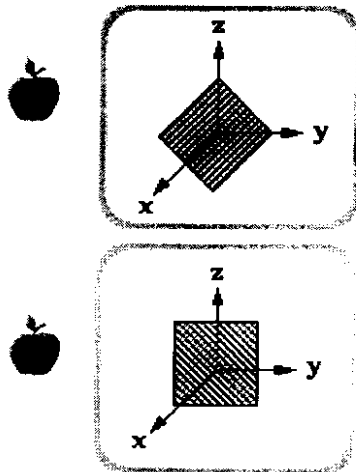
8. กราฟของ $y - 6 = 0$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด



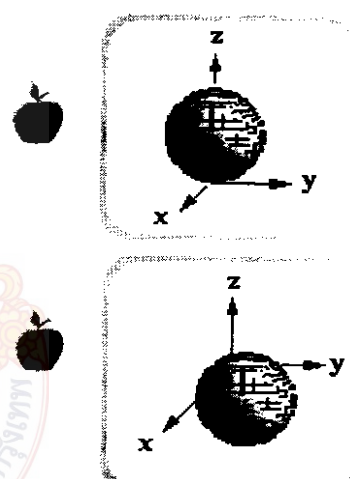
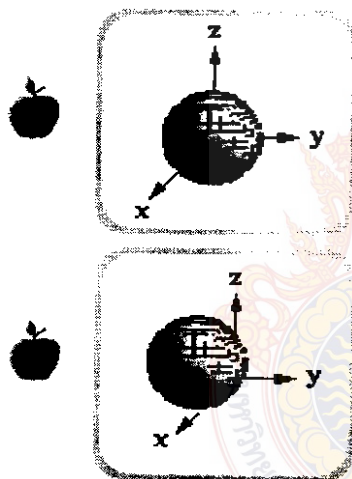
9. กราฟของ $x + 2y + 4z - 8 = 0$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด



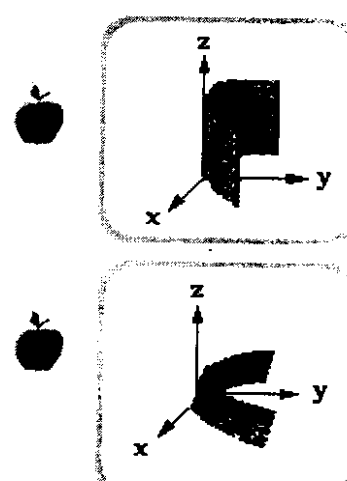
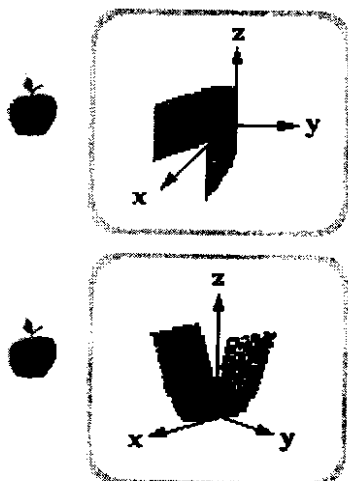
10. กราฟของ $2x - y - 4 = 0$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด



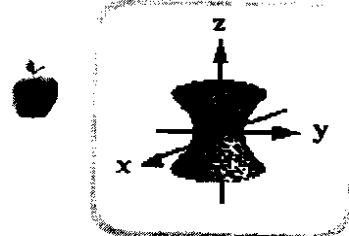
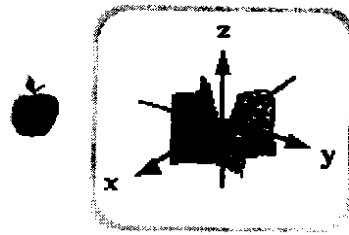
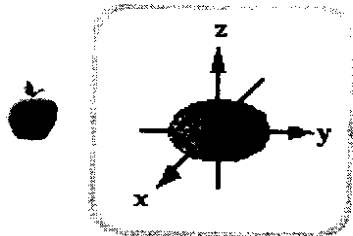
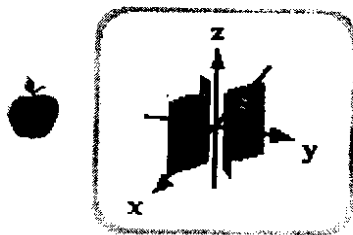
11. กราฟของ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด



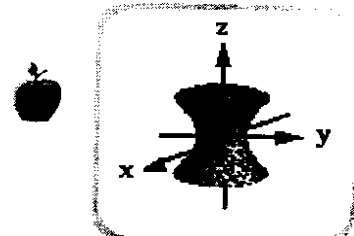
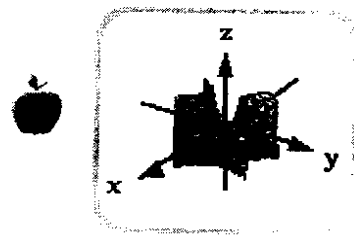
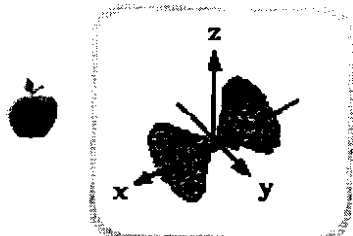
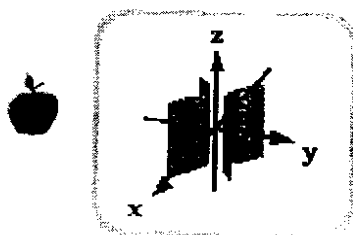
12. กราฟของ $z = 2y^2$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด



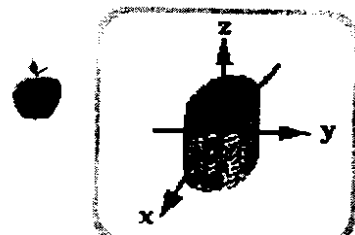
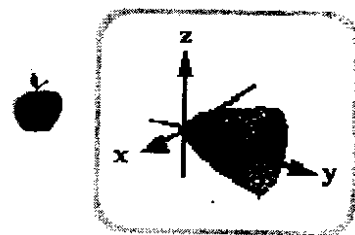
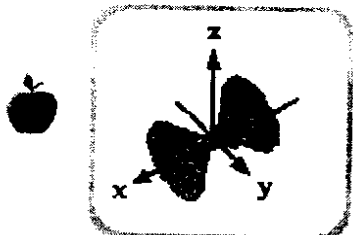
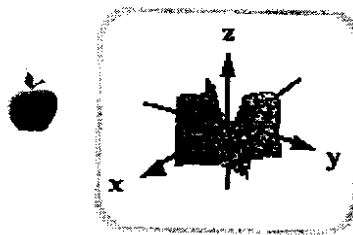
13. กราฟของ $y^2 - x^2 = 6$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด



14. กราฟของ $4x^2 - 9y^2 - 4z^2 - 36 = 0$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด



15. กราฟของ $9x^2 + 4z^2 - 12y = 0$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด



16. จุดศูนย์กลางของทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z + 12 = 0$ ตรงกับข้อใด



(1, 2, -4)



(-1, 2, 4)



(-2, -1, 4)



(2, 1, -4)

17. รัศมีของทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y - 8z + 22 = 0$ ตรงกับข้อใด



2 หน่วย



3 หน่วย

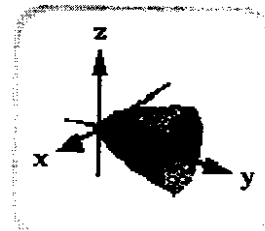
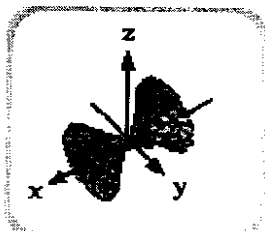
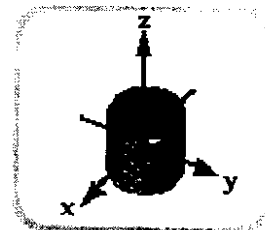
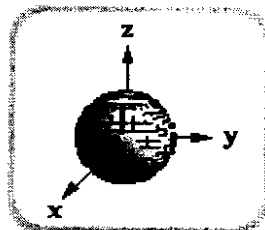


4 หน่วย

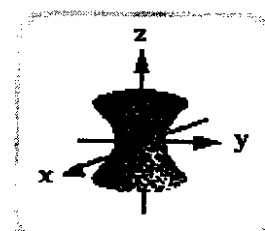
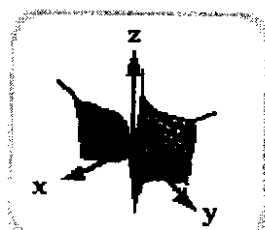
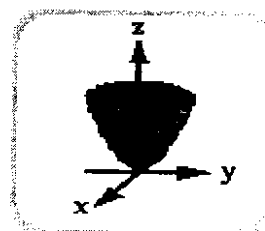
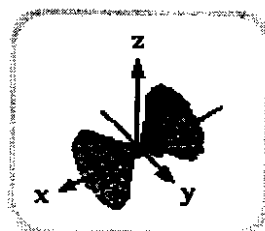


5 หน่วย

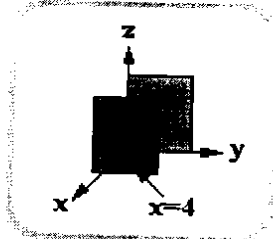
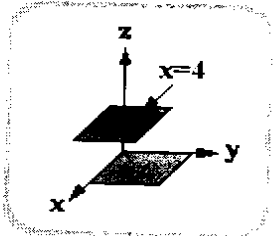
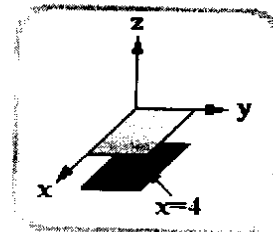
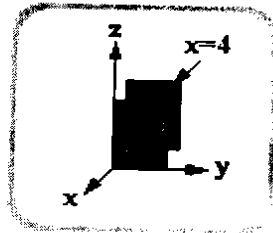
18. กราฟของ $x^2 + y^2 = 16$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด



19. กราฟของ $x^2 - y^2 - z = 0$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด



20. กราฟของ $x = 4$ ใน 3 มิติ ตรงกับข้อใด



3.2 แบบทดสอบเรื่อง "การหาปริพันธ์"



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

แบบทดสอบเรื่อง “การหาปริพันธ์ชั้นเดียว”

เวลา 2 ชั่วโมง

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด โดย X ทับข้อนั้น

1. ค่าของ $\int (x^2 + 2x - 3)dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $x^3 + 2x^2 - 3x + c$

☐ $\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + c$

☐ $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x + c$

☐ $\frac{x^3}{2} + \frac{2x^2}{3} - 3x + c$

2. ค่าของ $\int \left(\frac{2}{x^2} - \sqrt{x} \right) dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\frac{x^3}{2} + \frac{2x^2}{3} - 3x + c$

☐ $\frac{2}{x^3} - x^{3/2} + c$

☐ $\frac{6}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + c$

☐ $-\frac{6}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + c$

3. ค่าของ $\int (x-4)^3 dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\frac{x^4}{4} - 4 + c$

☐ $\frac{x^4}{4} - 12x + c$

☐ $\frac{(x-4)^4}{4} + c$

☐ $\left(\frac{x^2}{2} - 4x \right)^3 + c$

4. ค่าของ $\int x(x^2 + 3)^4 dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\frac{(x^3 + 3x)^5}{5} + c$

☐ $\frac{(x^3 + 3x)^5}{10} + c$

☐ $\frac{(x^2 + 3)^5}{5} + c$

☐ $\frac{(x^2 + 3)^5}{10} + c$

5. ค่าของ $\int \sin^2 x \cos x dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\cos^2 x \sin x + c$

☐ $\frac{\cos^3 x \sin x}{3} + c$

☐ $\cos^2 x \sin x + c$

☐ $\frac{\sin^3 x}{3} + c$

6. ค่าของ $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\frac{\ln^3 x}{3} + c$

☐ $\frac{\ln^3 x}{3x} + c$

☐ $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 + c$

☐ $\frac{\ln^3 x}{x} + c$

7. ค่าของ $\int e^x (e^x - 4)^8 dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $(e^x - 4)^9 + c$

☐ $e^x (e^x - 4)^9 + c$

☐ $\frac{(e^x - 4)^9}{9} + c$

☐ $\frac{e^x (e^x - 4)^9}{9} + c$

8. ค่าของ $\int \frac{1}{3x+4} dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\ln|x+4| + c$

☐ $\frac{1}{3} \ln|3x+4| + c$

☐ $\ln|3x+4| + c$

☐ $3 \ln|3x+4| + c$

9. ค่าของ $\int \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\ln|1 + \tan x| + c$

☐ $\frac{1}{2} \ln|1 + \tan x| + c$

☐ $\frac{\sec^3 x}{3} + c$

☐ $\frac{1}{(1 + \tan x)^2} + c$

10. ค่าของ $\int 5^{3x} dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\frac{5^{3x}}{\ln 5} + c$

☐ $\frac{5^{3x}}{3 \ln 5} + c$

☐ $5^{3x} + c$

☐ $\frac{5^{3x}}{3} + c$

11. ค่าของ $\int x e^{x^2+3} dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\frac{x^2}{2} e^{x^2+3} + c$

☐ $x e^{x^2+3} + c$

☐ $2e^{x^2+3} + c$

☐ $\frac{1}{2} e^{x^2+3} + c$

12. ค่าของ $\int \cos(3x-2) dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\sin(3x-2) + c$

☐ $\sin(x-2) + c$

☐ $\frac{1}{3} \sin(3x-2) + c$

☐ $3 \sin(3x-2) + c$

13. ค่าของ $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\frac{\sin^2(\ln x)}{2x} + c$

☐ $\frac{\sin(\ln x)^2}{x} + c$

☐ $-\cos(\ln x) + c$

☐ $\cos(\ln x) + c$

14. ค่าของ $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x} dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $2 \sec \sqrt{x} + c$

☐ $\frac{1}{2} \sec \sqrt{x} + c$

☐ $\frac{\sec^2 \sqrt{x} \tan^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + c$

☐ $\frac{\sec^2 \sqrt{x} \tan^2 \sqrt{x}}{x} + c$

15. ค่าของ $\int \sin^3 x dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\sin x + \cos^3 x + c$

☐ $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$

☐ $\frac{\sin^4 x}{4} + c$

☐ $-\cos^3 x + c$

16. ค่าของ $\int x^2 \sqrt{x^3-4} dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\int u v dx, u = x^2, v = \sqrt{x^3-4}$

☐ $\int \frac{1}{u} du, u = \sqrt{x^3-4}$

☐ $\int \sqrt{u} du, u = x^3-4$

☐ $\int u^n du, u = x^3-4, n = \frac{1}{2}$

17. ค่าของ $\int \frac{\cos x}{3 + \sin x} dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\int \cos u du, u = x$

☐ $\int \frac{u}{v} dx, u = \cos x, v = 3 + \sin x$

☐ $\int u^n du, u = \cos x, n = 1$

☐ $\int \frac{1}{u} du, u = 3 + \sin x$

18. ค่าของ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\int \frac{1}{u} du, u = \sqrt{x}$

☐ $\int e^u du, u = \sqrt{x}$

☐ $\int u^n du, u = e^{\sqrt{x}}, n = 1$

☐ $\int \frac{u}{v} dx, u = e^{\sqrt{x}}, v = \sqrt{x}$

19. ค่าของ $\int \sec^2(3x + 1) dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\int \sec^2 u du, u = 3x + 1$

☐ $\int u^n du, u = \sec(3x + 1), n = 2$

☐ $\int \sec u du, u = \sec(3x + 1)$

☐ $\int a^u du, a = \sec(3x + 1), u = 2$

20. ค่าของ $\int (x^2 + 1) 3^{(x^3 + 3x)} dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\int a^u du, a = \sec(3x + 1), u = 2$

☐ $\int u^n du, u = x^2 + 1, n = 1$

☐ $\int a^u du, u = x^3 + 3x, a = 3$

☐ $\int u^n du, u = x^3 + 3x, n = 3$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

แบบทดสอบเรื่อง “ทบทวนการหาปริพันธ์สองชั้น”

เวลา 1 ชั่วโมง 30 นาที

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด โดย X ทับข้อนั้น

1. ค่าของ $\int_1^e \int_0^x \ln x \, dy \, dx$ ตรงกับข้อใด

☐ $\int_1^e y \ln x \, dx$

☐ $\int_1^e x \ln x \, dx$

☐ $\int_0^x (\ln e - \ln 1) \, dy$

☐ $\int_0^x \ln y \, dy$

2. ค่าของ $\int_0^1 \int_0^{2y} x e^{y^3} \, dx \, dy$ ตรงกับข้อใด

☐ $\int_0^1 \left[\frac{x^2 e^{y^3}}{2} \right]_0^{2y} dy$

☐ $\int_0^1 \left[x y e^{y^3} \right]_0^{2y} dy$

☐ $\int_0^{2y} \left[\frac{x^2 e^{y^3}}{2} \right]_0^1 dx$

☐ $\int_0^{2y} \left[x y e^{y^3} \right]_0^1 dx$

3. ค่าของ $\int_0^2 \int_{y^2}^{6-y} xy \, dx \, dy$ ตรงกับข้อใด

☐ $\int_{y^2}^{6-y} \left[x^2 y \right]_0^2 dx$

☐ $\int_{y^2}^{6-y} \left[xy^2 \right]_0^2 dx$

☐ $\int_0^2 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y^2}^{6-y} dy$

☐ $\int_0^2 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{y^2}^{6-y} dy$

4. ค่าของ $\int_2^4 \int_0^1 x^2 y dx dy$ ตรงกับข้อใด



0



1



2



3

5. ค่าของ $\int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos y dy dx$ ตรงกับข้อใด



0



1



4



6

6. ค่าของ $\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^y + \sin x) dx dy$ ตรงกับข้อใด



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^y + \cos x) dx$$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$



$$\int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} e^y + 1 \right) dy$$



$$\int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} e^y \right) dy$$

7. ค่าของ $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^3} \sin \frac{y}{x} dy dx$ ตรงกับข้อใด



2π



$\frac{3\pi}{2}$



π



$\frac{\pi}{2}$

8. ค่าของ $\int_2^3 \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx dy$ ตรงกับข้อใด



1



2



$\frac{2}{3}$



$\frac{1}{3}$

9. ค่าของ $\int_0^2 \int_0^{x^2} 6xy dy dx$ ตรงกับข้อใด



24



32



35



38

10. ค่าของ $\int_0^\pi \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx dy$ ตรงกับข้อใด



2



4



6



7

3.3 แบบทดสอบเรื่อง "การหาปริมาตร"



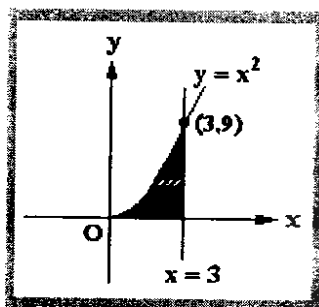
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

แบบทดสอบเรื่อง “การใส่ลิมิตปริพันธ์สองชั้น”

เวลา 60 นาที

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด โดย X ทับซ้อนนั้น

1. จากรูปต่อไปนี้ จงใส่ลิมิตของ $\iint_R dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่แรเงา



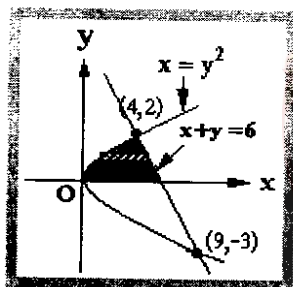
1 $\int_0^3 \int_{\sqrt{y}}^3 dx dy$

2 $\int_0^3 \int_3^{x^2} dy dx$

3 $\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 dx dy$

4 $\int_0^3 \int_3^{\sqrt{y}} dy dx$

2. จากรูปต่อไปนี้ จงใส่ลิมิตของ $\iint_R dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่แรเงา



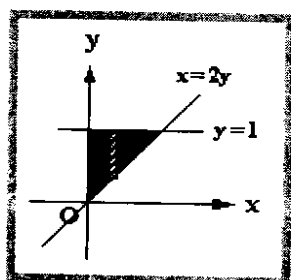
1 $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^{6-x} dy dx$

2 $\int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^{6-x} dy dx$

3 $\int_0^4 \int_{y^2}^{6-x} dx dy$

4 $\int_0^2 \int_{y^2}^{6-y} dx dy$

3. จากรูปต่อไปนี้ จงใส่ลิมิตของ $\iint_R dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่แรเงา



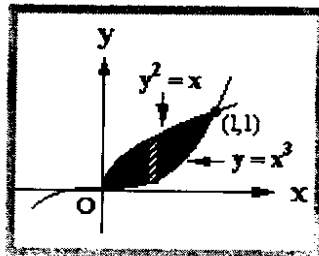
1 $\int_0^1 \int_1^{2x} dy dx$

2 $\int_0^2 \int_1^{x/2} dy dx$

3 $\int_0^1 \int_1^{2y} dx dy$

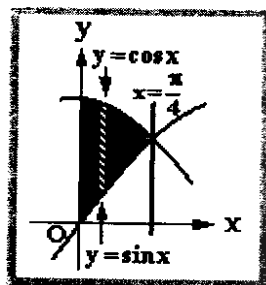
4 $\int_0^2 \int_1^{2y} dx dy$

4. จากรูปต่อไปนี้ จงใส่ลิมิตของ $\iint_R dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่แรเงา



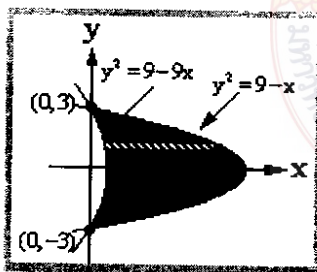
1	$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{x^3} dy dx$	2	$\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dy dx$
3	$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{x^3} dx dy$	4	$\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dx dy$

5. จากรูปต่อไปนี้ จงใส่ลิมิตของ $\iint_R dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่แรเงา



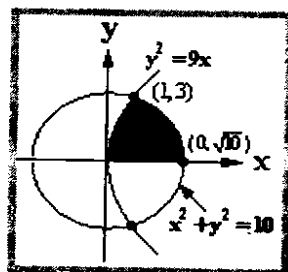
1	$\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} dy dx$	2	$\int_0^{\pi/4} \int_{\cos x}^{\sin x} dy dx$
3	$\int_{\sin x}^{\cos x} \int_0^{\pi/4} dx dy$	4	$\int_{\cos x}^{\sin x} \int_0^{\pi/4} dx dy$

6. จากรูปต่อไปนี้ จงใส่ลิมิตของ $\iint_R dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่แรเงา



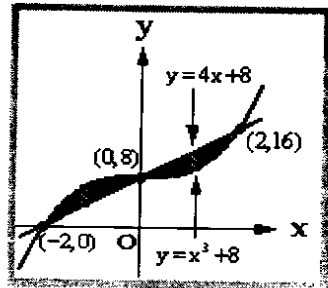
1	$\int_{-3}^3 \int_{9-9x}^{9-x} dy dx$	2	$\int_0^3 \int_{9-9x}^{9-x} dy dx$
3	$\int_{-3}^3 \int_{1-\frac{y^2}{9}}^{9-y^2} dx dy$	4	$\int_0^3 \int_{1-\frac{y^2}{9}}^{9-y^2} dx dy$

7. จากรูปต่อไปนี้ จงใส่ลิมิตของ $\iint_R dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่แรเงา



1	$\int_0^{\sqrt{10}} \int_{\sqrt{9x}}^{\sqrt{10-x^2}} dy dx$	2	$\int_0^3 \int_{3x}^{10-x^2} dy dx$
3	$\int_0^1 \int_{\frac{y^2}{9}}^{10-y^2} dx dy$	4	$\int_0^3 \int_{\frac{y^2}{9}}^{\sqrt{10-y^2}} dx dy$

8. จากรูปต่อไปนี้ จงใส่ลิมิตของ $\iint_R dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่แรเงา



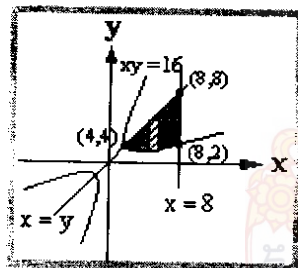
1 $\int_{-2}^0 \int_{4x+8}^{x^3+8} dy dx + \int_0^2 \int_{x^3+8}^{4x+8} dy dx$

2 $\int_0^8 \int_{4x+8}^{x^3+8} dx dy + \int_8^{16} \int_{x^3+8}^{4x+8} dx dy$

3 $2 \int_{-2}^0 \int_{4x+8}^{x^3+8} dy dx$

4 $2 \int_0^8 \int_{4x+8}^{x^3+8} dx dy$

9. จากรูปต่อไปนี้ จงใส่ลิมิตของ $\iint_R dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่แรเงา



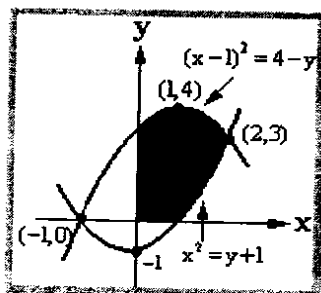
1 $\int_4^8 \int_{\frac{16}{x}}^x dy dx$

2 $\int_0^8 \int_{16x}^x dy dx$

3 $\int_4^8 \int_{\frac{16}{y}}^y dx dy$

4 $\int_0^8 \int_{16y}^y dx dy$

10. จากรูปต่อไปนี้ จงใส่ลิมิตของ $\iint_R dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่แรเงา



1 $\int_0^1 \int_0^{(x-5)^2} dy dx + \int_1^3 \int_{x^2}^{(x-1)^2} dy dx$

2 $\int_0^1 \int_0^{4-(x-1)^2} dy dx + \int_1^2 \int_{x^2-1}^{4-(x-1)^2} dy dx$

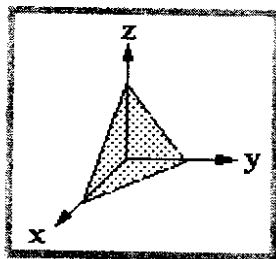
3 $\int_0^2 \int_{x^2-1}^{4-(x-1)^2} dy dx$

4 $\int_0^3 \int_0^{4-(x-1)^2} dy dx$

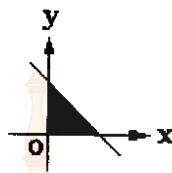
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ
แบบทดสอบเรื่อง “การหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้น” เวลา 2 ชั่วโมง

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด โดย X ทับข้อนั้น

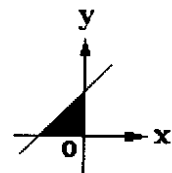
1. จากรูปทรงสามมิติซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิวระนาบ $z = 5 - x - y$ และพิกัดทั้งสามในอัฐภาคที่ 1 จะมีภาพฉายบนระนาบ xy ตรงกับข้อใด



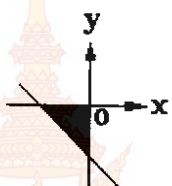
1



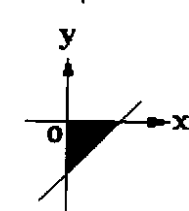
2



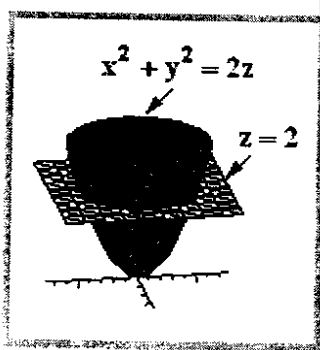
3



4



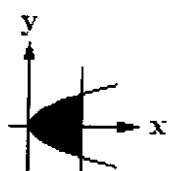
2. จากรูปทรงสามมิติซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิว $x^2 + y^2 = 2z$ และระนาบ $z = 2$ จะมีภาพฉายบนระนาบ xy ตรงกับข้อใด



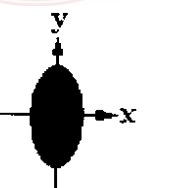
1



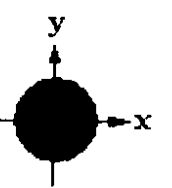
2



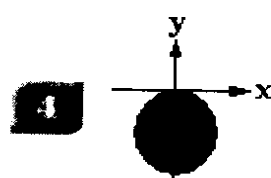
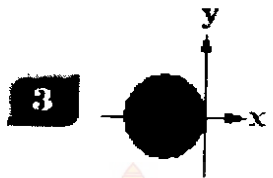
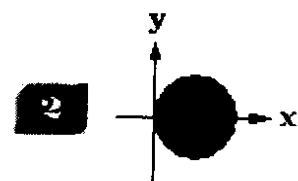
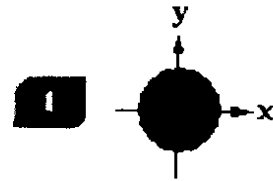
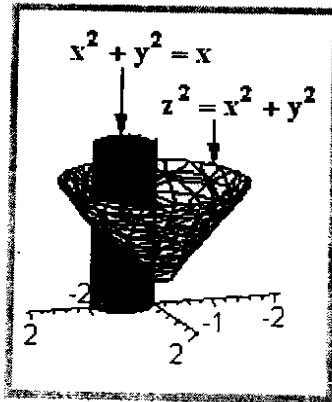
3



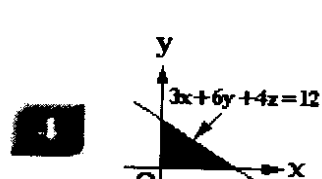
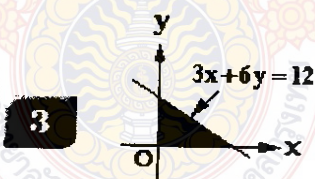
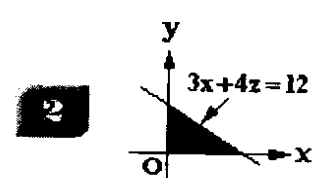
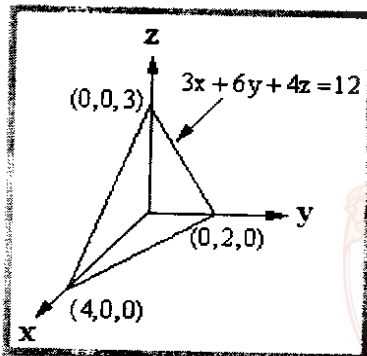
4



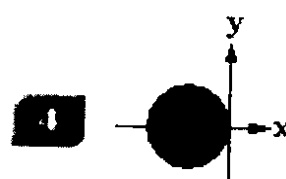
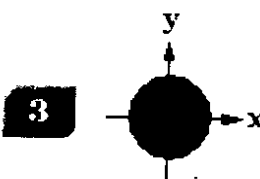
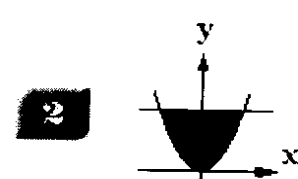
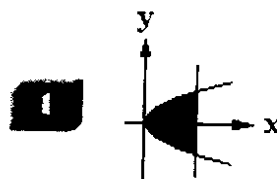
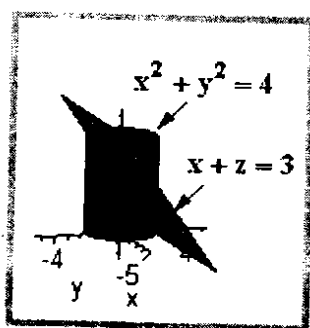
3. จากรูปทรงสามมิติซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิว $x^2 + y^2 = x$ และผิว $z^2 = x^2 + y^2$ จะมีภาพฉายบนระนาบ xy ตรงกับข้อใด



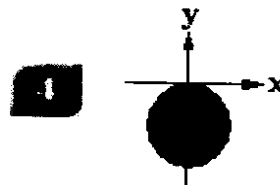
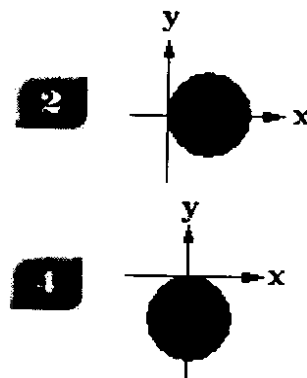
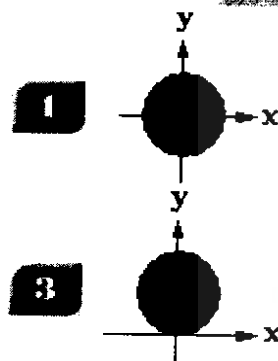
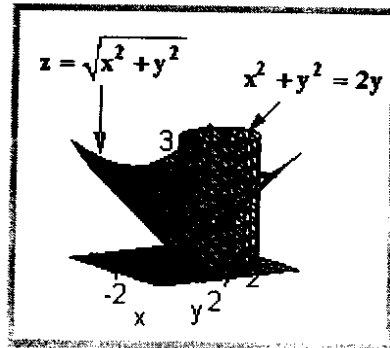
4. จากรูปทรงสามมิติซึ่งถูกล้อมรอบด้วยระนาบ $3x + 6y + 4z = 12$ และระนาบพิกัดทั้งสาม ในอัฐภาคที่ 1 จะมีภาพฉายบนระนาบ xy ตรงกับข้อใด



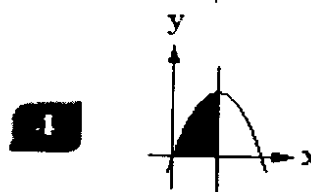
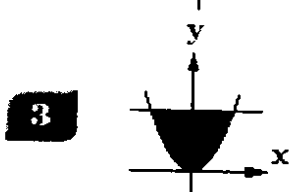
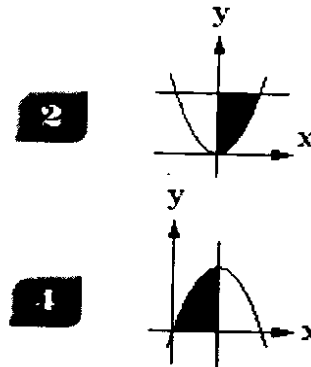
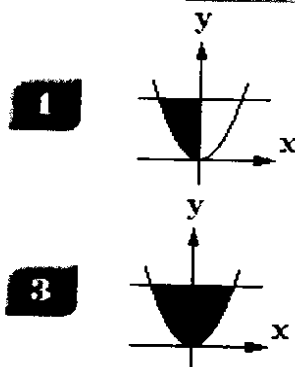
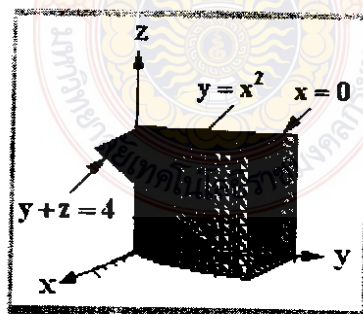
5. จากรูปทรงสามมิติซึ่งถูกล้อมรอบด้วยระนาบ $x^2 + y^2 = 4$ ระนาบ xy และระนาบ $x + z = 3$ จะมีภาพฉายบนระนาบ xy ตรงกับข้อใด



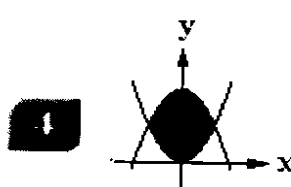
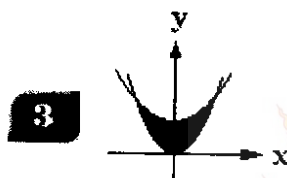
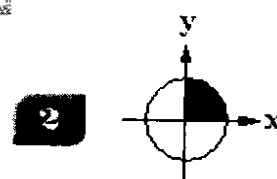
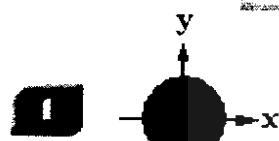
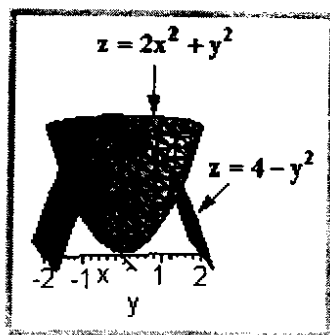
6. จากรูปทรงสามมิติซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิว $x^2 + y^2 = 2y$, ผิว $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ และระนาบ xy จะมีภาพฉายบนระนาบ xy ตรงกับข้อใด



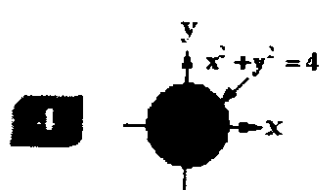
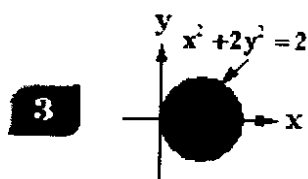
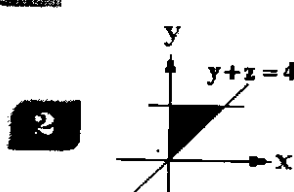
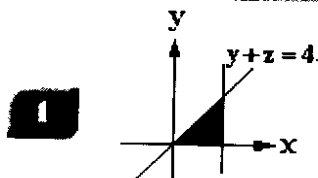
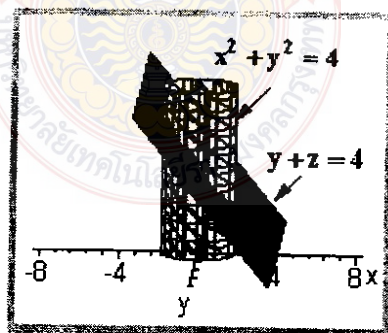
7. จากรูปทรงสามมิติซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิว $y + z = 4$, $y = x^2$, ระนาบ xy และระนาบ yz จะมีภาพฉายบนระนาบ xy ตรงกับข้อใด



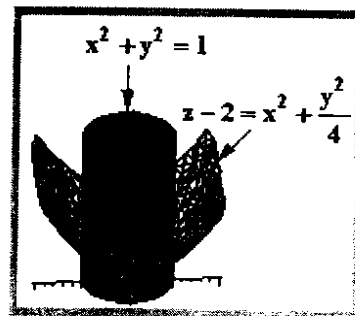
8. จากรูปทรงสามมิติซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิว $z = 2x^2 + y^2$ และ ผิว $z = 4 - y^2$ จะมีภาพฉายบนระนาบ xy ตรงกับข้อใด



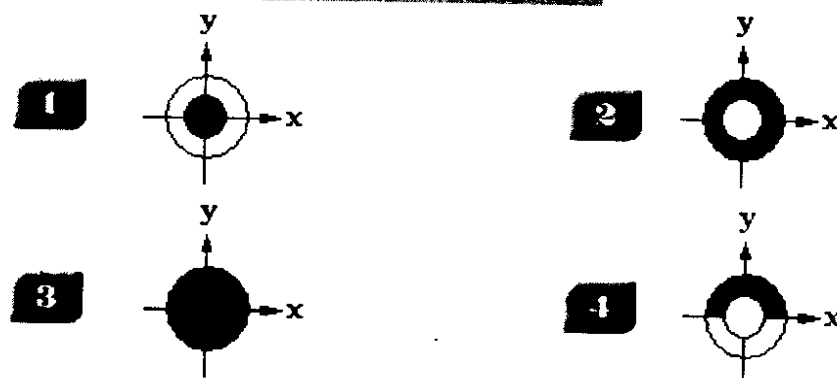
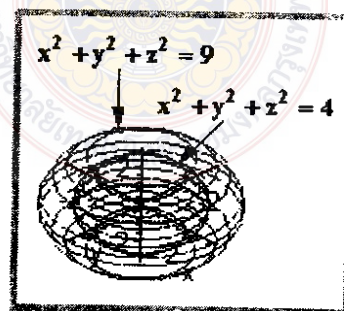
9. จากรูปทรงสามมิติซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิว $x^2 + y^2 = 4$, ระนาบ $y + z = 4$ และ $z = 0$ จะมีภาพฉายบนระนาบ xy ตรงกับข้อใด



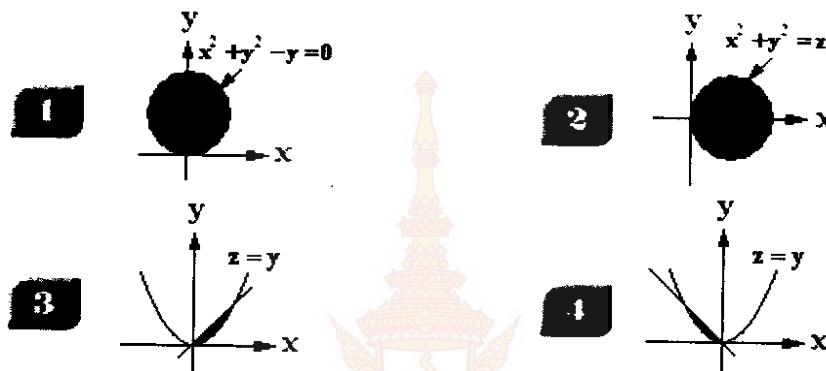
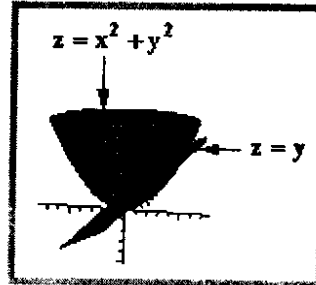
10. จากรูปทรงสามมิติซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิว $x^2 + y^2 = 1$ และผิว $z - 2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$ ในอวกาศที่ 1 จะมีภาพฉายบนระนาบ xy ตรงกับข้อใด



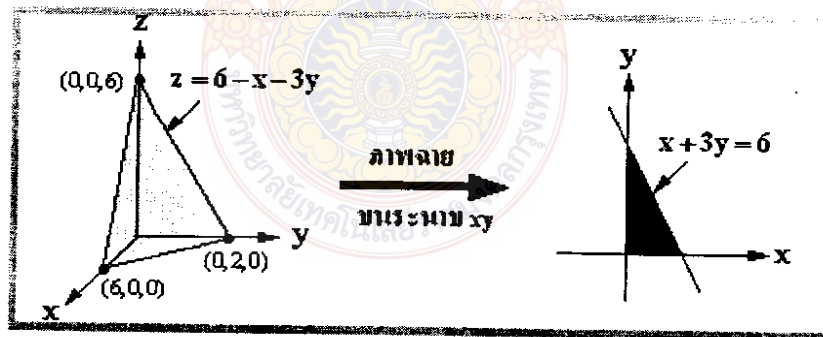
11. จากรูปทรงสามมิติซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิว $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ และผิว $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ จะมีภาพฉายบนระนาบ xy ตรงกับข้อใด



12. จากรูปทรงสามมิติซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิว $z = x^2 + y^2$ และระนาบ $z = y$ จะมีภาพฉายบนระนาบ xy ตรงกับข้อใด



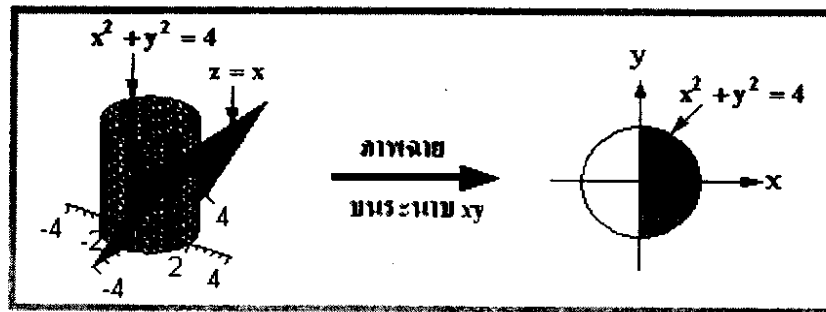
13. จากรูป ข้อใดถูก



Four options for the volume calculation:

- 1. $V = \int_0^6 \int_0^{x+3y} (x+3y) dx dy$
- 2. $V = \int_0^6 \int_0^{6-3y} (x+3y) dx dy$
- 3. $V = \int_0^2 \int_0^{x+3y} (6-x-3y) dx dy$
- 4. $V = \int_0^2 \int_0^{6-3y} (6-x-3y) dx dy$

14. จากรูป ข้อใดถูก



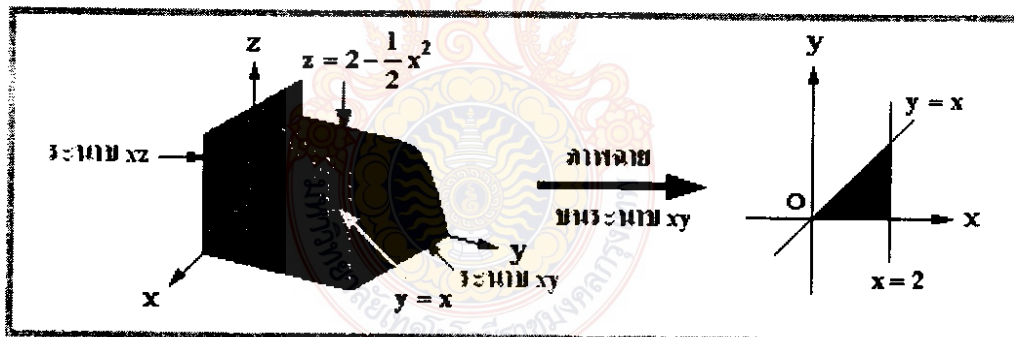
1 $V = \int_0^2 \int_0^{2-y} x \, dx \, dy$

2 $V = \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x \, dx \, dy$

3 $V = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} z \, dy \, dx$

4 $V = \int_{-2}^2 \int_0^{2-x} z \, dy \, dx$

15. จากรูป ข้อใดถูก



1 $V = \int_0^2 \int_0^x \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) dy \, dx$

2 $V = \int_0^2 \int_0^y \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) dy \, dx$

3 $V = \int_0^1 \int_2^y \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) dx \, dy$

4 $V = \int_0^1 \int_0^y \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) dx \, dy$

**แบบสอบถามความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่อง “การพัฒนา
คอมพิวเตอร์ช่วยสอนสำหรับบททวนเรื่องปริมาตร” มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล
กรุงเทพ**

คำชี้แจง ขอให้นักศึกษาแสดงความคิดเห็นในรายการต่างๆต่อไปนี้ โดยใส่เครื่องหมาย ✓
เพียงข้อเดียวลงในช่องที่ตรงกับระดับความพึงพอใจของนักศึกษามากที่สุด

ข้อที่	รายการ	ระดับความคิดเห็น				
		มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
	ด้านภาษา					
1	ภาษาที่ใช้ในเนื้อหาและแบบทดสอบเรื่อง“บททวน การเขียนรูป” มีความชัดเจน เข้าใจง่าย					
2	ภาษาที่ใช้ในเนื้อหาและแบบทดสอบเรื่อง“บททวน การหาปริพันธ์” มีความชัดเจน เข้าใจง่าย					
3	ภาษาที่ใช้ในเนื้อหาและแบบทดสอบเรื่อง “การใส่ ลิมิตปริพันธ์สองชั้น” มีความชัดเจน เข้าใจง่าย					
4	ภาษาที่ใช้ในเนื้อหาและแบบทดสอบเรื่อง “การหา ปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดฉาก” มีความชัดเจน เข้าใจง่าย					
	ด้านรูปแบบคอมพิวเตอร์ช่วยสอน					
5	คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในการนำเสนอเนื้อหา มีความน่าสนใจ					
6	คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในการนำเสนอแบบทดสอบ มีความน่าสนใจ					
	ด้านเนื้อหา					
7	เนื้อหาเรื่อง “บททวนการเขียนรูป” ทำให้มี ความเข้าใจในเรื่องนี้ดีขึ้น					
8	เนื้อหาเรื่อง “บททวนการหาปริพันธ์” ทำให้มี ความเข้าใจในเรื่องนี้ดีขึ้น					
9	เนื้อหาเรื่อง “การใส่ลิมิตปริพันธ์สองชั้น” ทำให้มี ความเข้าใจในการใส่ลิมิต					

ข้อที่	รายการ	ระดับความคิดเห็น				
		มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
10	เนื้อหาเรื่อง “การหาปริมาตรในระบบพิกัดฉาก” ทำให้มีความเข้าใจในเรื่องการหาปริมาตร					
11	การได้รับความรู้จากเนื้อหาเรื่อง “บททวนการเขียนรูป” มีประโยชน์					
12	การได้รับความรู้จากเนื้อหาเรื่อง “บททวนการหาปริพันธ์” มีประโยชน์					
13	การได้รับความรู้จากเนื้อหาเรื่อง “การใส่ลิมิตปริพันธ์สองชั้นระบบพิกัดฉาก” มีประโยชน์					
14	การได้รับความรู้จากเนื้อหาเรื่อง “การหาปริมาตรโดยใช้ปริพันธ์สองชั้นระบบพิกัดฉาก” มีประโยชน์					
	ด้านแบบทดสอบ					
15	แบบทดสอบเรื่อง “บททวนการเขียนรูป” ทำให้มีความพร้อมในการเรียนเรื่องการหาปริมาตรมากขึ้น					
16	แบบทดสอบเรื่อง “บททวนการหาปริพันธ์” ทำให้มีความพร้อมในการเรียนเรื่องการหาปริมาตรมากขึ้น					
17	แบบทดสอบเรื่อง “การใส่ลิมิตปริพันธ์สองชั้นระบบพิกัดฉาก” ทำให้มีความพร้อมในการสอบ					
18	แบบทดสอบเรื่อง “การหาปริมาตรในระบบพิกัดฉาก” ทำให้มีความพร้อมในการสอบ					
	ด้านอื่นๆ					
19	การรู้วัตถุประสงค์ของเนื้อหาที่มีประโยชน์					
20	หลังจากใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน นักศึกษามีความสามารถในระดับใด					
21	การเรียนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน มีประโยชน์ในระดับใด					
22	นักศึกษาชอบการทบทวนและการเรียนด้วยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้ในระดับใด					
23	การใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้ช่วยให้ทำข้อสอบได้					

ประวัติผู้วิจัย

ผู้ช่วยศาสตราจารย์วรรณ ไชยวิโน

- วุฒิ
- ค.บ. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปี 2515
 - น.บ. (นิติศาสตร์) มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปี 2524
 - ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปี 2520
- ตำแหน่งทางวิชาการ
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ระดับ 8
- ตำแหน่งงาน
- อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ
 - สอนวิชา คณิตศาสตร์ แคลคูลัส และสถิติ
- งานวิจัย
- การพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่องอนุพันธ์ฟังก์ชันพีชคณิต (ได้รับทุนอุดหนุนจาก สกว. 2542)
 - การศึกษาความต้องการของนักศึกษา ต่อการบริการทางวิชาการ สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตเทคนิคกรุงเทพฯ (ได้รับงบประมาณเงินผลประโยชน์ 2547)
 - การประดิษฐ์และการพัฒนาประสิทธิภาพสื่อการเรียนรู้เรื่องพื้นที่บนระนาบ