

แคลคูลัส 1

ประเสริฐ อยู่สำราญ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ



$$V=abc \quad S=2ab+2bc+2ca$$

$$\frac{a}{b}=\tan x$$
$$\frac{a}{c}=\sin y$$

$$xy=ab^2$$

แคลคูลัส 1
รหัสวิชา 2-212-103

โดย
นายประเสริฐ อยู่สำราญ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

คำนำ

ตำรา “แคลคูลัส 1” เล่มนี้ เรียบเรียงขึ้นเพื่อให้นักศึกษาใช้ประกอบการเรียนการศึกษาในรายวิชา 2-212-103 ชื่อวิชาแคลคูลัส 1 ซึ่งเป็นวิชาในหมวดพื้นฐานวิชาชีพของนักศึกษาระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ และสำหรับผู้สนใจทั่วไป โดยเนื้อหาของตำราเล่มนี้มีทั้งหมด 7 บท ประกอบด้วย บทที่ 1 “ฟังก์ชัน” บทที่ 2 “ลิมิตและความต่อเนื่อง” บทที่ 3 “อนุพันธ์ของฟังก์ชัน” บทที่ 4 “การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน” บทที่ 5 “ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต” บทที่ 6 “เทคนิคการหาปริพันธ์” บทที่ 7 “ปริพันธ์จำกัดเขตและการประยุกต์” ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า ตำราเล่มนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับนักศึกษาและผู้สนใจทั่วไป ที่ต้องการนำองค์ความรู้ไปต่อยอดในแขนงต่าง ๆ

ขอกราบขอบพระคุณครูบาอาจารย์ผู้ที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้แก่ผู้เรียบเรียง และขอกราบขอบพระคุณผู้ให้การสนับสนุนทุกท่าน หากมีข้อเสนอแนะหรือข้อผิดพลาดประการใด ผู้เขียนขอน้อมรับไว้และขออภัยมา ณ ที่นี้

นายประเสริฐ อยู่สำราญ
อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ
พฤษภาคม 2565

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 ฟังก์ชัน	1
1.1 นิยามของฟังก์ชัน	1
1.1.1 กราฟของฟังก์ชัน	3
1.1.2 ฟังก์ชันที่นิยามทีละช่วง	4
1.1.3 การหาค่าของฟังก์ชัน	9
1.1.4 ฟังก์ชันผกผัน	12
1.2 ประเภทของฟังก์ชัน	15
1.2.1 ฟังก์ชันพีชคณิต	15
1.2.2 ฟังก์ชันอดิศัย	18
1.3 พีชคณิตของฟังก์ชัน	18
1.4 ฟังก์ชันประกอบ	21
1.4.1 การเขียนฟังก์ชันในรูปของฟังก์ชันประกอบ	25
1.5 การใช้ซอฟต์แวร์ในการลงจุดกราฟ	26
สรุปเนื้อหาในบทที่ 1	27
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1	28
เอกสารอ้างอิง	29
บทที่ 2 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	31
2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน	31
2.2 ทฤษฎีบทของลิมิต	36
2.2.1 การหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$	42
2.3 ลิมิตกับปัญหาค่าอนันต์	48
2.3.1 การหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\pm \frac{\infty}{\infty}$	54
2.4 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	56
2.4.1 ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วงปิด	61

	หน้า
2.4.2 การขยายความต่อเนื่องของฟังก์ชันไปยังจุด	63
สรุปเนื้อหาในบทที่ 2	64
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2	65
เอกสารอ้างอิง	67
บทที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	69
3.1 เส้นสัมผัสและอัตราการเปลี่ยนแปลง	69
3.1.1 เส้นสัมผัสโค้ง	69
3.1.2 อัตราการเปลี่ยนแปลง	71
3.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	72
3.3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต	75
3.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ	80
3.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย	87
3.6 อนุพันธ์อันดับสูง	90
3.7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย	93
3.7.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม	93
3.7.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	98
3.7.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	103
3.7.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	104
สรุปเนื้อหาในบทที่ 3	113
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3	114
เอกสารอ้างอิง	117
บทที่ 4 การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	119
4.1 รูปแบบยังไม่กำหนด	119
4.1.1 กฎของโลปีตาล	119
4.1.2 รูปแบบยังไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ และ $\infty - \infty$	122
4.1.3 รูปแบบยังไม่กำหนด 0^0 , ∞^0 หรือ 1^∞	124

	หน้า
4.2 การเขียนกราฟของฟังก์ชัน	127
4.2.1 ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด	127
4.2.2 ความเว้า และจุดเปลี่ยนเว้า	131
4.2.3 ค่าสุดขีดของฟังก์ชัน	134
4.2.4 การหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง	140
4.3 การประยุกต์การแก้ปัญหาโจทย์โดยใช้ค่าสุดขีดของฟังก์ชัน	145
4.4 ความเร็ว ความเร่ง	147
4.4.1 การเร่งความเร็วและการชะลอความเร็ว	149
4.5 ปัญหาอัตราสัมพัทธ์	151
4.6 ค่าเชิงอนุพันธ์	154
4.6.1 การประมาณค่าเชิงเส้น	156
4.6.2 การประยุกต์ค่าเชิงอนุพันธ์ในการประมาณค่า	158
4.6.3 การประยุกต์ค่าเชิงอนุพันธ์ในการหาค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการวัด	159
สรุปเนื้อหาในบทที่ 4	161
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4	162
เอกสารอ้างอิง	164
บทที่ 5 ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต	165
5.1 ปริยานุพันธ์	165
5.2 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตัวแปร	171
สรุปเนื้อหาในบทที่ 5	184
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5	185
เอกสารอ้างอิง	187
บทที่ 6 เทคนิคการหาปริพันธ์	189
6.1 การหาปริพันธ์ที่ละส่วน	189
6.1.1 การหาปริพันธ์ที่ละส่วนโดยใช้ตาราง	196
6.2 การหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง	198

	หน้า
6.2.1 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูป $\int \sin^m x \cos^n x dx$	198
6.2.2 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูป $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$	203
6.2.3 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูป $\int \tan^m x \sec^n x dx$ หรือ $\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x dx$	204
6.2.4 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูปยกกำลัง	207
6.3 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ	210
6.4 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย	216
6.5 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตัวแปรใหม่	225
สรุปเนื้อหาในบทที่ 6	227
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6	228
เอกสารอ้างอิง	230
บทที่ 7 ปริพันธ์จำกัดเขตและการประยุกต์	231
7.1 การหาค่าปริพันธ์จำกัดเขต	233
7.2 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง	241
7.2.1 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$	241
7.2.2 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $x = f(y)$ และ $x = g(y)$	250
7.3 การหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุน	256
7.3.1 การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีแบบจาน	256
7.3.2 การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีเปลือก ทรงกระบอก	273
สรุปเนื้อหาในบทที่ 7	286
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7	287
เอกสารอ้างอิง	288

	หน้า
ภาคผนวก	
ภาคผนวก ก การลงจุดกราฟโดยใช้เว็บแอปพลิเคชัน	289
ภาคผนวก ข พื้นฐานที่ใช้ในการศึกษาแคลคูลัส	289
ภาคผนวก ค พิสูจน์สูตร	311
ภาคผนวก ง เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท	339
บรรณานุกรม	349
ดรรชนี	351

สารบัญตาราง

ตาราง	หน้า
1.1 ราคาค่าโดยสารรถเมล์ไฟฟ้าสายหนึ่ง	5
1.2 แสดงการแยกฟังก์ชันในรูปแบบของฟังก์ชันประกอบ	25
2.1 แสดงค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายและทางขวา	31
2.2 แสดงค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายและทางขวา	32
2.3 แสดงค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายและทางขวา	34
2.4 แสดงค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ค่าอนันต์	49
2.5 แสดงค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ค่า 0	50
3.1 แสดงค่าของ $(1+x)^{1/x}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้ายและทางขวา	93
4.1 แสดงความสัมพันธ์ความเร็วและความเร่ง	148
ข.1 แสดงความสัมพันธ์ของมุมในรูปองศาและเรเดียน	303
ข.2 แสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในมุมต่าง ๆ	306

สารบัญรูป

รูป	หน้า
1.1 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y	3
1.2 แสดงกราฟที่เป็นฟังก์ชัน และกราฟที่ไม่เป็นฟังก์ชัน	3
1.3 กราฟแสดงฟังก์ชันระหว่างระยะทางกับราคาค่าโดยสารรถเมล์ไฟฟ้า	6
1.4 กราฟแสดงฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์	7
1.5 กราฟแสดงฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด	8
1.6 กราฟแสดงฟังก์ชันคู่ ฟังก์ชันคี่	9
1.7 กราฟแสดงฟังก์ชันเชิงเส้น	15
1.8 กราฟแสดงฟังก์ชันยกกำลัง	16
1.9 กราฟแสดงฟังก์ชันพหุนาม	17
1.10 กราฟแสดงฟังก์ชันตรรกยะ	17
1.11 แผนภาพแสดงฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$	21
1.12 กราฟแสดงตารางสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนแกน XY	26
2.1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 1$	32
2.2 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$	33
2.3 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$	35
2.4 กราฟแสดงฟังก์ชัน เมื่อ $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$	41
2.5 กราฟแสดงลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์	49
2.6 กราฟแสดงลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0	50
2.7 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x - a}$	51
2.8 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^n$	51
2.9 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x^n}$	52

รูป	หน้า
2.10 กราฟแสดงการหาค่าฟังก์ชันและหาค่าลิมิตที่จุด $x = a$	57
3.1 กราฟแสดงความชันของเส้นโค้งที่ผ่านจุด P และ Q	69
3.2 กราฟแสดงการตัดกันของเส้นตรงกับกราฟวงกลม 1 หน่วย	103
4.1 กราฟแสดงฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด และฟังก์ชันคงตัว	126
4.2 กราฟแสดงเส้นสัมผัสโค้งบนฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด และฟังก์ชันคงตัว	128
4.3 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 2x + 3$	129
4.4 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3$	130
4.5 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$	131
4.6 กราฟแสดงการเว้าขึ้นและเว้าลงของฟังก์ชัน	132
4.7 กราฟแสดงจุดเปลี่ยนเว้าของฟังก์ชัน	133
4.8 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$	134
4.9 กราฟแสดงค่าสุดขีดของฟังก์ชัน	134
4.10 กราฟแสดงจุดวิกฤตของฟังก์ชัน	136
4.11 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$	138
4.12 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$	139
4.13 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$	141
4.14 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2 + 12x + 3x^2 - 2x^3$	143
4.15 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$	144
4.16 แสดงสวนสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีรั้วยาว 100 เมตร	145
4.17 แสดงแผ่นกระดาดที่ตัดมุมทั้ง 4 เพื่อสร้างกล่อง	146
4.18 แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุที่สอดคล้อง $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$	151
4.19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างบันไดและกำแพง	152
4.20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างถึงรูปกรวยกลม รัศมีและความสูง	153
6.1 แสดงสามเหลี่ยมมุมฉากที่สอดคล้องกับ $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ และ $\sqrt{a^2 - x^2}$	210
7.1 กราฟแสดงผลแบ่งกันของบริเวณ R	231
7.2 กราฟแสดงการแบ่งบริเวณ R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนวตั้ง n ชิ้น	242

รูป	หน้า
7.3 กราฟแสดงพื้นที่ เมื่อ $f(x) \geq 0$ แต่ $g(x) \leq 0$	243
7.4 กราฟแสดงพื้นที่เมื่อ $f(x) \leq 0$ และ $g(x) \leq 0$	244
7.5 กราฟแสดงการกำหนดขอบเขตของการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$	245
7.6 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ เส้นตรง $x = 3$ และแกน X	246
7.7 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 1$ และเส้นตรง $y = x + 1$	247
7.8 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ เส้นโค้ง $y = x^2 - 8x + 16$ และแกน X	249
7.9 กราฟแสดงการแบ่งบริเวณ R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนวนอน n ชั้น	250
7.10 กราฟแสดงการกำหนดขอบเขตของการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $x = f(y)$ และ $x = g(y)$	252
7.11 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y^2 = x - 2$ เส้นตรง $y = -1$, $y = 2$ และแกน Y	253
7.12 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = y^2$ และ $x = 4 - 3y^2$	254
7.13 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R รอบแกน X โดยวิธีแบบจาน	256
7.14 กราฟแสดงแผ่นงานที่มีรัศมี $f(t_i)$ และมีความหนา Δx_i	257
7.15 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ รอบแกน X โดยวิธีแบบจาน	258
7.16 กราฟแสดงแผ่นวงแหวนที่มีรัศมี $f(x) - g(x)$ และมีความหนา dx	258
7.17 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ รอบเส้นตรง $y = k$ โดยวิธีแบบจาน	260
7.18 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $x = r(y)$ และ $x = s(y)$ รอบเส้นตรง $x = h$ โดยวิธีแบบจาน	261
7.19 กราฟแสดงแผ่นวงแหวนรัศมีวงนอก $x = r(y) - h$ และรัศมีวงใน $x = s(y) - h$ และมีความหนา dy	261
7.20 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ เส้นตรง $x = 3$ แกน X, Y	263

รูป	หน้า
7.21 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ เส้นตรง $x = 3$ แกน X, Y รอบแกน X	263
7.22 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = 3y^2$ เส้นตรง $y = -2$ และแกน Y	265
7.23 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = 3y^2$ เส้นตรง $y = -2$ และแกน Y รอบแกน Y	265
7.24 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$	267
7.25 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$ รอบแกน X	267
7.26 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$ รอบแกน Y	268
7.27 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 3$ เส้นตรง $y = x + 2$, $x = 0$ และ $x = 1$	270
7.28 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 3$ เส้นตรง $y = x + 2$, $x = 0$ และ $x = 1$ รอบเส้นตรง $y = 1$	270
7.29 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = y^2$ เส้นตรง $y = 2$ และ $x = 0$	272
7.30 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = y^2$ เส้นตรง $y = 2$ และ $x = 0$ รอบเส้นตรง $x = -1$	272
7.31 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R รอบแกน Y โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก	273
7.32 กราฟแสดงเปลือกทรงกระบอกที่มีรัศมี t_i ความสูง $f(t_i)$ และความหนา Δx_i	274
7.33 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ รอบแกน Y โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก	275
7.34 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ รอบเส้นตรง $x = h$ โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก	276
7.35 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $x = r(y)$ และ $x = s(y)$ รอบเส้นตรง $y = k$ โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก	277
7.36 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$	279

รูป	หน้า
7.37 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$ รอบแกน Y	279
7.38 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$ รอบแกน X	280
7.39 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ เส้นตรง $x = 1$ แกน X และแกน Y	282
7.40 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ เส้นตรง $x = 1$, แกน X และแกน Y รอบเส้นตรง $x = 1$	282
7.41 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = y^2 - 2y$ และแกน Y	284
7.42 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = y^2 - 2y$ และแกน Y รอบเส้นตรง $y = -1$	284
ก.1 แสดงหน้าเว็บไซต์ www.desmos.com	289
ก.2 แสดงหน้าเว็บไซต์การใช้งาน Graphing Calculator	290
ก.3 แสดงการเพิ่มกล่องข้อความเพื่อใส่ข้อมูลใน Graphing Calculator	290
ก.4 แสดงแป้นพิมพ์ข้อมูลใน Graphing Calculator	291
ก.5 แสดงฟังก์ชันต่าง ๆ ใน Graphing Calculator	291
ก.6 แสดงเครื่องมือต่าง ๆ ใน Graphing Calculator	292
ก.7 แสดงปุ่มช่วยเหลือต่าง ๆ ใน Graphing Calculator	292
ก.8 แสดงการวาดกราฟฟังก์ชันและการลงจุดใน Graphing Calculator	293
ก.9 แสดงการตั้งค่าแสดงผลของกราฟใน Graphing Calculator	294
ก.10 แสดงการตั้งค่าแสดงผลของจุดใน Graphing Calculator	294
ก.11 แสดงการตั้งค่าของกราฟและจุดใน Graphing Calculator	295
ก.12 แสดงการวาดกราฟและจุดที่เคลื่อนไหวใน Graphing Calculator	296
ก.13 แสดงการกำหนดขอบเขตและการแรเงาใน Graphing Calculator	297
ก.14 แสดงการปรับสีและระดับความเข้มของการแรเงาใน Graphing Calculator	298
ข.1 กราฟแสดงฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	300
ข.2 กราฟแสดงฟังก์ชันลอการิทึมเทียบกับฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	301

รูป	หน้า
ข.3 กราฟแสดงการวัดมุมเป็นเรเดียนในวงกลม 1 หน่วย	302
ข.4 กราฟแสดงการวัดมุมเป็นเรเดียนในทิศต่าง ๆ	303
ข.5 กราฟแสดงความสัมพันธ์สามเหลี่ยมมุมฉากกับวงกลม	304
ข.6 กราฟแสดงฟังก์ชันตรีโกณมิติ	305
ข.7 กราฟแสดงฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	310

บทที่ 1

ฟังก์ชัน

ในการศึกษาแคลคูลัสอาจกล่าวได้ว่าฟังก์ชันไม่ได้เป็นเพียงเครื่องมือที่ใช้ในการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณต่าง ๆ เท่านั้น แต่ฟังก์ชันยังเป็นเนื้อหาหลักของการศึกษาที่ใช้ในการทำ ความเข้าใจในการเปลี่ยนแปลงอย่างลึกซึ้งมากขึ้น แคลคูลัสเป็นสิ่งที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลง อย่างต่อเนื่อง และฟังก์ชันเป็นรากฐานที่สำคัญสำหรับการศึกษาแนวคิดหลักของแคลคูลัส เช่น ลิมิตอนุพันธ์ และปริพันธ์

ในการทำความเข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชันในทางแคลคูลัสเป็นสิ่งสำคัญเป็นอย่างยิ่งสำหรับผู้ ที่ต้องการศึกษาในทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น รวมถึงผู้ที่ต้องการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ในสาขาวิชาต่าง ๆ ได้เช่นเดียวกัน

1.1 นิยามของฟังก์ชัน (Definition of function)

บทนิยาม 1.1 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ฟังก์ชัน (function) f จากเซต A ไปยังเซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \rightarrow B$ คือเซตของคู่อันดับ (order) (a, b) โดยที่ทุกสมาชิก $a \in A$ จะมีสมาชิก $b \in B$ ที่ทำให้ $(a, b) \in f$ และมีเงื่อนไขความสัมพันธ์คือคู่อันดับสองคูใด ๆ ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกัน

จากบทนิยาม 1.1 จะเรียกเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับว่าโดเมน (domain) ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $D_f = \{a \mid (a, b) \in f\}$ และจะเรียกเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับว่าเรนจ์ (range) ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $R_f = \{b \mid (a, b) \in f\}$ จะได้ว่า $A = D_f$ และ $R_f \subseteq B$

พิจารณาความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

$$f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\} \quad \text{เป็นฟังก์ชัน}$$

$$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, a), (4, c)\} \quad \text{เป็นฟังก์ชัน}$$

$$f_3 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (1, d)\} \quad \text{ไม่เป็นฟังก์ชัน เนื่องจาก 1 จับคู่กับ } a \text{ และ } d$$

พิจารณาคู่อันดับ $(x, y) \in f$ ให้ $y = f(x)$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันใด ๆ โดยที่ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x จะมีค่าเป็น y หรือกล่าวได้ว่า y เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x ในที่นี้

- ตัวแปร x จะเรียกว่า **ตัวแปรอิสระ** (independent variable)
- ตัวแปร y จะเรียกว่า **ตัวแปรตาม** (dependent variable)

โดยอาจจะกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระกับตัวแปรตาม เมื่อแทนค่าตัวแปรอิสระ 1 ค่า จะได้ตัวแปรตาม 1 ค่า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1 จงเขียนฟังก์ชันของราคาค่าโดยสารรถแท็กซี่ โดยมีราคาเริ่มต้นที่ 35 บาท และคิดค่าโดยสารเพิ่มตามระยะทางที่เพิ่ม โดยคิดระยะทางกิโลเมตรละ 6 บาท ดังตารางต่อไปนี้

ระยะทาง (กม.)	0	1	2	3	4
ค่าโดยสาร (บาท)	35	41	47	53	59

วิธีทำ ให้ x แทน ระยะทาง และ y แทน ค่าโดยสาร จะเขียนฟังก์ชันในรูป $y = f(x)$

$$\text{จากโจทย์จะได้ว่า} \quad f(0) = 35 = 35 + 6(0)$$

$$f(1) = 41 = 35 + 6(1)$$

$$f(2) = 47 = 35 + 6(2)$$

$$f(3) = 53 = 35 + 6(3)$$

$$f(4) = 59 = 35 + 6(4)$$

ดังนั้น $f = \{(0, 35), (1, 41), (2, 47), (3, 53), (4, 59)\}$ เป็นฟังก์ชัน

เขียนในรูปฟังก์ชันได้เป็น $f(x) = 35 + 6x$ สำหรับ $x = 0, 1, 2, 3, 4$ ■

ตัวอย่าง 1.2 จงเขียนฟังก์ชันของราคาอาหารประเภทข้าวแกง โดยมีราคาเริ่มต้นที่จำนวนกับข้าว 1 อย่างราคา 25 บาท และคิดราคากับข้าวเพิ่มอย่างละ 5 บาท

จำนวนกับข้าว (อย่าง)	1	2	3	4
ราคาอาหาร (บาท)	25	30	35	40

วิธีทำ ให้ x แทน จำนวนกับข้าว และ y แทน ราคาอาหาร จะเขียนฟังก์ชันในรูป $y = f(x)$

$$\text{จากโจทย์จะได้ว่า} \quad f(1) = 25 = 20 + 5(1)$$

$$f(2) = 30 = 20 + 5(2)$$

$$f(3) = 35 = 20 + 5(3)$$

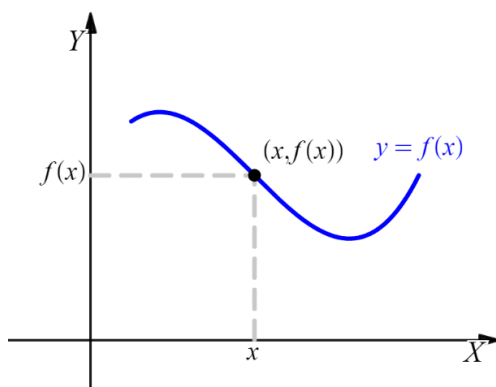
$$f(4) = 40 = 20 + 5(4)$$

ดังนั้น $f = \{(1,25), (2,30), (3,35), (4,40)\}$ เป็นฟังก์ชัน

เขียนในรูปฟังก์ชันได้เป็น $f(x) = 20 + 5x$ สำหรับ $x = 1, 2, 3, 4$ ■

1.1.1 กราฟของฟังก์ชัน (Graph of function)

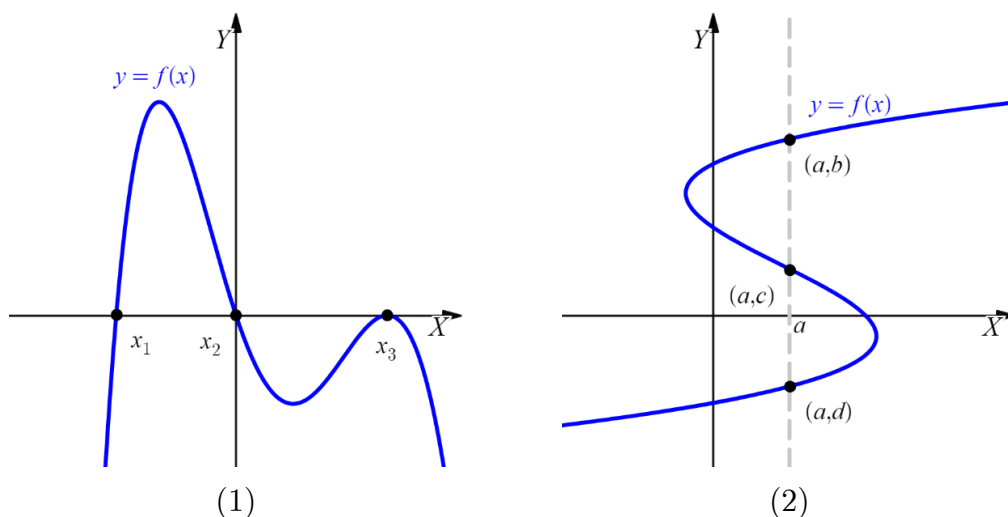
ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรอิสระค่าจริง x ใด ๆ กราฟของฟังก์ชัน f ในระนาบ XY คือคู่ลำดับ $(x, f(x))$ หรือ (x, y) ที่สอดคล้องกับ $y = f(x)$ ดังรูป 1.1



รูป 1.1 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ในการทดสอบว่ากราฟใดเป็นฟังก์ชันสามารถทำได้โดยการสร้างเส้นตรงที่ขนานแกน Y ตัดกับกราฟ หากมีเส้นตรงที่ตัดกราฟมากกว่า 1 จุด จะได้ว่ากราฟนั้นไม่เป็นฟังก์ชัน ดังรูป 1.2



(1) f เป็นฟังก์ชัน

(2) f ไม่เป็นฟังก์ชัน

รูป 1.2 แสดงกราฟที่เป็นฟังก์ชัน และกราฟที่ไม่เป็นฟังก์ชัน

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากรูป 1.2(2) ไม่เป็นฟังก์ชัน เนื่องจากมีคู่อันดับ (a, b) , (a, c) และ (a, d) ซึ่ง $a \in D_f$ นั้น จับคู่กับสมาชิก 3 ตัว คือ b, c และ d ซึ่งไม่สอดคล้องกับบทนิยาม 1.1

1.1.2 ฟังก์ชันที่นิยามทีละช่วง (Piecewise-defined functions)

ในบางครั้ง ฟังก์ชันที่พิจารณา อาจอยู่ในรูปแบบที่ไม่สามารถกำหนดฟังก์ชันออกมาในรูปแบบเดียวได้ เช่น ในการสั่งซื้อแก้วน้ำขนาด 22 ออนซ์ และมีการกรีนซื้อร้านครบถ้วน โดยมีค่าใช้จ่ายดังนี้

จำนวน 1 – 500 ชิ้น	ราคาชิ้นละ 5 บาท
จำนวน 501 – 1,000 ชิ้น	ราคาชิ้นละ 4 บาท
จำนวนมากกว่า 1,000 ชิ้น	ราคาชิ้นละ 3 บาท

สามารถนิยามฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่สอดคล้องกับได้ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 5x, & 1 \leq x \leq 500 & \text{--- (1)} \\ 4x, & 500 < x \leq 1,000 & \text{--- (2)} \\ 3x, & x > 1,000 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

เมื่อ x คือจำนวนแก้วที่สั่ง (หน่วยเป็นชิ้น) และ y คือค่าใช้จ่าย (หน่วยเป็นบาท)

จากฟังก์ชันข้างต้น มีสมการที่แตกต่างกัน 3 สมการ และเงื่อนไขที่แตกต่างกัน อย่างไรก็ตาม $y = f(x)$ ยังคงเป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงที่พิจารณา สำหรับจำนวนเต็ม $x \geq 1$

ในกรณีที่ฟังก์ชันที่นิยามทีละช่วงอยู่ในรูปค่าคงตัวทั้งหมด จะเรียกฟังก์ชันดังกล่าวว่าเป็น **ฟังก์ชันขั้นบันได** (step function) ตัวอย่างเช่น ราคาค่าโดยสารรถเมล์ไฟฟ้าสายหนึ่ง เดินทางจากสถานีต้นทางไปยังสถานีปลายทาง โดยมีราคาค่าโดยสารเริ่มต้นที่ 15 บาท สำหรับระยะทาง 0 – 4 กิโลเมตร และคิดราคาค่าโดยสาร 20 บาท สำหรับระยะทางตั้งแต่ 4 – 16 กิโลเมตร และคิดราคาค่าโดยสาร 25 บาท สำหรับระยะทางตั้งแต่ 16 กิโลเมตรขึ้นไป แสดงได้ดังตาราง 1.1

ตาราง 1.1 ราคาค่าโดยสารรถเมล์ไฟฟ้าสายหนึ่ง

กม.

0	สถานีต้นทาง												
2	15	สถานีที่ 1											
4	15	15	สถานีที่ 2										
6	20	15	15	สถานีที่ 3									
8	20	20	15	15	สถานีที่ 4								
10	20	20	20	15	15	สถานีที่ 5							
12	20	20	20	20	15	15	สถานีที่ 6						
14	20	20	20	20	20	15	15	สถานีที่ 7					
16	20	20	20	20	20	20	15	15	สถานีที่ 8				
18	25	20	20	20	20	20	20	15	15	สถานีที่ 9			
20	25	25	20	20	20	20	20	20	15	15	สถานีที่ 10		
22	25	25	25	20	20	20	20	20	20	15	15	สถานีที่ 11	
24	25	25	25	25	20	20	20	20	20	20	15	15	สถานีปลายทาง

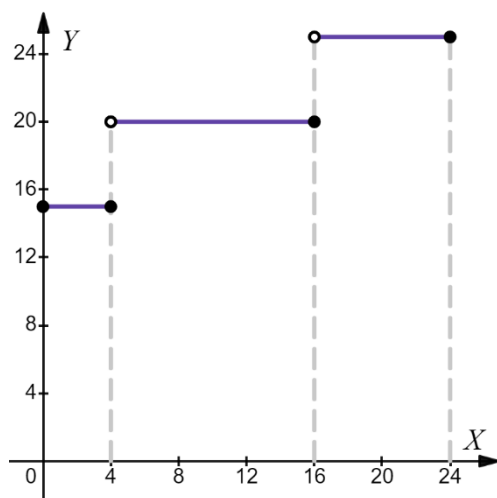
ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ในที่นี้สามารถนิยามฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่สอดคล้องกับตารางข้างต้นได้ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 15, & 0 \leq x \leq 4 & \text{--- (1)} \\ 20, & 4 < x \leq 16 & \text{--- (2)} \\ 25, & 16 < x \leq 24 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

เมื่อ x คือระยะทาง (หน่วยเป็นกิโลเมตร) และ y คือค่าโดยสาร (หน่วยเป็นบาท) แสดงได้ดังรูป

1.3



รูป 1.3 กราฟแสดงฟังก์ชันระหว่างระยะทางกับราคาค่าโดยสารรถเมล์ไฟฟ้า

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ในกรณีที่เราสนใจระยะห่างของจำนวนใด ๆ จากจุด 0 บนเส้นจำนวน โดยที่ไม่สนใจทิศทางว่าเป็นบวกหรือลบ เช่น ระยะห่างระหว่าง 0 ถึง 3 หรือระยะห่างระหว่าง -5 ถึง 0 จะนิยามค่าสัมบูรณ์ดังนี้

บทนิยาม 1.2 ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของ x นิยามโดย

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

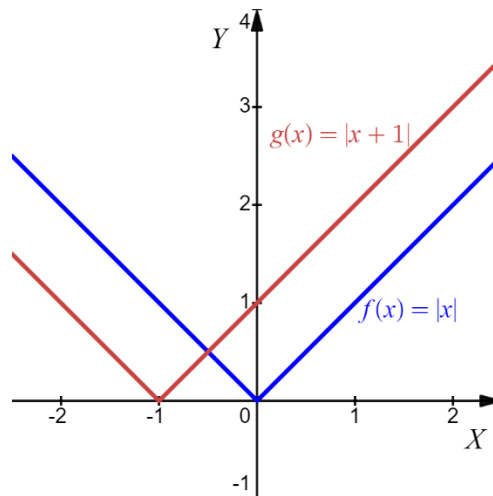
ฟังก์ชันที่นิยามที่ละช่วงที่สอดคล้องกับค่าสัมบูรณ์ จะเรียกว่าฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (absolute value function) ตัวอย่างเช่น $f(x) = |x|$ หรือ $g(x) = |x+1|$ โดยที่ $g(x)$ เมื่อเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันที่นิยามที่ละช่วง จะได้ว่า

$$g(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1, & x+1 \geq 0 \\ -(x+1), & x+1 < 0 \end{cases}$$

หรือเขียนในอีกทำนองหนึ่งได้ว่า

$$g(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases}$$

แสดงได้ดังรูป 1.4



รูป 1.4 กราฟแสดงฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

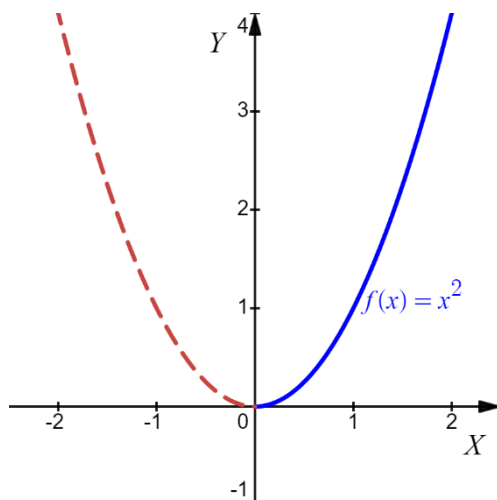
ในการโยนลูกบอลให้ลอยขึ้นบนฟ้า จะสังเกตว่าเมื่อระยะเวลาผ่านไป ลูกบอลจะมีระยะทางวัดจากพื้นดินถึงลูกบอลจะเพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่าเมื่อเวลาเพิ่ม ระยะทางเพิ่มขึ้น จนกระทั่งถึงจุดหนึ่งที่ลูกบอลลอยอยู่ในจุดสูงสุด หลังจากนั้นลูกบอลจะลอยตกลงมา วัดระยะทางจากพื้นดินถึงลูกบอลจะลดลง หรือกล่าวได้ว่าเมื่อเวลาเพิ่ม ระยะทางลดลง ลักษณะดังกล่าวสามารถนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม 1.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วงปิด I ใด ๆ และให้ x_1 และ x_2 อยู่ในช่วงปิด I

1. ถ้า $f(x_2) > f(x_1)$ โดยที่ $x_1 < x_2$ แล้ว จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) บนช่วงปิด I

2. ถ้า $f(x_2) < f(x_1)$ โดยที่ $x_1 < x_2$ แล้ว จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function) บนช่วงปิด I

ตัวอย่างฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด แสดงได้ดังรูป 1.5



f ลดบนช่วง $(-\infty, 0]$ และ f เพิ่ม บนช่วง $[0, \infty)$

รูป 1.5 กราฟแสดงฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

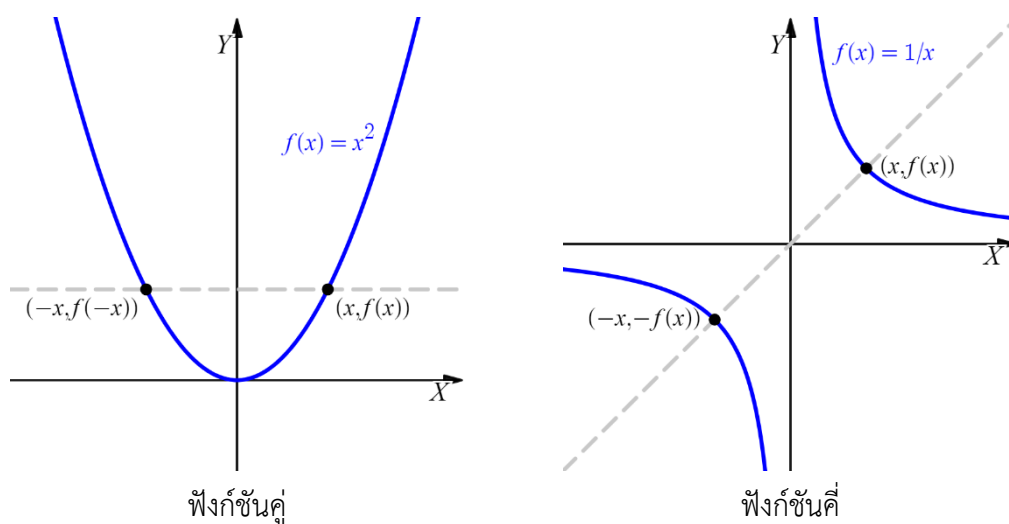
ฟังก์ชันบางประเภทเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปสมมาตร ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากกราฟของฟังก์ชัน หรือสามารถพิจารณาความสมมาตรจากบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 1.4 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน

1. ฟังก์ชันคู่ (even function) นิยามโดย $f(-x) = f(x)$
2. ฟังก์ชันคี่ (odd function) นิยามโดย $f(-x) = -f(x)$

สำหรับ x ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f

ตัวอย่างฟังก์ชันคู่ ฟังก์ชันคี่ แสดงได้ดังรูป 1.6



รูป 1.6 กราฟแสดงฟังก์ชันคู่ ฟังก์ชันคี่

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

1.1.3 การหาค่าของฟังก์ชัน (Evaluating function)

ในการหาค่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ สามารถทำได้โดยการแทนค่าตัวแปรอิสระ x เป็นค่าหรือตัวแปรอื่นที่ต้องการลงในฟังก์ชันที่ต้องการหาค่า หลังจากนั้น จะทำการคำนวณค่าของฟังก์ชันดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.3 กำหนดให้ $f(x) = 3x - 4$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(2)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x - 4$
 ดังนั้น $f(2) = 3(2) - 4$
 $= 6 - 4$
 $= 2$

นั่นคือ $f(2) = 2$ ■

2) $f(-3)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x - 4$
 ดังนั้น $f(-3) = 3(-3) - 4$

$$\begin{aligned} f(-3) &= -9 - 4 \\ &= -13 \end{aligned}$$

นั่นคือ $f(-3) = -13$ ■

3) $f(2a)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x - 4$

ดังนั้น $f(2a) = 3(2a) - 4$

$$= 6a - 4$$

นั่นคือ $f(2a) = 6a - 4$ ■

4) $f(x^2)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x - 4$

ดังนั้น $f(x^2) = 3(x^2) - 4$

$$= 3x^2 - 4$$

นั่นคือ $f(x^2) = 3x^2 - 4$ ■

5) $f(2x - 3)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x - 4$

ดังนั้น $f(2x - 3) = 3(2x - 3) - 4$

$$\begin{aligned} &= 6x - 9 - 4 \\ &= 6x - 13 \end{aligned}$$

นั่นคือ $f(2x - 3) = 6x - 13$ ■

ในกรณีค่าของฟังก์ชันที่ต้องการหาเป็นฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง ๆ จะต้องพิจารณาเงื่อนไขของฟังก์ชัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.4 กำหนดให้ $F(x) = \begin{cases} x, & x \geq 3 \\ x^3 - 1, & 1 \leq x < 3 \\ -2x, & x < 1 \end{cases}$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $F(3)$

วิธีทำ จาก $x = 3 \geq 0$ จะได้ว่า $F(x) = x$, $x \geq 3$

$$\text{ดังนั้น} \quad F(3) = 3 \quad \blacksquare$$

2) $F(2)$

วิธีทำ จาก $x = 2$ ซึ่ง $1 \leq 2 < 3$ จะได้ว่า $F(x) = x^3 - 1$, $1 \leq x < 3$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad F(2) &= 2^3 - 1 \\ &= 8 - 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad F(2) = 7 \quad \blacksquare$$

3) $F(1)$

วิธีทำ จาก $x = 1$ ซึ่ง $1 \leq 1 < 3$ จะได้ว่า $F(x) = x^3 - 1$, $1 \leq x < 3$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad F(1) &= 1^3 - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad F(1) = 0 \quad \blacksquare$$

4) $F(-1)$

วิธีทำ จาก $x = -1 < 1$ จะได้ว่า $F(x) = -2x$, $x < 1$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad F(-1) &= -2(-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad F(-1) = 2 \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.5 กำหนดให้ $f(x+1) = x^2 - 2x + 9$ จงหาค่าของ $f(x+2)$

วิธีทำ ให้ $m = x+1$ ดังนั้น $x = m-1$

$$\text{จาก} \quad f(x+1) = x^2 - 2x + 9$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad f(m) &= (m-1)^2 - 2(m-1) + 9 \\ &= m^2 - 2m + 1 - 2m + 2 + 9 \\ &= m^2 - 4m + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad f(x+2) &= (x+2)^2 - 4(x+2) + 12 \\ &= x^2 + 4x + 4 - 4x - 8 + 12 \\ &= x^2 + 8 \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad f(x+2) = x^2 + 8 \quad \blacksquare$$

1.1.4 ฟังก์ชันผกผัน (Inverse function)

ก่อนที่จะศึกษาฟังก์ชันผกผัน จะต้องพิจารณาก่อนว่าฟังก์ชันที่สนใจนั้นเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

บทนิยาม 1.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one function) ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $x_1, x_2 \in A$ ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \xrightarrow{1-1} B$

หมายเหตุ ในการพิจารณาว่าฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง สามารถตรวจสอบได้โดย

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ สมมติให้ $f(x_1) = f(x_2)$ ถ้าสามารถแสดงได้ว่า $x_1 = x_2$ จะสรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
2. ในกรณีถ้ามีตัวแปรตามบางค่า มีค่าแปรตามตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ค่า จะสรุปได้ว่าฟังก์ชันที่พิจารณาไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
3. พิจารณาจากกราฟ โดยวาดเส้นตรงที่ขนานแกน X หากเส้นตรงตัดกราฟของฟังก์ชันอย่างน้อย 2 จุด นั่นคือจุด $(x_1, f(x_1))$ และจุด $(x_2, f(x_2))$ จะได้ว่า $f(x_1) = f(x_2)$ แต่ $x_1 \neq x_2$ ดังนั้นไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่าง 1.6 กำหนดให้ $f(x) = x + 1$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

วิธีทำ สมมติให้ $f(x_1) = f(x_2)$
 ดังนั้น $x_1 + 1 = x_2 + 1$
 จะได้ว่า $x_1 = x_2$
 นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ■

ตัวอย่าง 1.7 กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 1$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 + 1$
 จะได้ว่า $f(1) = (1)^2 + 1$
 $= 1 + 1$
 $= 2$
 และ $f(-1) = (-1)^2 + 1$
 $= 1 + 1$
 $= 2$

เนื่องจาก มีตัวแปรตาม คือ 2 ซึ่งแปรค่าตามตัวแปรอิสระ 2 ค่า คือ 1 และ -1

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ■

ในการพิจารณาว่าฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันผกผันของอีกฟังก์ชันหนึ่ง จะพิจารณาดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.6 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะเรียก $x = f(y)$ ที่เกิดจากการสลับตัวแปรอิสระและตัวแปรตามว่า **ฟังก์ชันผกผัน** (inverse function) ของ $y = f(x)$ และจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $y = f^{-1}(x)$

ตัวอย่าง 1.8 กำหนดให้ $f(x) = 2x + 1$ จงหา $f^{-1}(x)$

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1 พิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
 สมมติให้ $f(x_1) = f(x_2)$

ดังนั้น $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$

จะได้ว่า $2x_1 = 2x_2$

$$x_1 = x_2$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ขั้นตอนที่ 2 หาฟังก์ชันผกผัน

จาก $y = 2x + 1$

ดังนั้น $x = 2y + 1$

$$x - 1 = 2y$$

$$\frac{x-1}{2} = y$$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ ■

ตัวอย่าง 1.9 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x-1}$ จงหา $f^{-1}(x)$

วิธีทำ **ขั้นตอนที่ 1** พิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

สมมติให้ $f(x_1) = f(x_2)$

ดังนั้น $\sqrt{x_1-1} = \sqrt{x_2-1}, \quad x_1, x_2 \geq 1$

จะได้ว่า $x_1 - 1 = x_2 - 1, \quad x_1, x_2 \geq 1$

$$x_1 = x_2, \quad x_1, x_2 \geq 1$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อ $x \geq 1$

ขั้นตอนที่ 2 หาฟังก์ชันผกผัน

จาก $y = \sqrt{x-1}, \quad x \geq 1$

ดังนั้น $x = \sqrt{y-1}, \quad x \geq 1$

$$x^2 = y - 1, \quad x \geq 1$$

$$x^2 + 1 = y, \quad x \geq 1$$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = x^2 + 1$ เมื่อ $x \geq 1$ ■

1.2 ประเภทของฟังก์ชัน (Type of function)

ฟังก์ชันที่มีกราฟจะแบ่งได้เป็น 2 ชนิด คือ ฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัย

1.2.1 ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic function)

ฟังก์ชันพีชคณิต คือฟังก์ชันที่แต่ละนิพจน์ประกอบด้วยค่าคงตัวและพจน์ของ x^n เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ ภายใต้การดำเนินการบวก ลบ คูณ หาร โดยฟังก์ชันที่พบบ่อย ได้แก่

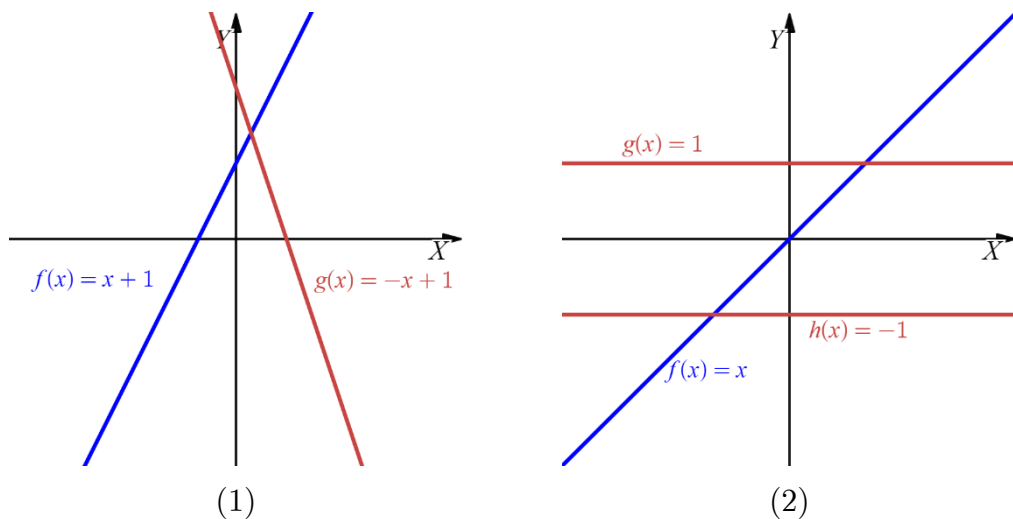
1. ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = mx + c$$

สำหรับค่าคงตัว m และ c ใด ๆ

- กรณี $m = 0$ จะได้ว่า $f(x) = c$ เรียกว่าฟังก์ชันค่าคงตัว (constant function)
- กรณี $m = 1$ และ $c = 0$ จะได้ว่า $f(x) = x$ เรียกว่าฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)

ตัวอย่างฟังก์ชันเชิงเส้น แสดงได้ดังรูป 1.7



รูป 1.7 กราฟแสดงฟังก์ชันเชิงเส้น

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

2. ฟังก์ชันยกกำลัง (power function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = x^k$$

สำหรับค่าคงตัว k ใด ๆ

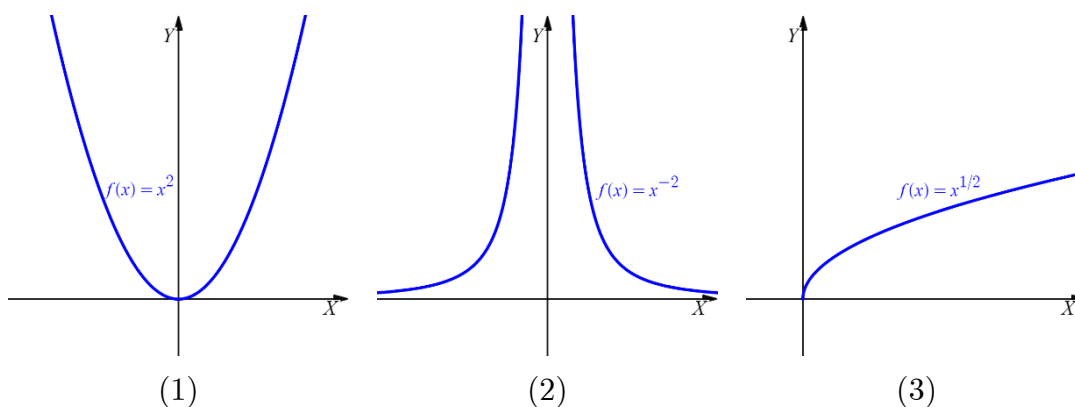
- กรณี $k = n$ เป็นจำนวนเต็มบวก $f(x) = x^n$ และโดเมนของกราฟคือจำนวนจริง
- กรณี $k = -n$ เป็นจำนวนเต็มลบ $f(x) = \frac{1}{x^n}$ และโดเมนของกราฟคือจำนวนจริง ยกเว้น

$$x = 0$$

- กรณี $k = \frac{1}{n}$ เป็นเศษส่วน $f(x) = x^{1/n}$ จะเรียกว่าฟังก์ชันรากที่ n (n^{th} root

function) โดเมนของกราฟจะพิจารณาจากรากต่าง ๆ

ตัวอย่างฟังก์ชันยกกำลัง แสดงได้ดังรูป 1.8



รูป 1.8 กราฟแสดงฟังก์ชันยกกำลัง

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

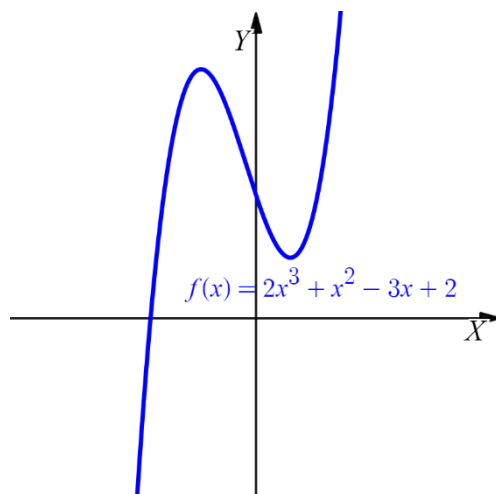
3. ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

เมื่อ $a_0, a_1, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

ถ้า $a_n \neq 0$ จะเรียก f ว่าฟังก์ชันพหุนามระดับชั้น n (degree n)

ตัวอย่างฟังก์ชันพหุนาม แสดงได้ดังรูป 1.9



รูป 1.9 กราฟแสดงฟังก์ชันพหุนาม

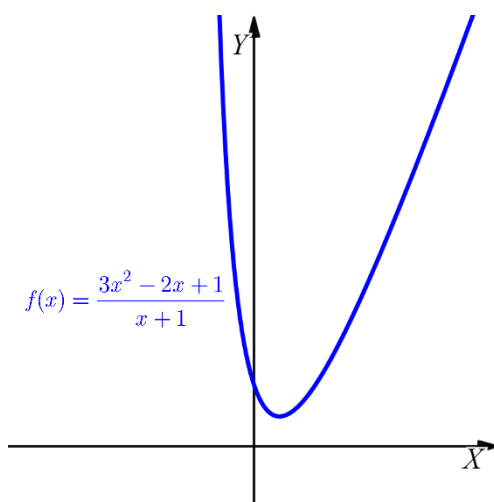
ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

4. ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) คือฟังก์ชันที่เขียนในรูป

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

โดยที่ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ $q(x) \neq 0$

ตัวอย่างฟังก์ชันตรรกยะ แสดงได้ดังรูป 1.10



รูป 1.10 กราฟแสดงฟังก์ชันตรรกยะ

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

1.2.2 ฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental function)

ฟังก์ชันอดิศัย คือฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต ในตำราเล่มนี้ จะศึกษาฟังก์ชันอดิศัยที่ประกอบด้วยฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ซึ่งฟังก์ชันอดิศัยถือเป็นฟังก์ชันสำคัญที่จะศึกษาในหัวข้ออนุพันธ์และปริพันธ์เป็นอย่างมาก ผู้เรียนสามารถศึกษารายละเอียดของฟังก์ชัน รวมถึงคุณสมบัติเพิ่มเติมของฟังก์ชันอดิศัยได้ที่ภาคผนวกท้ายเล่ม

หมายเหตุ ในการหาค่าฟังก์ชันอดิศัย สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับการหาค่าฟังก์ชันพีชคณิต โดยการแทนค่าตัวแปรอิสระด้วยตัวแปรอื่น ๆ หรือค่าที่ต้องการหา หลังจากนั้นคำนวณค่าของฟังก์ชันตามแต่ละประเภทของฟังก์ชันอดิศัย

1.3 พีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of function)

พีชคณิตของฟังก์ชันเป็นการนำฟังก์ชันตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไปมาดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ การบวก การลบ การคูณ และการหาร เพื่อให้ได้ฟังก์ชันใหม่ขึ้นมามีดังบทนิยาม 1.7

บทนิยาม 1.7 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของตัวแปรอิสระ x

1. ฟังก์ชันผลบวก (addition function) $f + g$ คือฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\text{โดยที่ } D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

2. ฟังก์ชันผลลบ (minus function) $f - g$ คือฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\text{โดยที่ } D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

3. ฟังก์ชันผลคูณ (multiplication function) $f \cdot g$ คือฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\text{โดยที่ } D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

4. ฟังก์ชันผลหาร (dividing function) $\frac{f}{g}$ คือฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{โดยที่ } D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$$

ตัวอย่าง 1.10 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - x - 2$ และ $g(x) = x + 1$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $(f + g)(x)$

วิธีทำ จาก $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
 ดังนั้น $(f + g)(x) = (x^2 - x - 2) + (x + 1)$
 $= x^2 - x - 2 + x + 1$
 $= x^2 - 1$

นั่นคือ $(f + g)(x) = x^2 - 1$ ■

2) $(f - g)(x)$

วิธีทำ จาก $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
 ดังนั้น $(f - g)(x) = (x^2 - x - 2) - (x + 1)$
 $= x^2 - x - 2 - x - 1$
 $= x^2 - 2x - 3$

นั่นคือ $(f - g)(x) = x^2 - 2x - 3$ ■

ตัวอย่าง 1.11 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2x - 3$ และ $g(x) = x + 1$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $(f \cdot g)(x)$

วิธีทำ จาก $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
 ดังนั้น $(f \cdot g)(x) = (x^2 - 2x - 3)(x + 1)$
 $= x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 3x - 3$
 $= x^3 - x^2 - 5x - 3$

นั่นคือ $(f \cdot g)(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$ ■

$$2) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

วิธีทำ จาก $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

ดังนั้น $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}, \quad x \neq -1$

$$= \frac{(x - 3)(x + 1)}{x + 1}, \quad x \neq -1$$

$$= x - 3, \quad x \neq -1$$

นั่นคือ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 3$ เมื่อ $x \neq -1$ ■

ตัวอย่าง 1.12 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 2 - x, & x < 1 \end{cases}$ และ $g(x) = \begin{cases} 3x, & x = 1 \\ 1 - 2x, & x \neq 1 \end{cases}$

จงหาค่าของ $(f + g)(1)$

วิธีทำ จาก $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

เนื่องจาก $f(x) = x^2, \quad x \geq 1$

และ $g(x) = 3x, \quad x = 1$

ดังนั้น $(f + g)(x) = x^2 + 3x$

$$(f + g)(1) = 1^2 + 3(1)$$

$$= 1 + 3$$

$$= 4$$

นั่นคือ $(f + g)(1) = 4$ ■

ตัวอย่าง 1.13 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} e^x, & x = 0 \\ 3^x, & x \neq 0 \end{cases}$ และ $g(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

จงหาค่าของ $(f \cdot g)(0)$

วิธีทำ จาก $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{เนื่องจาก} \quad f(x) &= e^x, & x &= 0 \\
 \text{และ} \quad g(x) &= \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\
 \text{ดังนั้น} \quad (f \cdot g)(x) &= e^x \cdot \cos x \\
 (f \cdot g)(0) &= e^0 \cdot \cos 0 \\
 &= (1)(1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $(f \cdot g)(0) = 1$ ■

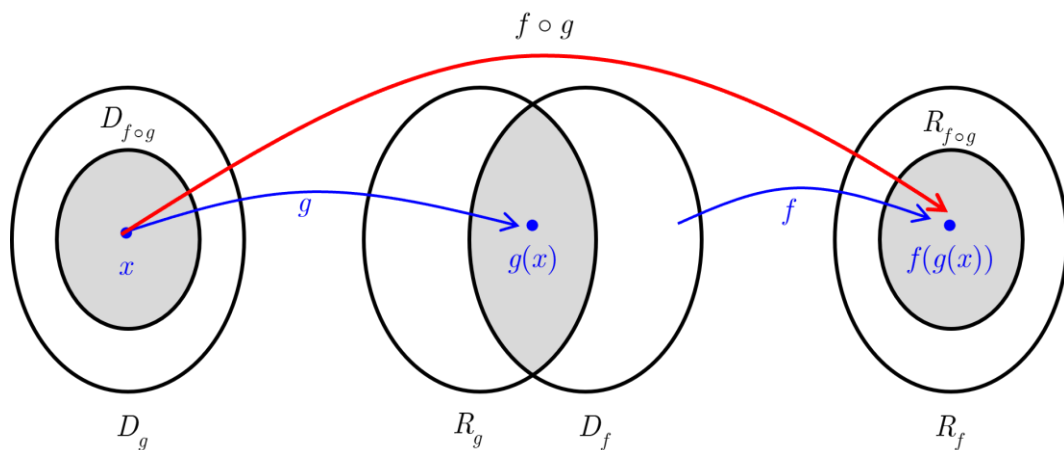
1.4 ฟังก์ชันประกอบ (Composite function)

ในการรวมฟังก์ชันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไปให้เป็น 1 ฟังก์ชัน จะอาศัยสิ่งที่เรียกว่าฟังก์ชันประกอบดังบทนิยาม 1.8

บทนิยาม 1.8 ให้ $g: A \rightarrow B$ และ $f: B \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ จะกล่าวว่าฟังก์ชันประกอบ (composite function) ของ f โดย g เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \circ g$ นิยามโดย

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

โดยที่โดเมนของฟังก์ชัน คือ $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid f(x) \in R_g \cap D_f\}$ แสดงได้ดังรูป 1.11



รูป 1.11 แผนภาพแสดงฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ในทำนองเดียวกัน ให้ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ เราจะกล่าวว่าฟังก์ชันประกอบของ g โดย f เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $g \circ f$ นิยามโดย

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

โดยที่โดเมนของฟังก์ชัน คือ $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in R_f \cap D_g\}$

- หมายเหตุ
1. กรณีฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไป พิจารณาในทำนองเดียวกัน เช่น $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ สำหรับทุก $x \in D_{f \circ g \circ h}$
 2. $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$
 3. $(g \circ f)(x) \neq g(x)f(x)$

ตัวอย่าง 1.14 กำหนดให้ $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 3x + 4$ และ $h(x) = x^2$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $(f \circ g)(x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= 2g(x) + 5 \\ &= 2(3x + 4) + 5 \\ &= 6x + 8 + 5 \\ &= 6x + 13 \end{aligned}$$

จาก $f(x) = 2x + 5$

ดังนั้น $(f \circ g)(x) = 6x + 13$ ■

2) $(g \circ f)(x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= 3f(x) + 4 \\ &= 3(2x + 5) + 4 \\ &= 6x + 15 + 4 \\ &= 6x + 19 \end{aligned}$$

จาก $g(x) = 3x + 4$

ดังนั้น $(g \circ f)(x) = 6x + 19$ ■

3) $f(x)g(x)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (2x + 5)(3x + 4) \\ &= 6x^2 + 8x + 15x + 20 \\ &= 6x^2 + 23x + 20 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(x)g(x) = 6x^2 + 23x + 20$ ■

4) $(f \circ g \circ h)(x)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} (f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) && \text{จาก } f(x) = 2x + 5 \\ &= 2g(h(x)) + 5 \\ &= 2[3h(x) + 4] + 5 && \text{จาก } g(x) = 3x + 4 \\ &= 2[3x^2 + 4] + 5 \\ &= 6x^2 + 8 + 5 \\ &= 6x^2 + 13 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(f \circ g \circ h)(x) = 6x^2 + 13$ ■

ตัวอย่าง 1.15 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x - 4}$ และ $g(x) = x + 3$. จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $(f \circ g)(10)$

วิธีทำ จาก
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ \text{ดังนั้น } (f \circ g)(10) &= f(g(10)) && \text{จาก } f(x) = \sqrt{x - 4} \\ &= \sqrt{g(10) - 4} \\ &= \sqrt{(10 + 3) - 4} \\ (f \circ g)(10) &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

นั่นคือ $(f \circ g)(10) = 3$ ■

$$2) (g \circ f)(8)$$

วิธีทำ จาก $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

ดังนั้น $(g \circ f)(8) = g(f(8))$ จาก $g(x) = x + 3$

$$\begin{aligned}
 &= f(8) + 3 \\
 &= \sqrt{8-4} + 3 \\
 &= \sqrt{4} + 3 \\
 &= 2 + 3 \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $(g \circ f)(8) = 5$ ■

ตัวอย่าง 1.16 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & x \leq 2 \\ \sin \frac{\pi x}{2}, & x > 2 \end{cases}$ และ $g(x) = \begin{cases} e^{x-1} & ; x > 1 \\ \ln x & ; x \leq 1 \end{cases}$

จงหาค่าของ $(f \circ g)(1)$

วิธีทำ จาก $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

ดังนั้น $(f \circ g)(1) = f(g(1))$

จาก $g(x) = \ln x, \quad x \leq 1$

ดังนั้น $g(1) = \ln 1 = 0$

นั่นคือ $f(g(1)) = f(0)$

จาก $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}, \quad x \leq 2$

ดังนั้น $f(0) = \cos 0$

$$f(0) = 1$$

นั่นคือ $(f \circ g)(1) = 1$ ■

1.4.1 การเขียนฟังก์ชันในรูปของฟังก์ชันประกอบ (Expressing a function as a composite function)

ในบางครั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์จำนวนมากสามารถแก้ปัญหได้โดยการ "แยก" ฟังก์ชันที่ต้องการพิจารณาออกเป็นฟังก์ชันในรูปที่ง่ายกว่า ตัวอย่างเช่น พิจารณาฟังก์ชัน h นิยามโดย $h(x) = (x - 1)^3$

ในการหาค่าของฟังก์ชัน $h(x)$ ในขั้นตอนแรกจะทำการหาค่า $x - 1$ ก่อน หลังจากนั้น ในขั้นตอนที่สอง จะนำผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนแรกมายกกำลัง 3 จึงได้คำตอบ

โดยทั่วไปอาจมองเป็นขั้นตอนในการทำ เช่นขั้นตอนที่ 1 ขั้นตอนที่ 2 แล้วกำหนดฟังก์ชันให้สอดคล้อง โดยกำหนดให้ $g(x) = x - 1$ และ $f(x) = x^3$ ดังนั้นสามารถเขียนฟังก์ชัน h ในรูปของฟังก์ชันประกอบได้ คือ $h = f \circ g$ จะได้ว่า

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^3 = (x - 1)^3 = h(x)$$

ในการแยกฟังก์ชันที่พิจารณาออกมาในรูปแบบของฟังก์ชันประกอบ จะพิจารณาฟังก์ชันอย่างน้อย 2 ฟังก์ชัน โดยฟังก์ชันแรกจะเรียกว่าฟังก์ชันด้านใน (inner function) กำหนดให้เป็นฟังก์ชัน g และฟังก์ชันที่สองจะเรียกว่าฟังก์ชันด้านนอก (outer function) กำหนดให้เป็นฟังก์ชัน f ตัวอย่างการพิจารณาฟังก์ชันด้านในและฟังก์ชันด้านนอก แสดงได้ดังตาราง 1.2

ตาราง 1.2 แสดงการแยกฟังก์ชันในรูปแบบของฟังก์ชันประกอบ

ฟังก์ชัน	ฟังก์ชันด้านใน	ฟังก์ชันด้านนอก	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
	$g(x)$	$f(x)$	
$(x + 1)^5$	$x + 1$	x^5	$(x + 1)^5 = f(g(x))$
$\sin(x^2 - 1)$	$x^2 - 1$	$\sin x$	$\sin(x^2 - 1) = f(g(x))$
$\cos^5 x$	$\cos x$	x^5	$\cos^5 x = f(g(x))$
$\sqrt{x^3 - x + 1}$	$x^3 - x + 1$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x^3 - x + 1} = f(g(x))$
$\ln(1 + \sqrt{x})$	$1 + \sqrt{x}$	$\ln x$	$\ln(1 + \sqrt{x}) = f(g(x))$
$\frac{1}{1 + \cos x}$	$1 + \cos x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1 + \cos x} = f(g(x))$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

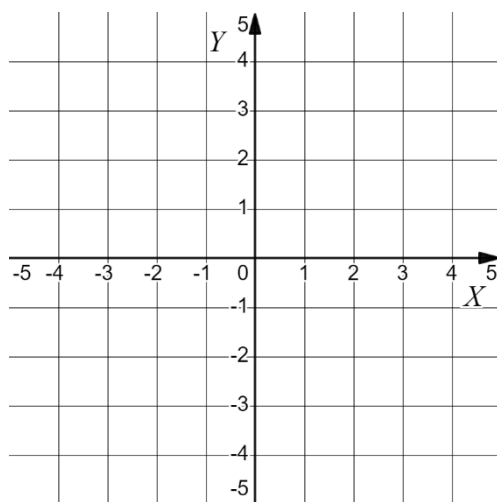
จากตาราง 1.2 ผู้เรียนจะเห็นว่าสามารถมองฟังก์ชันที่ซับซ้อน ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันประกอบ ซึ่งการแยกฟังก์ชันในรูปแบบของฟังก์ชันประกอบ จะช่วยในการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันได้ง่ายยิ่งขึ้น

1.5 การใช้ซอฟต์แวร์ในการลงจุดกราฟ (Graphing with software)

ในปัจจุบันอุปกรณ์ฮาร์ดแวร์ต่าง ๆ เช่น คอมพิวเตอร์ เครื่องคิดเลข และสมาร์ทโฟน ซึ่งมีซอฟต์แวร์หรือแอปพลิเคชันในการลงจุดกราฟอยู่มากมาย ทำให้ผู้เรียนสามารถลงจุดกราฟของฟังก์ชันที่ซับซ้อนได้อย่างแม่นยำ ซึ่งเมื่อพิจารณาฟังก์ชัน จะสังเกตได้ว่าหลายฟังก์ชันไม่สามารถลงจุดกราฟได้ง่าย ๆ ด้วยวิธีอื่น

อย่างไรก็ตาม ในการใช้ซอฟต์แวร์ลงจุดกราฟ ผู้เรียนจะต้องใช้ความระมัดระวัง เนื่องจากผลลัพธ์ที่ได้อาจจะคลาดเคลื่อนจากการปรับขนาดหน้าจอหรือปรับขนาดที่ผิดเพี้ยนต่าง ๆ ซึ่งจะทำให้การแสดงผลและการพิจารณาคูณสมบัติของกราฟมีความผิดเพี้ยน

เพื่อป้องกันการผิดเพี้ยนจากการลงจุดกราฟ ผู้เรียนจะต้องพิจารณารางสีเหลี่ยมจัตุรัสบนกราฟ โดยให้ความยาว 1 หน่วยด้านแกน X จะมีความยาวเท่ากับความยาว 1 หน่วยด้านแกน Y แสดงได้ดังรูป 1.12



รูป 1.12 กราฟแสดงตารางสีเหลี่ยมจัตุรัสบนแกน XY

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

เมื่อกราฟแสดงในโหมดเริ่มต้น ความยาวหน่วยของแกน X อาจแตกต่างจากความยาวหน่วยของแกน Y ซึ่งเกิดจากการปรับขนาด ความแตกต่างในการปรับขนาดนี้อาจทำให้เกิดความผิดเพี้ยนทางสายตา ซึ่งอาจนำไปสู่การตีความพฤติกรรมของฟังก์ชันที่ผิดพลาดได้ ดังนั้นก่อนการใช้

งานซอฟต์แวร์หรือแอปพลิเคชันในการลงจุดกราฟ จึงควรปรับขนาดให้ความยาวหน่วยของแกน X และความยาวหน่วยของแกน Y ให้เท่ากันก่อนที่จะลงจุดกราฟ

ในการลงจุดกราฟของฟังก์ชันต่าง ๆ ในตำราเล่มนี้จะขอแนะนำการวาดกราฟผ่านเว็บไซต์ <http://www.desmos.com> ผู้เรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ภาคผนวกท้ายเล่ม

สรุปเนื้อหาในบทที่ 1

ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระกับตัวแปรตาม เมื่อแทนค่าตัวแปรอิสระ 1 ค่า จะได้ตัวแปรตาม 1 ค่า โดยที่ประเภทของฟังก์ชันที่ศึกษา แบ่งออกได้เป็นฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัย ในการหาค่าของฟังก์ชันสามารถหาค่าของฟังก์ชันได้ โดยการแทนค่าตัวแปรอิสระเป็นตัวแปรอื่นหรือค่าที่ต้องการหา หลังจากนั้นทำการหาค่าออกมา

พีชคณิตของฟังก์ชัน คือการดำเนินการของฟังก์ชันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไปภายใต้การดำเนินการบวก ลบ คูณ และหาร

ฟังก์ชันประกอบ คือการรวมฟังก์ชันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไปให้เป็น 1 ฟังก์ชัน ในทำนองเดียวกัน ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปที่ซับซ้อนสามารถแยกฟังก์ชันออกมาในรูปแบบของฟังก์ชันประกอบได้

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 3x + 2$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(2)$

1.2 $f(3)$

1.3 $f(-4)$

1.4 $f(-3)$

1.5 $f(a)$

1.6 $f(x^2)$

2. กำหนดให้ $H(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \\ 3 - x, & 0 \leq x < 3 \\ 2x^2, & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $H(0)$

2.2 $H(4)$

2.3 $H\left(-\frac{1}{2}\right)$

2.4 $H(3)$

3. กำหนดให้ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x^2 + x$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $(f + g)(x)$

3.2 $(f - g)(x)$

3.3 $(f \cdot g)(x)$

3.4 $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

4. จงหาฟังก์ชันประกอบ $(f \circ g)(x)$ และ $(g \circ f)(x)$ จากฟังก์ชันที่กำหนดต่อไปนี้

4.1 $f(x) = 3x - 1, \quad g(x) = 4x + 2$

4.2 $f(x) = 5 - 2x, \quad g(x) = 4x$

4.3 $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$

4.4 $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

4.5 $f(x) = e^x, \quad g(x) = \cos 2x$

4.6 $f(x) = 1 + \cos^2 x, \quad g(x) = \ln(x - 1)$

5. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 1$ และ $g(x) = \begin{cases} x & ; x > 3 \\ 2 - x & ; x \leq 3 \end{cases}$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

5.1 $(f \circ g)(8)$

5.2 $(f \circ g)(-1)$

5.3 $(g \circ f)(4)$

5.4 $(g \circ f)(-3)$

เอกสารอ้างอิง

- ภริณี ฤทธิเดช. (2560). *แคลคูลัสพื้นฐาน*. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.
- สันต์ชัย เปี่ยมขุดา. (มปป). *แคลคูลัส 1-1*. กรุงเทพฯ: ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.
- มนัส ประสงค์. (ม.ป.ป.). *แคลคูลัส 1*. กรุงเทพฯ: ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.
- มนัส ประสงค์. (2535). *แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 1*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.
- วิริยะ ศิริขานนท์. (มปป). *แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร*. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.
- ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). *ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน*. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สหมิตรพรินต์.
- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus* (10th ed.). John Wiley & Sons. Ltd., New York, U.S.A.
- Desmos. (n.d.). *Graphing Calculator*. <https://www.desmos.com/calculator>
- Thomas, G. B., Jr., Weir, M. D., & Hass, J. R. (2013). *Thomas' calculus: Early transcendentals* (13th ed.). Pearson.

บทที่ 2

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ในการศึกษาแคลคูลัส สิ่งหนึ่งที่ผู้เรียนต้องรู้จักซึ่งถือว่าเป็นพื้นฐานเริ่มต้นนั้นคือเรื่องของลิมิต ซึ่งลิมิตถือเป็นพื้นฐานที่ต่อยอดไปสู่หัวข้อต่าง ๆ ของแคลคูลัส ไม่ว่าจะเป็นความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ปริพันธ์ของฟังก์ชัน และอีกหลากหลายหัวข้อ หากผู้เรียนมีความเข้าใจที่ดีในเรื่องของลิมิต จะสามารถต่อยอดการเรียนรู้ในหัวข้ออื่น ๆ ที่ใช้ลิมิตเป็นพื้นฐานได้

2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน (Limit of a function)

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 1$ โดยพิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 โดยการสร้างตารางหาค่า x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายและทางขวา แสดงได้ดังตาราง 2.1

ตาราง 2.1 แสดงค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายและทางขวา

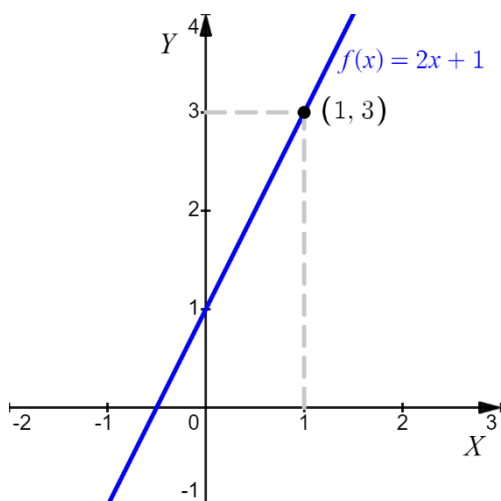
x	$f(x)$
0	1
0.5	2
0.9	2.8
0.99	2.98
0.999	2.98
$\vdots$	$\vdots$
1	3

x	$f(x)$
2	5
1.5	4
1.1	3.2
1.01	3.02
1.001	3.002
$\vdots$	$\vdots$
1	3

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากตาราง 2.1 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้าย หรือ $x < 1$ จะได้ว่าค่าของฟังก์ชัน f มีค่าเข้าใกล้ 3 จะกล่าวว่าลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้าย มีค่าเท่ากับ 3 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$ และเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวา หรือ $x > 1$ จะได้ว่าค่าของฟังก์ชัน f มีค่าเข้าใกล้ 3 จะกล่าวว่าลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวา มีค่าเท่ากับ 3 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$

สรุปได้ว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 จะได้ว่าค่าของฟังก์ชัน f มีค่าเข้าใกล้ 3 เราจะกล่าวว่า ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 มีค่าเท่ากับ 3 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ และสามารถแสดงกราฟของฟังก์ชันได้ดังรูป 2.1



รูป 2.1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 1$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ โดยพิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 โดยการสร้างตารางหาค่า x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายและทางขวา แสดงได้ดังตาราง 2.2

ตาราง 2.2 แสดงค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายและทางขวา

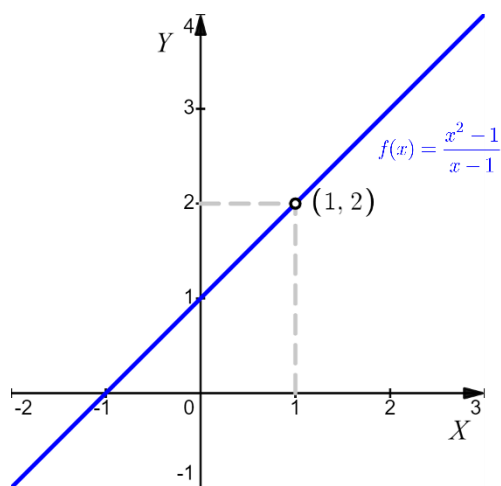
x	$f(x)$
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999
$\vdots$	$\vdots$
1	หาค่าไม่ได้

x	$f(x)$
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001
$\vdots$	$\vdots$
1	หาค่าไม่ได้

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากตาราง 2.2 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้าย หรือ $x < 1$ จะได้ว่าค่าของฟังก์ชัน f มีค่าเข้าใกล้ 2 จะกล่าวว่าลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้าย มีค่าเท่ากับ 2 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ และเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวา หรือ $x > 1$ จะได้ว่าค่าของฟังก์ชัน f มีค่าเข้าใกล้ 2 จะกล่าวว่าลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวา มีค่าเท่ากับ 2 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

สรุปได้ว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 จะได้ว่าค่าของฟังก์ชัน f มีค่าเข้าใกล้ 2 จะกล่าวว่าลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 มีค่าเท่ากับ 2 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ และสามารถแสดงกราฟของฟังก์ชันได้ดังรูป 2.2



รูป 2.2 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$ โดยพิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1

โดยการสร้างตารางหาค่า x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายและทางขวา แสดงได้ดังตาราง 2.3

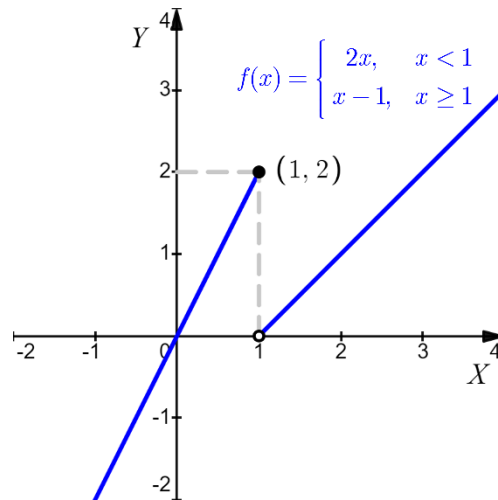
ตาราง 2.3 แสดงค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายและทางขวา

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0	0	2	1
0.5	1	1.5	0.5
0.9	1.8	1.1	0.1
0.99	1.98	1.01	0.01
0.999	1.998	1.001	0.001
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		1	0

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากตาราง 2.3 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้าย หรือ $x < 1$ จะได้ว่าค่าของฟังก์ชัน f มีค่าเข้าใกล้ 2 จะกล่าววาลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้าย มีค่าเท่ากับ 2 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ และเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวา หรือ $x > 1$ จะได้ว่าค่าของฟังก์ชัน f มีค่าเข้าใกล้ 0 จะกล่าววาลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวา มีค่าเท่ากับ 0 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$

สรุปได้ว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้าย จะได้ว่าค่าของฟังก์ชัน f มีค่าเข้าใกล้ 2 และเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวา จะได้ว่าค่าของฟังก์ชัน f มีค่าเข้าใกล้ 0 จะเห็นได้ว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 จะได้ว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้จำนวนที่แตกต่างกัน จะกล่าววาลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 หาค่าไม่ได้ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้ และสามารถแสดงกราฟของฟังก์ชันได้ดังรูป 2.3



รูป 2.3 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ต่อไปจะกล่าวถึงบทนิยามลิมิตของฟังก์ชันดังนี้

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบนช่วงเปิดรอบจุด $x = a$ ยกเว้นที่จุด $x = a$ เราจะกล่าวว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ เมื่อ L เป็นจำนวนจริง ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

- ข้อสังเกต**
- 1) จากตัวอย่างข้างต้น เป็นการหาลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ที่แตกต่างกัน โดยที่ลิมิตหาค่าได้ แม้ค่าของฟังก์ชันหาค่าไม่ได้ที่จุด $x = 1$ หรือลิมิตหาค่าไม่ได้ ถึงแม้ว่าฟังก์ชันจะหาค่าได้ที่จุด $x = 1$ ดังนั้นในการหาลิมิตของฟังก์ชันจึงต้องดูพฤติกรรมของฟังก์ชันแต่ละประเภทด้วย
 - 2) สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ อ่านว่า “**ลิมิต** (limit) ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a มีค่าเท่ากับ L ” และจะกล่าวว่าลิมิตหาค่าได้
 - 3) ในการหาค่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ เราจะพิจารณาค่า x ที่เข้าใกล้ a
 - ถ้า $x < a$ เราจะเรียก “**ลิมิตทางซ้าย**” (left hand limit) เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

- ถ้า $x > a$ เราจะเรียก “ลิมิตทางขวา” (right hand limit) เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

- 4) ในการพิจารณาว่าฟังก์ชันใดมีค่าลิมิตที่จุดที่กำหนด เนื่องจากการหาลิมิตโดยนิยามจะมีความยุ่งยาก เราสามารถอาศัยทฤษฎีบทของลิมิตต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ a และ L เป็นจำนวนจริง

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

หมายเหตุ ลิมิตหาค่าได้ หมายถึงลิมิตมีค่าเข้าใกล้หรือลู่อู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง ตัวอย่างเช่น

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \quad \text{หมายถึงค่าลิมิตเข้าใกล้ 2 (อาจจะมีค่าเท่ากับ 2 ก็ได้)}$$

2.2 ทฤษฎีบทของลิมิต (Theorem of limit)

ในการหาลิมิตของฟังก์ชันโดยการดูตารางหรือดูกราฟของฟังก์ชันเป็นสิ่งที่ค่อนข้างยากและวุ่นวาย หากฟังก์ชันที่ต้องการหาลิมิตเป็นฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนมากขึ้น ผู้เรียนสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันได้โดยอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$

1. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม
3. $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \pm M$
5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right] = LM$
6. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$ เมื่อ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
7. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \begin{cases} \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}, & n \text{ เป็นเลขคู่ และ } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0 \\ \sqrt[n]{L}, & n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$

หมายเหตุ ทฤษฎีบท 2.2 ยังคงเป็นจริงสำหรับ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

ข้อควรระวัง ในการใช้ทฤษฎีบท 2.2 ข้อ 7. ต้องระวังกรณี $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$ ให้ดี

ตัวอย่าง 2.1 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} [3x^4 + 4x^2 - 5]$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \lim_{x \rightarrow 2} [3x^4 + 4x^2 - 5] &= \lim_{x \rightarrow 2} 3x^4 + \lim_{x \rightarrow 2} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= 3 \left[\lim_{x \rightarrow 2} x^4 \right] + 4 \left[\lim_{x \rightarrow 2} x^2 \right] - \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= 3(2^4) + 4(2^2) - 5 \\ &= 3(16) + (4)(4) - 5 \\ &= 48 + 16 - 5 \\ &= 59 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow 2} [3x^4 + 4x^2 - 5] = 59 \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 2.2 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 8}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 8} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 5} x^3 + \lim_{x \rightarrow 5} 2x + \lim_{x \rightarrow 5} 1}{\lim_{x \rightarrow 5} x^2 - \lim_{x \rightarrow 5} 8} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 5} x^3 + 2 \left[\lim_{x \rightarrow 5} x \right] + \lim_{x \rightarrow 5} 1}{\lim_{x \rightarrow 5} x^2 - \lim_{x \rightarrow 5} 8} \\ &= \frac{5^3 + (2)(5) + 1}{5^2 - 8} \\ &= \frac{125 + 10 + 1}{25 - 8} \\ &= \frac{136}{17} \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 8} = 8 \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 2.3 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{2x + 7}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{2x + 7} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 9} (2x + 7)} \\
 &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 9} 2x + \lim_{x \rightarrow 9} 7} \\
 &= \sqrt{2 \left[\lim_{x \rightarrow 9} x \right] + \lim_{x \rightarrow 9} 7} \\
 &= \sqrt{2(9) + 7} \\
 &= \sqrt{18 + 7} \\
 &= \sqrt{25} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{2x + 7} = 5$

■

ตัวอย่าง 2.4 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < 2 \\ x^2 + 3, & x \geq 2 \end{cases}$

วิธีทำ พิจารณาลิมิตทางซ้ายและทางขวา

ลิมิตทางซ้าย

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + 3) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x + \lim_{x \rightarrow 2^-} 3 \\
 &= 2 \left[\lim_{x \rightarrow 2^-} x \right] + \lim_{x \rightarrow 2^-} 3 \\
 &= 2(2) + 3 \\
 &= 4 + 3 \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

ลิมิตทางขวา

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 3) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2^+} 3 \\
 &= 2^2 + 3 \\
 &= 4 + 3 \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$$

■

ตัวอย่าง 2.5 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

วิธีทำ พิจารณาลิมิตทางซ้ายและทางขวา

$$\begin{aligned} \text{ลิมิตทางซ้าย} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ลิมิตทางขวา} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} \\ &= \sqrt{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ หาค่าไม่ได้}$$

■

ข้อสังเกต ในการหาลิมิตของฟังก์ชันโดยทฤษฎีบท 2.2 นั้น หากฟังก์ชันที่พิจารณาเป็นฟังก์ชันพหุนาม ผู้เรียนสามารถหาลิมิตได้โดยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a) = c_n (a^n) + c_{n-1} (a^{n-1}) + \dots + c_2 (a^2) + c_1 (a) + c_0$$

พิสูจน์ ดูภาคผนวก

■

จากทฤษฎีบท 2.3 ให้ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

1. ถ้า $q(a) \neq 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$
2. ถ้า $q(a) = 0$ แต่ $p(a) \neq 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)}$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 2.6 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 5x + 1)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 5x + 1) &= 2(2^3) - 5(2) + 1 \\ &= 2(8) - 10 + 1 \\ &= 16 - 10 + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 5x + 1) = 7$ ■

ตัวอย่าง 2.7 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 7}{x - 2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 7}{x - 2} &= \frac{2(-1)^3 - 7}{-1 - 2} \\ &= \frac{2(-1) - 7}{-3} \\ &= \frac{-2 - 7}{-3} \\ &= \frac{-9}{-3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 7}{x - 2} = 3$ ■

ตัวอย่าง 2.8 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x - 3}$

วิธีทำ

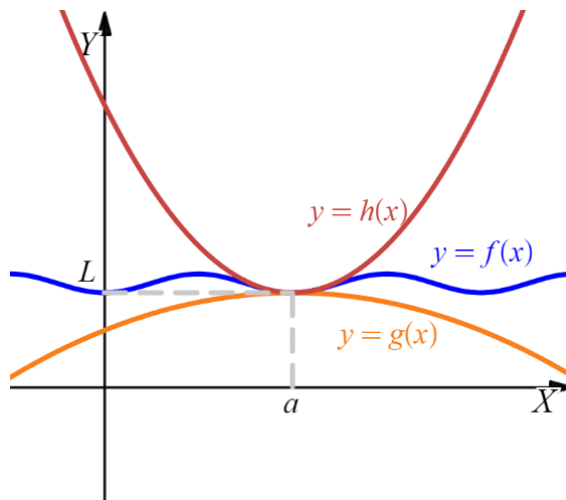
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x - 3} = \frac{3}{3 - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3} = \frac{3}{0}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3}$ หาค่าไม่ได้

■

ในบางครั้งการหาลิมิตของฟังก์ชันบางประเภท อาจหาค่าลิมิตได้ยาก พิจารณาฟังก์ชัน $y = f(x)$ ซึ่งอยู่ระหว่างฟังก์ชัน $y = g(x)$ และฟังก์ชัน $y = h(x)$ แสดงได้ดังรูป 2.4



รูป 2.4 กราฟแสดงฟังก์ชัน เมื่อ $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากรูป 2.4 จะพบว่า $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ ในกรณีที่ผู้เรียนต้องการหา $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยในการหาค่าลิมิตได้ง่ายขึ้น

ทฤษฎีบท 2.4 ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชันซึ่ง $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ สำหรับ x ที่อยู่ในช่วงเปิด I โดยที่ $a \in I$ ยกเว้นที่จุด $x = a$ แล้ว ถ้า

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

แล้ว จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ทฤษฎีบทข้างต้นนี้เรียกว่า “ทฤษฎีบทแซนวิช” หรือ “ทฤษฎีบทเบียดแทรก” (sandwich theorem or squeeze theorem)

ตัวอย่าง 2.9 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ เมื่อ $1 - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x^2}{4}$

วิธีทำ จาก $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 1$ และ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right) = 1$

เนื่องจาก $1 - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x^2}{4}$

โดยทฤษฎีบทแซนวิช จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ■

2.2.1 การหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ โดยทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$ ซึ่งไม่

สามารถหาค่าได้ รูปแบบนี้เรียกว่ารูปแบบยังไม่กำหนด (indeterminate form) ซึ่งมีด้วยกัน 7

รูปแบบ ได้แก่ $\frac{0}{0}$, $\pm \frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 และ 1^∞ โดยที่ลิมิตอาจหาค่าได้หรือหา

ค่าไม่ได้ก็ได้ ผู้เขียนจะศึกษาลิมิตที่อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดเพิ่มเติมในภายหลัง โดยจะศึกษาเพิ่มเติมในหัวข้อการประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ในที่นี้จะกล่าวถึงการหาลิมิตที่อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{0}{0}$ ซึ่งสามารถหาได้หลายวิธี เช่น การแยกตัวประกอบ การใช้คู่สังยุค เป็นต้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.10 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} &= \frac{1^2 - 3(1) + 2}{1 - 1} \\ &= \frac{1 - 3 + 2}{1 - 1} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{0}{0}$ ต้องแก้ปัญหาโดยใช้

การแยกตัวประกอบดังนี้

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) \\
 &= 1-2 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -1$ ■

ตัวอย่าง 2.11 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 + 2x - 8}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 + 2x - 8} &= \frac{2-2}{2^2 + 2(2) - 8} \\
 &= \frac{2-2}{4+4-8} \\
 &= \frac{0}{0}
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 + 2x - 8}$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{0}{0}$ ต้องแก้ปัญหาดังนี้

การแยกตัวประกอบดังนี้

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 + 2x - 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+4} \\
 &= \frac{1}{2+4} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 + 2x - 8} = \frac{1}{6}$ ■

ตัวอย่าง 2.12 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} &= \frac{3^2 - 2(3) - 3}{3^2 - 9} \\ &= \frac{9 - 6 - 3}{9 - 9} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{0}{0}$ ต้องแก้ปัญหาดังนี้

การแยกตัวประกอบดังนี้

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 3)(x + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1}{x + 3} \\ &= \frac{3 + 1}{3 + 3} \\ &= \frac{4}{6} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} = \frac{2}{3}$ ■

ตัวอย่าง 2.13 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} &= \frac{2^2 - 4}{2^3 - 8} \\ &= \frac{4 - 4}{8 - 8} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{0}{0}$ ต้องแก้ปัญหาดังนี้

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 4} \\ &= \frac{3+1}{4+4+4} \\ &= \frac{4}{12} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \frac{1}{3}$ ■

ตัวอย่าง 2.14 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} &= \frac{\sqrt{1} - 1}{1 - 1} \\ &= \frac{1 - 1}{1 - 1} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{0}{0}$ ต้องแก้ปัญหาดังนี้

คู่สังยุคของ $\sqrt{x} - 1$ คือ $\sqrt{x} + 1$ ดังนั้น นำ $\sqrt{x} + 1$ คูณทั้งตัวเศษและตัวส่วน จะได้

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1} + 1} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}$ ■

ตัวอย่าง 2.15 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5} - 2}{x-9}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5} - 2}{x-9} &= \frac{\sqrt{9-5} - 2}{9-9} \\
 &= \frac{\sqrt{4} - 2}{9-9} \\
 &= \frac{2-2}{9-9} \\
 &= \frac{0}{0}
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5} - 2}{x-9}$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{0}{0}$ ต้องแก้ปัญาโดยใช้

การใช้คู่สังยุคดังนี้

คู่สังยุคของ $\sqrt{x-5} - 2$ คือ $\sqrt{x-5} + 2$ ดังนั้น นำ $\sqrt{x-5} + 2$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5} - 2}{x-9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5} - 2}{x-9} \times \frac{\sqrt{x-5} + 2}{\sqrt{x-5} + 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x-5})^2 - 2^2}{(x-9)(\sqrt{x-5} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-5-4}{(x-9)(\sqrt{x-5} + 2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5}-2}{x-9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x-5}+2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{9-5}+2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}+2} \\
&= \frac{1}{2+2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5}-2}{x-9} = \frac{1}{4}$ ■

ตัวอย่าง 2.16 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} &= \frac{4-4}{\sqrt{4+5}-3} \\
&= \frac{4-4}{\sqrt{9}-3} \\
&= \frac{4-4}{3-3} \\
&= \frac{0}{0}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{0}{0}$ ต้องแก้ปัญหาดังนี้

การใช้คู่สังยุคดังนี้

คู่สังยุคของ $\sqrt{x+5}-3$ คือ $\sqrt{x+5}+3$ ดังนั้น นำ $\sqrt{x+5}+3$ คูณทั้งตัวเศษและตัวส่วน จะได้

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} \times \frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x+5}+3}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5})^2-3^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x+5-9} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x+5}+3) \\
&= \sqrt{4+5}+3 \\
&= \sqrt{9}+3 \\
&= 3+3 \\
&= 6
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} = 6$ ■

2.3 ลิมิตกับปัญหาค่าอนันต์ (Infinity problem of limit)

คำว่าอนันต์ (infinity) หมายถึงค่าที่ไม่มีขีดจำกัด ถ้าค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด จะแทนด้วยสัญลักษณ์ “ $+\infty$ ” ในทำนองเดียวกัน ถ้าค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด จะแทนด้วยสัญลักษณ์ “ $-\infty$ ”

ในหัวข้อนี้ ผู้เขียนจะศึกษาลิมิตกับปัญหาค่าอนันต์ 2 เรื่อง คือ “ลิมิต ณ อนันต์” (limit at infinity) หมายถึง $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ หรือ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ และ “ลิมิตมีค่าอนันต์” (infinity limit)

หมายถึง $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ หรือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ โดยจะพิจารณากรณี x เข้าใกล้ค่าอนันต์ และกรณี x เข้าใกล้ 0 เพื่อสังเกตค่าของลิมิต

ขณะที่ x เข้าใกล้อนันต์ ค่าของ $f(x)$ แสดงได้ดังตาราง 2.4

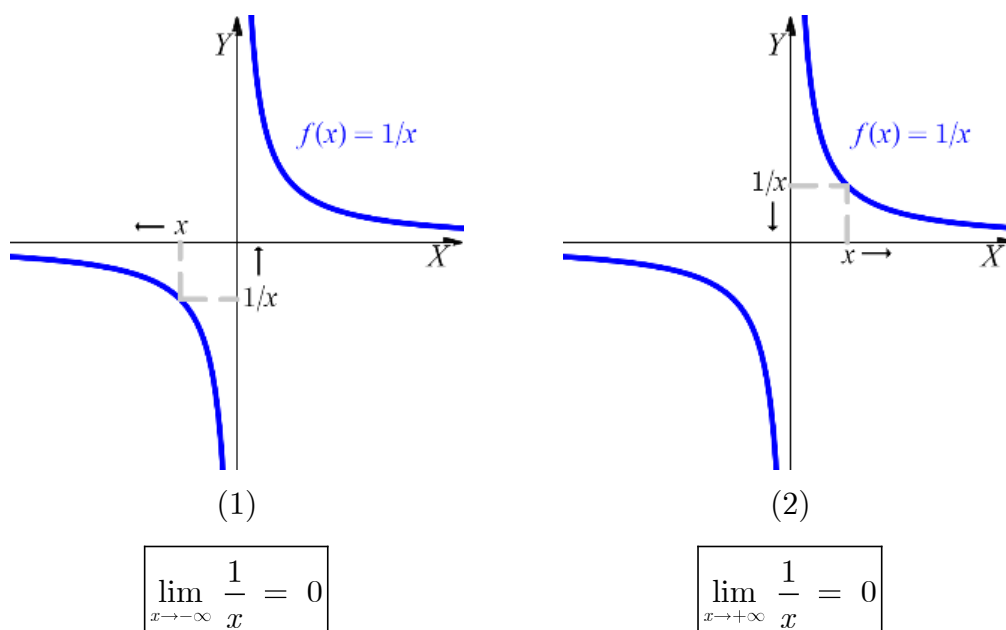
ตาราง 2.4 แสดงค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ค่าอนันต์

	ค่า					แปลผล
x	-1	-10	-100	-1,000	...	เมื่อ $x \rightarrow -\infty$
$f(x)$	-1	-0.1	-0.01	-0.001	...	ดังนั้น $1/x \rightarrow 0$
x	1	10	100	1,000	...	เมื่อ $x \rightarrow +\infty$
$f(x)$	1	0.1	0.01	0.001	...	ดังนั้น $1/x \rightarrow 0$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากตาราง 2.4 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ และ

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ x เข้าใกล้ค่าอนันต์ แสดงได้ดังรูป 2.5

รูป 2.5 กราฟแสดงลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ x เข้าใกล้ค่าอนันต์

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ขณะที่ x เข้าใกล้ค่า 0 ค่าของ $f(x)$ แสดงดังตาราง 2.5

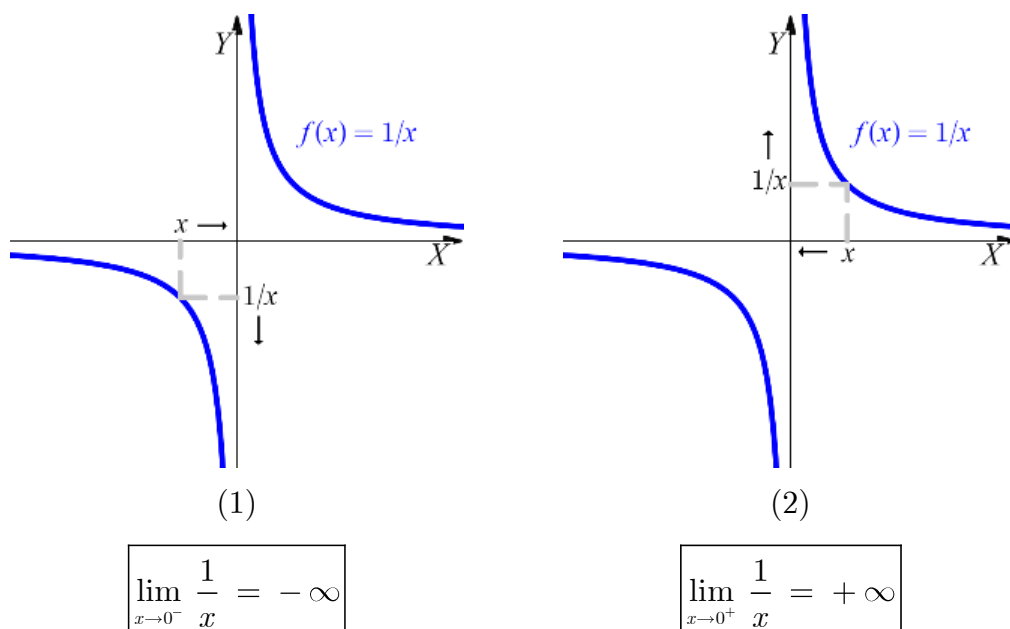
ตาราง 2.5 แสดงค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ค่า 0

	ค่า					แปลผล
x	-1	-0.1	-0.01	-0.001	...	เมื่อ $x \rightarrow 0^-$
$f(x)$	-1	-10	-100	-1,000	...	ดังนั้น $1/x \rightarrow -\infty$
x	1	0.1	0.01	0.001	...	เมื่อ $x \rightarrow 0^+$
$f(x)$	1	10	100	1,000	...	ดังนั้น $1/x \rightarrow +\infty$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากตาราง 2.5 เมื่อ x เข้าใกล้ค่า 0^- จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ และเมื่อ x เข้าใกล้ค่า 0^+ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 แสดงได้ดังรูป

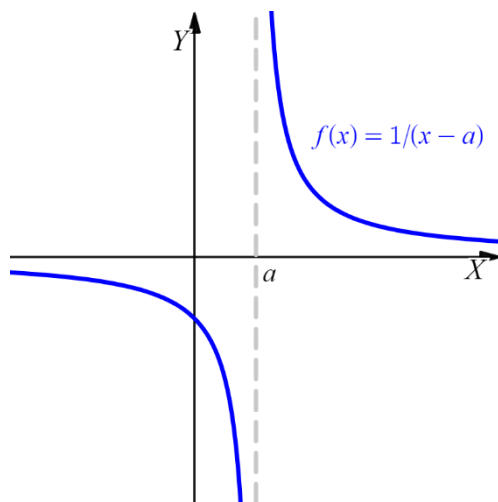
2.6



รูป 2.6 กราฟแสดงลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

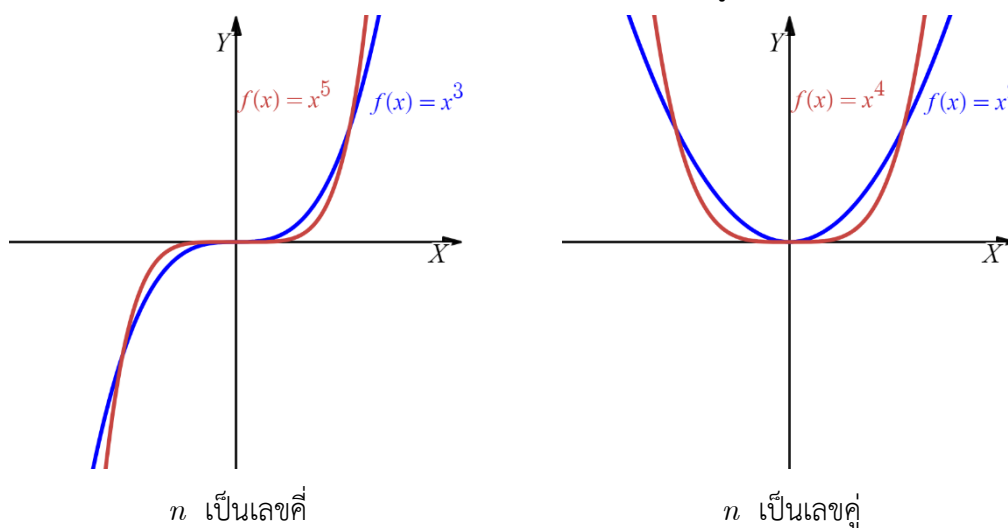
หมายเหตุ ทุกจำนวนจริง a จะได้ว่า กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x-a}$ จะเป็นกราฟที่เลื่อนทางขนานของกราฟ $f(x) = \frac{1}{x}$ ดังนั้นสามารถหาลิมิตได้ในทำนองเดียวกัน โดยกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x-a}$ แสดงได้ดังรูป 2.7



รูป 2.7 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x-a}$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ จะพิจารณากรณี x เข้าใกล้ค่าอนันต์ เพื่อสังเกตค่าของลิมิต โดยกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^n$ แสดงได้ดังรูป 2.8



รูป 2.8 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^n$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ดังนั้น

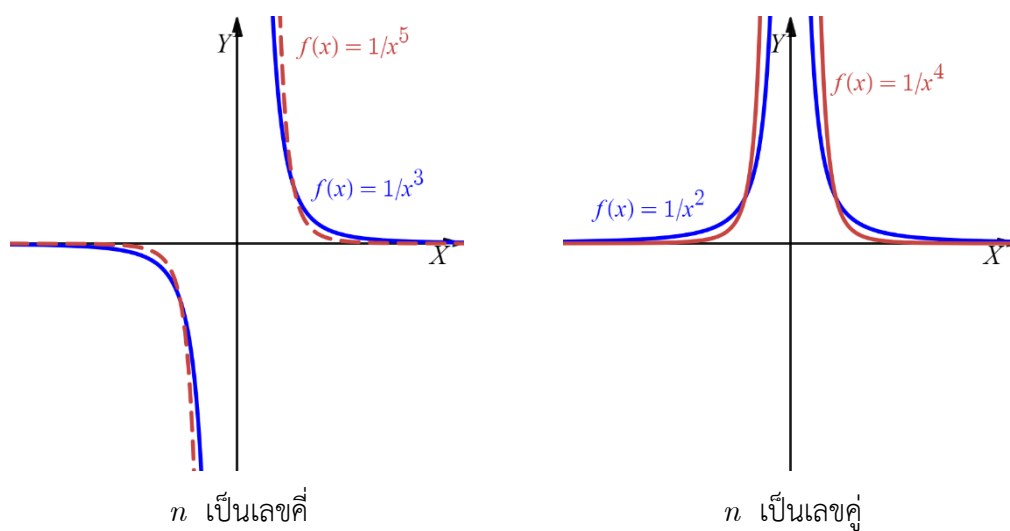
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty, & n = 1, 3, 5, \dots \\ +\infty, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x^n}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ จะพิจารณากรณี x เข้าใกล้ค่าอนันต์

และกรณี x เข้าใกล้ 0 เพื่อสังเกตค่าของลิมิต โดยกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x^n}$ แสดงได้ดังรูป

2.9



รูป 2.9 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x^n}$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

และ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty, & n = 1, 3, 5, \dots \\ +\infty, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

- หมายเหตุ**
1. เมื่อทำการคูณ x^n ด้วยจำนวนจริงบวกใด ๆ จะไม่มีผลกับค่าของลิมิต แต่ถ้าทำการคูณ x^n ด้วยจำนวนจริงลบใด ๆ ค่าของลิมิตจะสลับเครื่องหมาย
 2. ในการหาลิมิตที่อยู่ในรูป x ยกกำลัง จะทำการดึงตัวร่วมพจน์ที่มี x ยกกำลังสูงสุด เพื่อจัดให้อยู่ในรูป $\frac{1}{x^n}$ จากนั้นจึงทำการหาค่าของลิมิต ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.17 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(4 + \frac{1}{x^3} \right)$

วิธีทำ พิจารณาลิมิตทางซ้ายและทางขวา

$$\begin{aligned} \text{ลิมิตทางซ้าย } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(4 + \frac{1}{x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 4 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} \\ &= 4 + (-\infty) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ลิมิตทางขวา } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(4 + \frac{1}{x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \\ &= 4 + \infty \\ &= \infty \end{aligned}$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(4 + \frac{1}{x^3} \right) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(4 + \frac{1}{x^3} \right)$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 0} \left(4 + \frac{1}{x^3} \right) \text{ หาค่าไม่ได้} \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 2.18 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 4x^5)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 4x^5) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(\frac{2}{x^2} + 4 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x^2} + 4 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 4x^5) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5(0 + 4) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^5 \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 4x^5) = -\infty$ ■

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างต้น ในการหาลิมิต ณ อนันต์ ของฟังก์ชันพหุนาม ผู้เรียนอาจจะพิจารณาเฉพาะพจน์ที่มีกำลังสูงสุดที่สุดเพียงพจน์เดียว เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \dots + a^n \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n
 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \left(\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_2}{x^{n-2}} + \dots + b^n \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} b_n x^n
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.19 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2x^2 - x^3)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2x^2 - x^3) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3) \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2x^2 - x^3) = -\infty$ ■

2.3.1 การหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\pm \frac{\infty}{\infty}$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ และ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$ หาก

เราใช้ทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \frac{\infty}{\infty}$ ซึ่งอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\pm \frac{\infty}{\infty}$

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยที่

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

โดยที่ $a_n, b_m \neq 0$ แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.20 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^6 + 3x^4 - 5}{2x^6 + 4x^5 + 3}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^6 + 3x^4 - 5}{2x^6 + 4x^5 + 3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^6}{2x^6} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^6 + 3x^4 - 5}{2x^6 + 4x^5 + 3} = 4$ ■

ตัวอย่าง 2.21 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 9x^2 - 5x^4}{x^2 - 6x + 7}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 9x^2 - 5x^4}{x^2 - 6x + 7} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^4}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^2) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 9x^2 - 5x^4}{x^2 - 6x + 7} = -\infty$ ■

ตัวอย่าง 2.22 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 4x^2 + 1}{9x^7 - 7x + 5}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 4x^2 + 1}{9x^7 - 7x + 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{9x^7} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{9x^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 4x^2 + 1}{9x^7 - 7x + 5} = 0$ ■

ตัวอย่าง 2.23 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 3x - 6)^8}{(4 + 3x^2 + x^4)^4}$

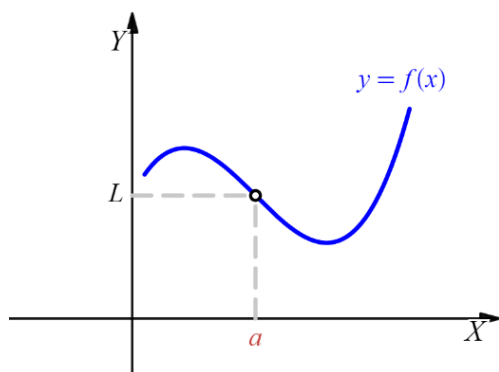
วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 3x - 6)^8}{(4 + 3x^2 + x^4)^4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2)^8}{(x^4)^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^8 x^{16}}{x^{16}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2^8 \\ &= 256 \end{aligned}$$

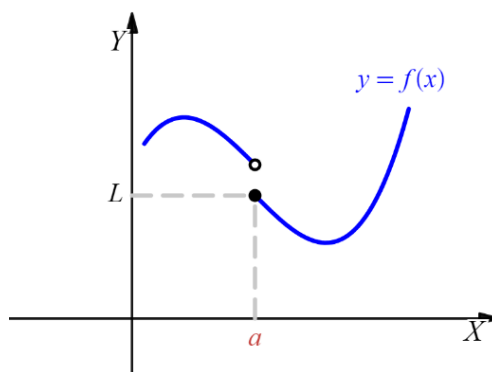
ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 3x - 6)^8}{(4 + 3x^2 + x^4)^4} = 256$ ■

2.4 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity of a function)

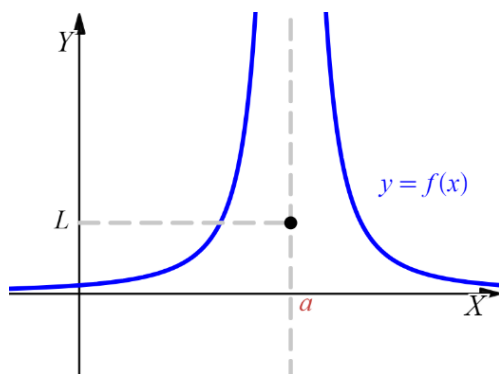
ก่อนที่จะนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน พิจารณากราฟของฟังก์ชัน ณ จุด $x = a$ ในรูปแบบต่าง ๆ แสดงดังรูป 2.10



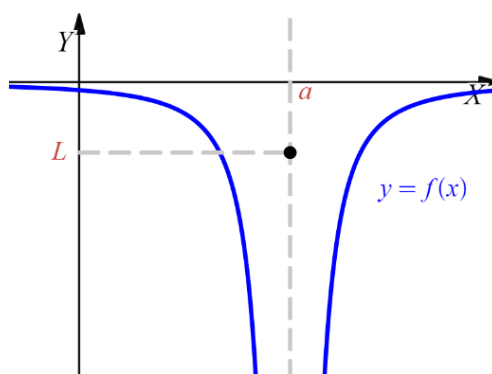
(1)

 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ แต่ $f(a)$ หาค่าไม่ได้


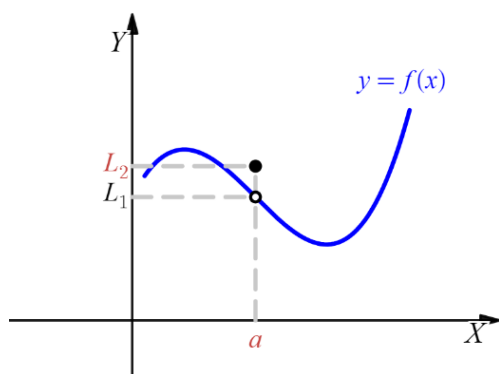
(2)

 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าไม่ได้ แต่ $f(a) = L$


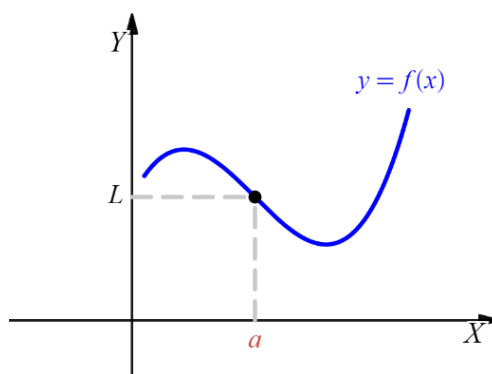
(3)

 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ แต่ $f(a) = L$


(4)

 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ แต่ $f(a) = L$


(5)

 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ แต่ $f(a) = L_2$


(6)

 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $f(a) = L$
รูป 2.10 กราฟแสดงการหาค่าฟังก์ชันและหาค่าลิมิตที่จุด $x = a$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ในการพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน เนื่องจากฟังก์ชันที่นำมาวาดกราฟนั้นค่อนข้างยาก และไม่สะดวกในการพิจารณา ดังนั้นจึงนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ

1. ฟังก์ชัน f จะเรียกว่ามีความต่อเนื่อง (continuous) ที่จุด $x = a$ ถ้า

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

2. ฟังก์ชัน f จะเรียกว่ามีความต่อเนื่องทางขวา (right continuous) ที่จุด $x = a$ ถ้า

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

3. ฟังก์ชัน f จะเรียกว่ามีความต่อเนื่องทางซ้าย (left continuous) ที่จุด $x = a$ ถ้า

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

จากบทนิยามข้างต้น ผู้เรียนสามารถหาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน f ที่จุด $x = a$ ได้โดยอาศัยการทดสอบดังนี้

การทดสอบความต่อเนื่อง: ฟังก์ชัน f จะเรียกว่ามีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1. $f(a)$ หาค่าได้ (เป็นจำนวนจริง)
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้ (เป็นจำนวนจริง)
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

หากเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งไม่เป็นจริง จะกล่าวว่า f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$

พิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันต่าง ๆ จากรูป 2.10 โดยอาศัยการทดสอบความต่อเนื่องข้างต้น จะได้ว่า

จากรูป 2.10(1) เส้นกราฟไม่มีความต่อเนื่อง เนื่องจาก $f(a)$ หาค่าไม่ได้

จากรูป 2.10(2) เส้นกราฟไม่มีความต่อเนื่อง เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

จากรูป 2.10(3) เส้นกราฟไม่มีความต่อเนื่อง เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

จากรูป 2.10(4) เส้นกราฟไม่มีความต่อเนื่อง เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

จากรูป 2.10(5) เส้นกราฟไม่มีความต่อเนื่อง เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

จากรูป 2.10(6) เส้นกราฟมีความต่อเนื่อง เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ในส่วนของการทดสอบความต่อเนื่องทางขวาจะการใช้การทดสอบข้างต้น โดยเปลี่ยนลิมิตในข้อ 2 และ 3 ให้อยู่ในรูปลิมิตทางขวา

ในทำนองเดียวกัน การทดสอบความต่อเนื่องทางซ้ายจะการใช้การทดสอบข้างต้น โดยเปลี่ยนลิมิตในข้อ 2 และ 3 ให้อยู่ในรูปลิมิตทางซ้าย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.24 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 4, & x \geq 2 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด

$x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ จะแสดงว่า f ต่อเนื่องที่จุด $x = 2$

$$1. \quad f(2) = 4$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

$$3. \quad f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

จาก 1., 2. และ 3. เป็นจริง

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ ■

ตัวอย่าง 2.25 กำหนดให้ $g(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ x^2 + 2, & x > 1 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า g มีความต่อเนื่องที่จุด

$x = 1$ หรือไม่

วิธีทำ จะแสดงว่า g ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$

$$1. \quad g(1) = 2$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (3 - x^2) \\ &= 3 - 1^2 \\ &= 3 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2) \\ &= 1^2 + 2 \\ &= 1 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ หาค่าไม่ได้

จะได้ว่า g ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ ■

ตัวอย่าง 2.26 กำหนดให้ $h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 7x - 12, & x = 4 \\ \frac{x^2 - 16}{x - 4}, & x \neq 4 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า h มีความ

ต่อเนื่องที่จุด $x = 4$ หรือไม่

วิธีทำ จะแสดงว่า h ต่อเนื่องที่จุด $x = 4$

$$\begin{aligned} 1. \quad h(4) &= 3(4^2) - 7(4) - 12 \\ &= 3(16) - 28 - 12 \\ &= 48 - 40 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \lim_{x \rightarrow 4} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) \\ \lim_{x \rightarrow 4} h(x) &= 4 + 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 4} h(x) = 8$$

$$3. \quad h(4) = \lim_{x \rightarrow 4} h(x)$$

จาก 1., 2. และ 3. เป็นจริง

ดังนั้น h มีความต่อเนื่องที่จุด $x = 4$ ■

2.4.1 ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วงปิด

ถ้า f มีความต่อเนื่องในทุก ๆ จุดที่อยู่ในช่วง (a, b) จะกล่าวว่า f มีความต่อเนื่องบนช่วง (a, b) และถ้า f มีความต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, \infty)$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function) ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.3 ฟังก์ชัน f จะเรียกว่ามีความต่อเนื่องบนช่วง $(a, b]$ ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1. f มีความต่อเนื่องบนช่วง (a, b)
2. f มีความต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด $x = b$

บทนิยาม 2.4 ฟังก์ชัน f จะเรียกว่ามีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b)$ ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1. f มีความต่อเนื่องบนช่วง (a, b)
2. f มีความต่อเนื่องทางขวาที่จุด $x = a$

บทนิยาม 2.5 ฟังก์ชัน f จะเรียกว่ามีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1. f มีความต่อเนื่องบนช่วง (a, b)
2. f มีความต่อเนื่องทางขวาที่ $x = a$
3. f มีความต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x = b$

สำหรับนิยามความต่อเนื่องบนช่วง $[a, \infty)$ และ $(-\infty, b]$ สามารถนิยามได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 2.27 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องบนช่วง $[-2, 2]$ หรือไม่

วิธีทำ 1. จะแสดงว่า f มีความต่อเนื่องบนช่วง $(-2, 2)$

ให้ $x = a$ โดยที่ a เป็นจำนวนใด ๆ ในช่วง $(-2, 2)$ ดังนั้น $f(a) = \sqrt{4-a^2}$

$$\begin{aligned}\text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{4-x^2} \\ &= \sqrt{4-a^2}\end{aligned}$$

$$\text{จะได้ว่า } f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องบนช่วง $(-2, 2)$

2. จะแสดงว่า f มีความต่อเนื่องทางขวาที่ $x = -2$

$$\begin{aligned}\text{จาก} \quad f(-2) &= \sqrt{4-(-2)^2} \\ &= \sqrt{4-4} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4-x^2} \\ &= \sqrt{4-(-2)^2} \\ &= \sqrt{4-4} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\text{จะได้ว่า } f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องทางขวาที่ $x = -2$

3. จะแสดงว่า f มีความต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x = 2$

$$\begin{aligned}\text{จาก} \quad f(2) &= \sqrt{4-2^2} \\ &= \sqrt{4-4} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \sqrt{4-2^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \sqrt{4-4} \\ &= 0\end{aligned}$$

จะได้ว่า $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x = 2$

จาก 1., 2. และ 3. เป็นจริง

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องบนช่วง $[-2, 2]$ ■

2.4.2 การขยายความต่อเนื่องของฟังก์ชันไปยังจุด

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงใด ๆ ยกเว้นที่จุด $x = a$ เนื่องจาก f ไม่นิยามที่จุด $x = a$ หรืออาจเกิดจากการที่ $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ในขณะที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ยังคงหาค่าได้ในที่นี้สามารถกำหนดฟังก์ชันที่นิยามมาจากฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D_f \\ L, & x = a \end{cases}$$

จะพบว่า ฟังก์ชัน F มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ จะเรียกฟังก์ชัน F นี้ว่า ฟังก์ชันขยายความต่อเนื่อง (continuous extension function) ของฟังก์ชัน f ไปยังจุด $x = a$ ดังนั้นฟังก์ชันตรรกยะสามารถที่จะสร้างฟังก์ชันที่ขยายความต่อเนื่องได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.28 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ เมื่อ $x \neq 2$ จงขยายความต่อเนื่องไปยังจุด

$x = 2$ และหาฟังก์ชันขยายความต่อเนื่อง

วิธีทำ เนื่องจาก $f(2)$ ไม่นิยาม ดังนั้น

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} \\ &= \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} \\ &= x - 3\end{aligned}$$

จะได้ว่า ฟังก์ชันใหม่คือ $F(x) = x - 3$ เมื่อ $x = 2$

$$\text{ดังนั้น ฟังก์ชันขยายความต่อเนื่อง คือ } F(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, & x \neq 2 \\ x - 3, & x = 2 \end{cases} \quad \blacksquare$$

สรุปเนื้อหาในบทที่ 2

ลิมิตของฟังก์ชันเป็นการหาค่าของฟังก์ชัน เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ค่าที่พิจารณา โดยจะกล่าวว่า ลิมิตหาค่าได้ที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อลิมิตทางซ้ายเท่ากับลิมิตทางขวา

ค่าของลิมิตจะหมายถึงค่าเข้าใกล้ เช่น $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ หมายถึงค่าของลิมิตของ $f(x)$

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a จะมีค่าเข้าใกล้ L เราอาจแทนด้วยสัญลักษณ์การเข้าใกล้ คือ $x \rightarrow a$ และ $f(x) \rightarrow L$

เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด หรือลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด จะเรียกว่า x เข้าใกล้ค่าอนันต์ ในทำนองเดียวกัน เมื่อ L มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด หรือลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด จะเรียกว่าลิมิตของฟังก์ชันมีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์

ความต่อเนื่องของฟังก์ชันคือฟังก์ชันที่เชื่อมต่อกันทุก ๆ จุด โดยไม่มีจุดที่ขาดจากกัน ในการพิจารณาความต่อเนื่อง หากพิจารณาเฉพาะจุด จะเรียกว่าฟังก์ชันนั้นต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องที่จุดที่พิจารณา โดยสามารถขยายการพิจารณาไปทั้งโดเมนที่เป็นจำนวนจริงของฟังก์ชันนั้น ๆ ได้ หากฟังก์ชันใดมีความต่อเนื่องบนช่วงของจำนวนจริง จะเรียกว่าฟังก์ชันต่อเนื่อง

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. จงหาลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1)$

1.2 $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + x + 5}$

1.3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - 7x + 1}$

1.4 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x - 4}{2x - 3}$

1.5 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$

1.6 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

1.7 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

1.8 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$

1.9 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

1.10 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 11x + 10}$

1.11 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)}{x^2 + 5x + 6}$

1.12 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - x - 12}$

1.13 $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 3}$

1.14 $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$

1.15 $\lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 3}$

1.16 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$

2. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2, & x \neq 0 \end{cases}$

3. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$ เมื่อ $g(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 5 \\ x + 1, & x > 5 \end{cases}$

4. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & x > 0 \end{cases}$

5. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ เมื่อ $g(x) = \begin{cases} x + 3, & x > -2 \\ 1, & x = -2 \\ 3x + 5, & x < -2 \end{cases}$

6. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$6.1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 9}{4x^3 + 1}$$

$$6.2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - x + 15}{3x + 1}$$

$$6.3 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 3x - 4x^2}{4 + 5x^2}$$

$$6.4 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^6 - 3x^2 + 1}{2x^6 + x^2 + 5}$$

$$6.5 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{(3x + 2)^2}$$

$$6.6 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(9x^3 - 4x^2 + 8)^2}{(7x^2 + 2x - 5)^3}$$

7. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ หรือไม่

8. กำหนดให้ $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 2 \\ 2x - 1, & x \geq 2 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า g ต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ หรือไม่

9. กำหนดให้ $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < -3 \\ 4 - x, & x = -3 \\ 2x + 13, & x > -3 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า h ต่อเนื่องที่จุด $x = -3$

หรือไม่

10. กำหนดให้ $z(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x = -1 \\ \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}, & x \neq -1 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า z ต่อเนื่องที่จุด $x = -1$

หรือไม่

เอกสารอ้างอิง

- กฤษณะ เนียมมณี. (2543). *แคลคูลัสสำหรับธุรกิจ 1*. กรุงเทพมหานคร: พิกซ์การพิมพ์.
- ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยวรีย์ พันธกล้า และณัฐนาถ ไตรภพ. (2547). *แคลคูลัส 1*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ภรดี ฤทธิเดช. (2560). *แคลคูลัสพื้นฐาน*. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.
- มนัส ประสงค์. (ม.ป.ป.). *แคลคูลัส 1*. กรุงเทพฯ: ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.
- ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). *ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน*. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สหมิตรพรินต์.
- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus* (10th ed.). John Wiley & Sons. Ltd., New York, U.S.A.
- Desmos. (n.d.). *Graphing Calculator*. <https://www.desmos.com/calculator>
- Thomas, G. B., Jr., Weir, M. D., & Hass, J. R. (2013). *Thomas' calculus: Early transcendentals* (13th ed.). Pearson.

บทที่ 3

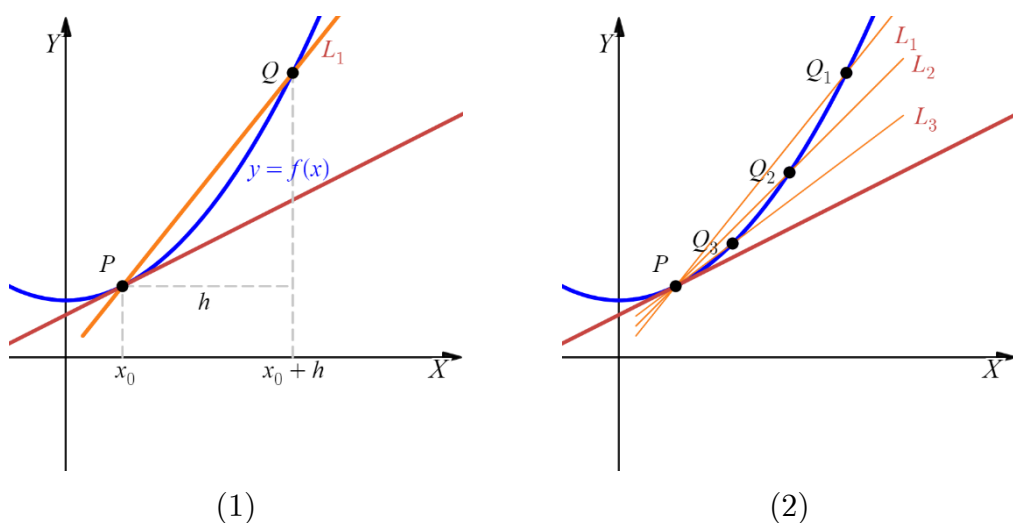
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ในแคลคูลัส อนุพันธ์ของฟังก์ชันคือแนวคิดพื้นฐานของการศึกษาแคลคูลัส ซึ่งเป็นการอธิบายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ณ จุดใดจุดหนึ่ง อนุพันธ์ของฟังก์ชันถูกนำไปประยุกต์ใช้ในหลากหลายสาขา เช่น การวิเคราะห์แนวโน้มและการคาดการณ์ การจัดการความเสี่ยงทางการเงิน การสร้างแบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์ การจำลองและการออกแบบทางวิศวกรรม การวิเคราะห์ข้อมูลและการคาดการณ์ เป็นต้น ตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้นกล่าวถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรต่าง ๆ ซึ่งอนุพันธ์มีส่วนช่วยในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้

3.1 เส้นสัมผัสและอัตราการเปลี่ยนแปลง (Tangent lines and rate of change)

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงปัญหาที่ทำให้เกิดอนุพันธ์ของฟังก์ชัน นั่นคือปัญหาเส้นสัมผัส (tangent line problem) โดยนักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์อยากรู้อยากทราบว่าสามารถหาสมการของเส้นตรงที่สัมผัสกับเส้นโค้ง ณ จุดใดจุดหนึ่งได้อย่างไร นอกจากนี้จะศึกษาถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ณ จุดใดจุดหนึ่ง

3.1.1 เส้นสัมผัสโค้ง (Tangent lines)



รูป 3.1 กราฟแสดงความความชันของเส้นโค้งที่ผ่านจุด P และ Q

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน มีกราฟเป็นเส้นโค้งดังรูป 3.1 ในการหาความชันของเส้นโค้งที่จุด $P(x_0, f(x_0))$ จะทำการพิจารณาจุดที่ใกล้เคียงจุด P คือจุด $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ จะได้เส้นตรง L_1 ที่ผ่านจุด P และ Q ดังรูป 3.1(1) เมื่อคำนวณความชันของเส้นตรง PQ จะได้ว่า

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

เมื่อให้จุด Q เลื่อนตามเส้นโค้ง $y = f(x)$ เข้ามาใกล้จุด P โดยให้ $h \rightarrow 0$ ดังรูป 3.1(2) จะนิยามเส้นสัมผัสที่ผ่านจุด P และมีความชัน m ดังนี้

บทนิยาม 3.1 ความชัน (slope) ของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(x_0, f(x_0))$ คือ

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

เส้นสัมผัสโค้ง (tangent line) ของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(x_0, f(x_0))$ คือเส้นตรงที่มีสมการ

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

ตัวอย่าง 3.1 กำหนดให้ $f(x) = x^2$ จงหาสมการเส้นสัมผัสโค้ง ณ จุด $x = 1$

วิธีทำ จาก $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$$\begin{aligned} \text{ที่ } x_0 = 1, \quad m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1^2 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) \\ &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $m = 2$

$$\text{จาก} \quad y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสโค้งที่ผ่านจุด $(1, f(1))$ และมีความชัน $m = 2$ คือ

$$y - f(1) = 2(x - 1)$$

$$y - 1^2 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 1$$

นั่นคือ $y = 2x - 1$ ■

3.1.2 อัตราการเปลี่ยนแปลง (Rate of change)

ให้ y เป็นปริมาณที่ขึ้นกับปริมาณ x แสดงว่าเมื่อ x มีค่าเปลี่ยน y จะมีค่าเปลี่ยนตาม นั่นคือ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า x มีการเปลี่ยนค่าจาก x_0 ไปยัง x_1 จะทำให้ค่า y เปลี่ยนจาก $f(x_0)$ ไปยัง $f(x_1)$ ด้วย จะเรียกผลต่างของ x และผลต่างของ y ดังนี้

ส่วนเปลี่ยนแปลง (increment) ของ x คือ

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

ส่วนเปลี่ยนแปลงของ y คือ

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย (rate of average change) ของ y เทียบกับ x ในช่วง $[x_0, x_1]$ คือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ถ้ากำหนดให้ $x_1 = x_0 + h$ จะได้ว่า $\Delta x = x_0 + h - x_0 = h$ ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $[x_0, x_0 + h]$ คือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

และถ้าพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในช่วงเล็ก ๆ นั่นคือเมื่อ $h \rightarrow 0$ แล้วลิมิตของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $[x_0, x_0 + h]$ คือ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

เรียกว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ที่จุด x_0

สังเกตว่าความชันของเส้นสัมผัสโค้งที่จุด $P(x_0, f(x_0))$ ก็คืออัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ที่จุด x_0 ถ้าลิมิตหาค่าได้

3.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Derivative of a function)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันใด ๆ โดยอนุพันธ์นั้นมีความสำคัญในทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก และในศาสตร์ต่าง ๆ ได้นำอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวาง

จากหัวข้อที่ผ่านมา อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เขียนแทนด้วย $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ หมายถึงอัตราส่วนที่เปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $y = f(x)$ กับตัวแปรอิสระ x ในช่วง $[x, x + \Delta x]$ เมื่อทำการหาลิมิตของ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ โดย $\Delta x \rightarrow 0$ ดังนั้นจะนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชันดังนิยาม

บทนิยาม 3.2 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x (the derivative of f with respect to x) กำหนดโดย

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

นั่นคืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ณ จุดใดจุดหนึ่ง

หมายเหตุ 1. ถ้าให้ $\Delta x = h$ เราสามารถเขียนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ได้ในรูป

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

2. สัญลักษณ์ $f'(x)$ อ่านว่า "เอฟไพรม์ของเอ็กซ์"

3. จาก $y = f(x)$ สัญลักษณ์ที่ใช้แทน $f'(x)$ อาจแทนด้วย

$$\frac{d}{dx} f(x) \text{ อ่านว่า "ดีบายดีเอ็กซ์ของเอฟของเอ็กซ์"}$$

$$y' \text{ อ่านว่า "วายไพรม์"}$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ อ่านว่า "ดีวายบายดีเอ็กซ์"}$$

4. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ก็คือความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด x นั้นเอง
5. จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = a$ (f is differentiable at a) หรือ f มีอนุพันธ์ที่จุด $x = a$ ถ้า $f'(a)$ หาค่าได้
6. ค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด $x = a$ เขียนแทนด้วย $f'(a)$ หรือ $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$

โดยสามารถหาค่าได้จากนิยาม โดยแทน $x = a$ และหาค่าลิมิต หรือหาค่าจาก $f'(x)$ โดยแทน $x = a$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.2 กำหนดให้ $f(x) = 2x$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + 2h - 2x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 2$ ■

ตัวอย่าง 3.3 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ เมื่อ $x \geq 0$ จงหา $f'(x)$ และ $f'(1)$

วิธีทำ 1) จาก
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{ดังนั้น } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

เนื่องจาก $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ ต้องแก้ปัญหโดยใช้

$\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ คูณทั้งเศษและส่วน ดังนั้น

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \blacksquare$$

$$2) \text{ จาก } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } f'(1) &= \frac{1}{2\sqrt{1}} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } f'(1) = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

- หมายเหตุ**
- จากตัวอย่าง 3.2 โดเมนของฟังก์ชัน f และ f' คือจำนวนจริง แต่ในตัวอย่าง 3.3 โดเมนของฟังก์ชัน f คือ $[0, \infty)$ แต่โดเมนของ f' คือ $(0, \infty)$ แสดงว่าในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดเมนของอนุพันธ์ของฟังก์ชันอาจจะไม่เหมือนกับโดเมนของฟังก์ชันเริ่มต้น
 - จากตัวอย่าง 3.3 ในการหา $f'(1)$ หากผู้เรียนใช้บทนิยาม 3.2 ในการหาค่าจะเป็นการเสียเวลา ผู้เรียนสามารถทำการหาค่าอนุพันธ์ที่ $x = 1$ ได้โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันก่อน หลังจากนั้นจึงทำการแทนค่าลงไปซึ่งสะดวกกว่า

จากตัวอย่างที่ผ่านมา หากต้องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ซับซ้อน เช่น

$$f(x) = \frac{x^2(2x-1)^3}{\sqrt{x^2+3x+1}} \quad \text{หรือ} \quad f(x) = e^{\sin x} \ln(\cos x)$$

จะเห็นว่า การหาอนุพันธ์โดยบทนิยาม 3.2 เป็นสิ่งที่วุ่นวายและเสียเวลาเป็นอย่างมาก นักคณิตศาสตร์จึงได้คิดค้นหาสูตรที่ช่วยเหลือในการหาอนุพันธ์ได้ง่ายและสะดวกรวดเร็วขึ้น โดยพิจารณาสูตรพื้นฐานในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต และสูตรที่ซับซ้อนขึ้นในอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัยดังนี้

3.3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต (Derivative of an algebraic function)

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตจะเป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันภายใต้ดำเนินการทางพีชคณิต (การบวก การลบ การคูณ การหาร การถอดราก และการยกกำลัง) บนตัวแปรอิสระ x และมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ ซึ่งถือว่าเป็นอนุพันธ์พื้นฐานที่นำไปต่อยอดในการหาอนุพันธ์ที่ซับซ้อนต่อไปได้ ในส่วนของการพิสูจน์สูตรการหาอนุพันธ์ ผู้เรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ภาคผนวกท้ายเล่ม

ทฤษฎีบท 3.1 (อนุพันธ์ของค่าคงตัว) ให้ c ค่าคงตัวใด ๆ

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

พิสูจน์ ดูภาคผนวก ■

ตัวอย่างเช่น $\frac{d}{dx}(5) = 0$, $\frac{d}{dx}(-7) = 0$

ทฤษฎีบท 3.2 (อนุพันธ์ของเลขยกกำลัง) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

พิสูจน์ ดูภาคผนวก ■

ตัวอย่างเช่น $\frac{d}{dx}(x) = 1$, $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$, $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$

หมายเหตุ 1. กรณี $n = 1$ จะได้ว่า $\frac{d}{dx}(x) = 1$

2. ทฤษฎีบท 3.2 สามารถขยายขอบเขต n ไปยังจำนวนจริงได้ ในการพิสูจน์กรณีอื่น จะต้องใช้การหาอนุพันธ์ในส่วนของเนื้อหาถัดไป ในที่นี้เพื่อการใช้งานที่สะดวก จะขอหยิบยกสูตรมาใช้ เมื่อ n เป็นจำนวนจริง นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

3. ในการหาอนุพันธ์ของรากต่าง ๆ เราสามารถใช้การขยายทฤษฎีบท 3.2 ที่ n เป็นจำนวนจริงได้ โดยทั่วไปรากที่มักจะพบเจอบ่อย ๆ คือรากที่ 2 ดังนั้นสูตรในการหาอนุพันธ์ของรากที่ 2 คือ

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ทฤษฎีบท 3.3 (อนุพันธ์ของผลคูณค่าคงตัว) ให้ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

$$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$$

พิสูจน์ ดูภาคผนวก ■

ตัวอย่างเช่น $\frac{d}{dx}(3x) = 3 \frac{d}{dx}(x) = 3$

$$\frac{d}{dx}(-5x^2) = -5 \frac{d}{dx}(x^2) = -10x$$

ทฤษฎีบท 3.4 (อนุพันธ์ของผลบวกและผลต่าง) ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ดูภาคผนวก ■

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 3.4 เราสามารถขยายผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx} [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] = \frac{d}{dx} [f_1(x)] + \frac{d}{dx} [f_2(x)] + \dots + \frac{d}{dx} [f_n(x)]$$

และ

$$\frac{d}{dx} [f_1(x) - f_2(x) - \dots - f_n(x)] = \frac{d}{dx} [f_1(x)] - \frac{d}{dx} [f_2(x)] - \dots - \frac{d}{dx} [f_n(x)]$$

เมื่อ $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x

ตัวอย่างเช่น $\frac{d}{dx}(3x + 2) = \frac{d}{dx}(3x) + \frac{d}{dx}(2) = 3 + 0 = 3$

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 2x) = \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(2x) = 2x - 2$$

ทฤษฎีบท 3.5 (อนุพันธ์ของผลคูณ) ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

พิสูจน์ ดูภาคผนวก ■

ทฤษฎีบท 3.6 (อนุพันธ์ของผลหาร) ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $v \neq 0$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

พิสูจน์ ดูภาคผนวก ■

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 3.6 การใช้อนุพันธ์ของผลหารจะค่อนข้างยุ่งยาก แต่ถ้าจัดรูปให้อยู่ในรูปผลคูณของตัวเศษและตัวส่วนจะทำการหาอนุพันธ์ได้ง่ายกว่า ดังนั้นในกรณีที่เศษส่วนสามารถจัดรูปอยู่ในรูปผลคูณหรืออยู่ในรูปเลขยกกำลัง เราสามารถเลี่ยงการใช้อนุพันธ์ของผลหารไปเป็นอนุพันธ์ของผลคูณ หรืออนุพันธ์ของเลขยกกำลังได้ นั่นคือ

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{d}{dx}(uv^{-1})$$

ตัวอย่าง 3.4 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[4x^3 - 3x^2 + 2x - 1]$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx} \quad = \quad \frac{d}{dx}(4x^3) - \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(1)$$

$$\begin{aligned} \text{สูตร } \frac{d}{dx}(x^n) &= nx^{n-1} \quad = \quad 4 \frac{d}{dx}(x^3) - 3 \frac{d}{dx}(x^2) + 2 \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(1) \\ &= 4(3x^2) - 3(2x) + 2(1) - 0 \\ &= 12x^2 - 6x + 2 \end{aligned}$$

2) $y = \frac{1}{2x} - \frac{2}{3x^2} + \frac{3}{4x^3}$

วิธีทำ จากโจทย์ จัดรูปใหม่

$$y = \frac{1}{2}x^{-1} - \frac{2}{3}x^{-2} + \frac{3}{4}x^{-3}$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(x^{-1}) - \frac{2}{3} \frac{d}{dx}(x^{-2}) + \frac{3}{4} \frac{d}{dx}(x^{-3})$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad = \quad \frac{1}{2}(-x^{-2}) - \frac{2}{3}(-2x^{-3}) + \frac{3}{4}(-3x^{-4})$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-2} + \frac{4}{3}x^{-3} - \frac{9}{4}x^{-4}$$

$$= -\frac{1}{2x^2} + \frac{4}{3x^3} - \frac{9}{4x^4}$$

3) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[5]{x^2}$

วิธีทำ จากโจทย์ จัดรูปใหม่

$$y = \frac{1}{2x^{1/2}} + x^{1/3} - \frac{3}{x^{1/4}} + x^{2/5}$$

$$= \frac{1}{2}x^{-1/2} + x^{1/3} - 3x^{-1/4} + x^{2/5}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(x^{-1/2}) + \frac{d}{dx}(x^{1/3}) - 3 \frac{d}{dx}(x^{-1/4}) + \frac{d}{dx}(x^{2/5})$

สูตร $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} x^{-3/2} \right) + \frac{1}{3} x^{-2/3} - 3 \left(-\frac{1}{4} x^{-5/4} \right) + \frac{2}{5} x^{-3/5}$$

$$= -\frac{1}{4} x^{-3/2} + \frac{1}{3} x^{-2/3} + \frac{3}{4} x^{-5/4} + \frac{2}{5} x^{-3/5}$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x^5}} + \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างต้น สูตร $\frac{d}{dx}(x^n)$ ถือเป็นสูตรที่ใช้บ่อย เนื่องจากฟังก์ชันส่วนใหญ่อยู่ในรูปของฟังก์ชันพหุนาม ผู้เรียนควรฝึกใช้สูตร $\frac{d}{dx}(x^n)$ ให้คล่อง ซึ่งจะ
เป็นพื้นฐานที่ดีในการเรียนรู้สูตรการหาอนุพันธ์ที่ซับซ้อน

ตัวอย่าง 3.5 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $y = (2x - 3)(3x^2 + 1)$

วิธีทำ วิธีที่ 1

$$y = 6x^3 + 2x - 9x^2 - 3$$

$$= 6x^3 - 9x^2 + 2x - 3$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 6 \frac{d}{dx}(x^3) - 9 \frac{d}{dx}(x^2) + 2 \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(3)$

สูตร $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

$$= 6(3x^2) - 9(2x) + 2(1) - 0$$

$$= 18x^2 - 18x + 2$$

วิธีที่ 2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x - 3)(3x^2 + 1)$$

สูตร $\frac{d}{dx}(uv), u = 2x - 3, v = 3x^2 + 1$

$$= (2x - 3) \frac{d}{dx}(3x^2 + 1) + (3x^2 + 1) \frac{d}{dx}(2x - 3)$$

$$= (2x - 3)(6x) + (3x^2 + 1)(2)$$

$$= 12x^2 - 18x + 6x^2 + 2$$

$$= 18x^2 - 18x + 2$$

$$2) \quad y = \frac{x^2}{4x+3}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{4x+3} \right) \quad \left[\text{สูตร } \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right), u = x^2, v = 4x+3 \right] \\ &= \frac{(4x+3) \frac{d}{dx}(x^2) - x^2 \frac{d}{dx}(4x+3)}{(4x+3)^2} \\ &= \frac{(4x+3)(2x) - x^2(4)}{(4x+3)^2} \\ &= \frac{8x^2 + 6x - 4x^2}{(4x+3)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 6x}{(4x+3)^2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.6 กำหนดให้ $f(\theta) = 4\theta^3 - 3\theta^2 + 2\theta - 1$ จงหา $f'(-1)$

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 4 \frac{d}{d\theta}(\theta^3) - 3 \frac{d}{d\theta}(\theta^2) + 2 \frac{d}{d\theta}(\theta) - \frac{d}{d\theta}(1) \\ &= 12\theta^2 - 6\theta + 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 12(-1)^2 - 6(-1) + 2 \\ &= 12(1) + 6 + 2 \\ &= 12 + 8 \\ &= 20 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ (Derivative of a composite function)

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบนั้น เนื่องจากฟังก์ชันประกอบมีความซับซ้อนเป็นอย่างมาก ในการหาอนุพันธ์จะยิ่งซับซ้อนมากขึ้น ดังนั้นทฤษฎีบทต่อไปนี้ จะทำให้หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบได้สะดวกขึ้น

ทฤษฎีบท 3.7 (กฎลูกโซ่ (the chain rule))

ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $g(x)$ แล้วฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ จะเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า $y = f(g(x))$ และ $u = g(x)$ แล้ว $y = f(u)$ และ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 3.7 จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad \text{----} (*)$$

สามารถเรียกอีกอย่างหนึ่งได้ว่า f เป็นฟังก์ชันภายนอก และ g เป็นฟังก์ชันภายใน ของฟังก์ชันประกอบ $f(g(x))$

ให้ $u = g(x)$ สมการ (*) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u) \frac{du}{dx}$$

เรียกว่า **รูปแบบทั่วไปของสูตรการหาอนุพันธ์** (generalized derivative formula) ของฟังก์ชัน f เพื่อหาอนุพันธ์ของ $f(x)$ โดยการหาอนุพันธ์ของ $f(u)$ เมื่อ u เป็นฟังก์ชันของ x ดังนั้นสูตรในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน สามารถเขียนในรูปแบบทั่วไปของสูตรการหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

รูปฟังก์ชันของ x	รูปแบบทั่วไป
1. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{d}{dx}(\sqrt{u}) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 3.7 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $y = (2x^3 - 8)^5$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(2x^3 - 8)^5 \quad \text{สูตร } \frac{d}{dx}(u^n), u = 2x^3 - 8 \\ &= 5(2x^3 - 8)^4 \frac{d}{dx}(2x^3 - 8) \\ &= 5(2x^3 - 8)^4 (6x^2) \\ &= 30x^2(2x^3 - 8)^4\end{aligned}$$

■

2) $y = \sqrt{2x + 7}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\sqrt{2x + 7} \quad \text{สูตร } \frac{d}{dx}\sqrt{u}, u = 2x + 7 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2x + 7}} \frac{d}{dx}(2x + 7) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2x + 7}} (2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x + 7}}\end{aligned}$$

■

3) $y = 2x\sqrt{3x - 7}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[2x\sqrt{3x - 7}] \quad \text{สูตร } \frac{d}{dx}(uv), u = 2x, v = \sqrt{3x - 7} \\ &= 2x \frac{d}{dx}\sqrt{3x - 7} + \sqrt{3x - 7} \frac{d}{dx}(2x) \\ &= 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x - 7}} \frac{d}{dx}(3x - 7) + \sqrt{3x - 7} (2) \\ &= 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x - 7}} (3) + 2\sqrt{3x - 7} \\ &= \frac{3x}{\sqrt{3x - 7}} + 2\sqrt{3x - 7}\end{aligned}$$

■

$$4) \quad y = \frac{x+1}{(3x-2)^3}$$

วิธีทำ วิธีที่ 1

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{(3x-2)^3} \right) \\ &= \frac{(3x-2)^3 \frac{d}{dx}(x+1) - (x+1) \frac{d}{dx}(3x-2)^3}{[(3x-2)^3]^2} \\ &= \frac{(3x-2)^3(1) - (x+1) \cdot 3(3x-2)^2 \frac{d}{dx}(3x-2)}{(3x-2)^6} \\ &= \frac{(3x-2)^3 - 3(x+1)(3x-2)^2(3)}{(3x-2)^6} \\ &= \frac{(3x-2)^3 - 9(x+1)(3x-2)^2}{(3x-2)^6} \\ &= \frac{(3x-2)^3}{(3x-2)^6} - \frac{9(x+1)(3x-2)^2}{(3x-2)^6} \\ &= \frac{1}{(3x-2)^3} - \frac{9(x+1)}{(3x-2)^4} \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 จากโจทย์ จัดรูปใหม่

$$\begin{aligned} y &= (x+1)(3x-2)^{-3} \\ \text{ดังนั้น} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (x+1)(3x-2)^{-3} \\ &= (x+1) \frac{d}{dx} (3x-2)^{-3} + (3x-2)^{-3} \frac{d}{dx} (x+1) \\ &= (x+1) \left[-3(3x-2)^{-4} \frac{d}{dx} (3x-2) \right] + (3x-2)^{-3} (1) \\ &= (x+1) \left[-3(3x-2)^{-4} (3) \right] + (3x-2)^{-3} \\ &= \frac{-9(x+1)}{(3x-2)^4} + \frac{1}{(3x-2)^3} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.8 กำหนดให้ $y = u^2 + 3$, $u = x - 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du} &= \frac{d}{du}(u^2 + 3) \\ &= 2u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx}(x - 1) \\ &= 1\end{aligned}$$

จากกฎลูกโซ่

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2u \cdot (1) \\ &= 2u \\ &= 2(x - 1)\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 3.9 กำหนดให้ $w = 1 + \sqrt{s}$, $s = 1 - t^2$ จงหา $\frac{dw}{dt}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\frac{dw}{ds} &= \frac{d}{ds}(1 + \sqrt{s}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{s}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \frac{d}{dt}(1 - t^2) \\ &= -2t\end{aligned}$$

จากกฎลูกโซ่

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \cdot (-2t) \\ &= -\frac{t}{\sqrt{s}} \\ &= -\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}\end{aligned}$$

■

หมายเหตุ ทฤษฎีบท 3.7 ยังคงเป็นจริงในกรณีที่ y เป็นฟังก์ชันประกอบของหลายฟังก์ชัน เช่น $y = f(u)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ u , $u = g(s)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ s และ $s = h(t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ t จากกฎลูกโซ่จะได้ว่า y เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ t และ

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.10 กำหนดให้ $y = 3u^4 - 4u^3$, $u = x + 1$, $x = t^2$ จงหา $\frac{dy}{dt}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{d}{du}(3u^4 - 4u^3) \\ &= 12u^3 - 12u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx}(x + 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(t^2) \\ &= 2t \end{aligned}$$

จากกฎลูกโซ่ $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dt} = (12u^3 - 12u^2)(1)(2t)$$

$$= 12u^2(u - 1)(2t)$$

แทน $u = x + 1$

$$= 24(x + 1)^2(x + 1 - 1)t$$

$$= 24(x + 1)^2 xt$$

แทน $x = t^2$

$$= 24(t^2 + 1)^2 t^2 t$$

$$= 24(t^2 + 1)^2 t^3$$

■

ตัวอย่าง 3.11 กำหนดให้ $y = u^3 - 2$, $u = x^2$, $x = 1 - t^2$ จงหา $\frac{dy}{dt}$ ที่จุด $t = 2$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du} &= \frac{d}{du}(u^3 - 2) \\ &= 3u^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^2) \\ &= 2x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(1 - t^2) \\ &= -2t\end{aligned}$$

จากกฎลูกโซ่

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 3u^2 \cdot 2x \cdot (-2t) \\ &= -12u^2xt \\ &= -12(x^2)^2 \cdot x \cdot t \\ &= -12x^5t \\ &= -12(1 - t^2)^5t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ที่ } t = 2, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=2} &= -12(1 - 2^2)^5(2) \\ &= -24(1 - 4)^5 \\ &= -24(-3)^5 \\ &= -24(-243) \\ &= 5,832\end{aligned}$$

■

3.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit differentiation)

ฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง (explicit function) คือฟังก์ชันที่มีตัวแปรตาม 1 ตัว เขียนในรูปตัวแปรอิสระ เช่น

$$y = 2x, \quad u = \sqrt{1 - t^2}, \quad y = \sin 2x + \cos 3x$$

โดยส่วนใหญ่ฟังก์ชันโดยชัดแจ้งมักเขียนในรูป $y = f(x)$ หรือเขียนในรูปตัวแปรตาม กับตัวแปรอิสระแยกจากกันได้ชัดเจน

ฟังก์ชันโดยปริยาย (implicit function) คือฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัวเขียนรวมกัน จนไม่สามารถแยกตัวแปรตาม เขียนในรูปตัวแปรอิสระได้ เช่น

$$2x^2 - x^2y + xy^2 = 0, \quad \sin xy + \cos xy = 5$$

จากสมการข้างต้น สังเกตว่าจะไม่สามารถเขียน y ให้อยู่ในรูปตัวแปรอิสระ x ได้ โดยส่วนใหญ่สมการข้างต้นมักเขียนในรูป $F(x, y) = 0$ และเรียก y ว่าเป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย เมื่อ y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x จะทำการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x ทั้งสมการ โดยมอง y อยู่ในรูปของฟังก์ชันที่มีตัวแปร x โดยมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

1. หาอนุพันธ์เทียบตัวแปรของฟังก์ชันทุกตัว โดยมอง y ว่าเป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x
2. จัดรูปสมการ โดยให้ด้านซ้ายมีพจน์ที่ติด $\frac{dy}{dx}$ ด้านขวาไม่มีพจน์ที่ติด $\frac{dy}{dx}$
3. จัดรูป ให้อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx}$

ตัวอย่าง 3.12 กำหนดให้ $x^2 + xy^2 + 5 = 0$ เมื่อ y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ หาอนุพันธ์เทียบตัวแปร x ทั้งสมการ

จาก
$$x^2 + xy^2 + 5 = 0 \quad \text{สูตร } \frac{d}{dx}(uv), u = x, v = y^2$$

ดังนั้น
$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(5) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\begin{aligned}
 2x + \left[x \frac{d}{dx}(y^2) + y^2 \frac{d}{dx}(x) \right] + 0 &= 0 \\
 \text{สูตร } \frac{d}{dx}(u^n), u = y &\quad 2x + x(2y) \frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \\
 2xy \frac{dy}{dx} &= -2x - y^2 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{-2x - y^2}{2xy} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.13 กำหนดให้ $x^2 - xy + y^2 = 1$ เมื่อ y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด $(0,1)$

วิธีทำ หาอนุพันธ์เทียบตัวแปร x ทั้งสมการ

$$\begin{aligned}
 \text{จาก} \quad x^2 - xy + y^2 &= 1 && \text{สูตร } \frac{d}{dx}(uv), u = x, v = y \\
 \text{ดังนั้น} \quad \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(1) \\
 2x - \left[x \frac{d}{dx}(y) + y \frac{d}{dx}(x) \right] + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 && \text{สูตร } \frac{d}{dx}(u^n), u = y \\
 2x - x \frac{dy}{dx} - y + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\
 -x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} &= -2x + y \\
 (-x + 2y) \frac{dy}{dx} &= -2x + y \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{-2x + y}{-x + 2y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ที่จุด } (0,1), \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{(0,1)} &= \frac{-2(0) + 1}{-0 + 2(1)} \\
 &= \frac{1}{2} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.14 กำหนดให้ $1 + 2xy^3 = x^3y$ เมื่อ y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ หาอนุพันธ์เทียบตัวแปร x ทั้งสมการ

$$\begin{aligned}
 \text{จาก} \quad & 1 + 2xy^3 = x^3y \\
 \text{ดังนั้น} \quad & \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(2xy^3) = \frac{d}{dx}(x^3y) \\
 & 0 + \left[2x \frac{d}{dx}(y^3) + y^3 \frac{d}{dx}(2x) \right] = x^3 \frac{d}{dx}(y) + y \frac{d}{dx}(x^3) \\
 & 2x(3y^2) \frac{dy}{dx} + y^3(2) = x^3 \frac{dy}{dx} + y(3x^2) \\
 & 6xy^2 \frac{dy}{dx} - x^3 \frac{dy}{dx} = 3x^2y - 2y^3 \\
 & (6xy^2 - x^3) \frac{dy}{dx} = 3x^2y - 2y^3 \\
 & \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2y - 2y^3}{6xy^2 - x^3}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.15 กำหนดให้ $(1+y)^2 = \frac{y}{x}$ เมื่อ y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x จงหา $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad & \text{จัดรูป} \quad (1+y)^2 = x^{-1}y \\
 & \text{หาอนุพันธ์เทียบตัวแปร } x \text{ ทั้งสมการ} \\
 & \frac{d}{dx}(1+y)^2 = \frac{d}{dx}(x^{-1}y) \\
 & 2(1+y) \frac{d}{dx}(1+y) = x^{-1} \frac{dy}{dx} + y \frac{d}{dx}(x^{-1}) \\
 & 2(1+y) \left(0 + \frac{dy}{dx} \right) = x^{-1} \frac{dy}{dx} + y(-x^{-2}) \\
 & (2+2y) \frac{dy}{dx} = x^{-1} \frac{dy}{dx} - x^{-2}y \\
 & (2+2y-x^{-1}) \frac{dy}{dx} = -x^{-2}y \\
 & \frac{dy}{dx} = \frac{-x^{-2}y}{2+2y-x^{-1}}
 \end{aligned}$$

3.6 อนุพันธ์อันดับสูง (Higher derivatives)

ในหัวข้อก่อนหน้านี้ผู้เรียนได้ทำการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ จะได้ฟังก์ชันใหม่คือ $f'(x)$ หาก $f'(x)$ สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ จะเรียกผลลัพธ์นี้ว่าอนุพันธ์อันดับที่สอง แทนด้วยสัญลักษณ์ $f''(x)$ ซึ่งยังคงเป็นฟังก์ชัน โดยจะกล่าวถึงอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ ดังนี้

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x พิจารณาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
อนุพันธ์อันดับ 1 ของ f ที่ x (first derivative) เขียนแทนด้วย

$$y' = \frac{d}{dx} f(x)$$

อนุพันธ์อันดับ 2 ของ f ที่ x (second derivative) เขียนแทนด้วย

$$y'' = \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} f(x) \right] = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

อนุพันธ์อันดับ 3 ของ f ที่ x (third derivative) เขียนแทนด้วย

$$y''' = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2}{dx^2} f(x) \right] = \frac{d^3}{dx^3} f(x)$$

อนุพันธ์อันดับ 4 ของ f ที่ x (fourth derivative) เขียนแทนด้วย

$$y^{(4)} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^3}{dx^3} f(x) \right] = \frac{d^4}{dx^4} f(x)$$

⋮

อนุพันธ์อันดับ n ของ f ที่ x (n^{th} derivative) เขียนแทนด้วย

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) \right] = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

ตัวอย่าง 3.16 กำหนดให้ $y = 4x^3 + 7x^2 - 10$ จงหา y'''

วิธีทำ จาก $y = 4x^3 + 7x^2 - 10$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } y' &= \frac{d}{dx} (4x^3 + 7x^2 - 10) \\ &= 4(3x^2) + 7(2x) - 0 \\ &= 12x^2 + 14x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y'' &= \frac{d}{dx}(12x^2 + 14x) \\
 &= 12(2x) + 14(1) \\
 &= 24x + 14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y''' &= \frac{d}{dx}(24x + 14) \\
 &= 24(1) + 0 \\
 &= 24
 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 3.17 กำหนดให้ $y = \frac{x}{x-3}$ จงหา $\frac{d^3y}{dx^3}$

วิธีทำ จาก $y = \frac{x}{x-3}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x-3}\right)$

สูตร $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$, $u = x$, $v = x-3$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x-3)\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(x-3)}{(x-3)^2} \\
 &= \frac{(x-3)(1) - x(1)}{(x-3)^2} \\
 &= \frac{x-3-x}{(x-3)^2} \\
 &= \frac{-3}{(x-3)^2} \\
 &= -3(x-3)^{-2}
 \end{aligned}$$

สูตร $\frac{d}{dx}(u^n)$, $u = x-3$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2y}{dx^2} &= -3\frac{d}{dx}(x-3)^{-2} \\
 &= (-3)(-2)(x-3)^{-3}\frac{d}{dx}(x-3) \\
 &= 6(x-3)^{-3}(1) \\
 &= 6(x-3)^{-3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3y}{dx^3} &= 6 \frac{d}{dx}(x-3)^{-3} \\
&= (6)(-3)(x-3)^{-4} \frac{d}{dx}(x-3) \\
&= -18(x-3)^{-4}(1) \\
&= -18(x-3)^{-4} \\
&= -\frac{18}{(x-3)^4}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.18 กำหนดให้ $y = \sqrt{1+2x}$ จงหา y''

วิธีทำ จัดรูป

$$y = (1+2x)^{1/2}$$

ดังนั้น

$$y' = \frac{d}{dx}(1+2x)^{1/2}$$

สูตร $\frac{d}{dx}(u^n)$, $u = 1+2x$

$$= \frac{1}{2}(1+2x)^{-1/2} \frac{d}{dx}(1+2x)$$

$$= \frac{1}{2}(1+2x)^{-1/2}(2)$$

$$= (1+2x)^{-1/2}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(1+2x)^{-1/2}$$

สูตร $\frac{d}{dx}(u^n)$, $u = 1+2x$

$$= -\frac{1}{2}(1+2x)^{-3/2} \frac{d}{dx}(1+2x)$$

$$= -\frac{1}{2}(1+2x)^{-3/2}(2)$$

$$= -(1+2x)^{-3/2}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}}$$

ข้อสังเกต

จากตัวอย่าง 3.19 จะเห็นว่าการจัดรูปรากที่ 2 ให้อยู่ในรูปยกกำลังเศษส่วน จะช่วยให้สามารถหาอนุพันธ์อันดับสูงได้สะดวกยิ่งขึ้น

3.7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย (Derivative of transcendental functions)

ในหัวข้อที่ผ่านมาได้ศึกษาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตซึ่งเป็นฟังก์ชันภายใต้การดำเนินการทางพีชคณิต (การบวก การลบ การคูณ การหาร การถอดราก และการยกกำลัง) บนตัวแปรอิสระ x และมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ ในหัวข้อนี้จะศึกษาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย โดยฟังก์ชันอดิศัยที่น่าสนใจศึกษาคือฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

ฟังก์ชันอดิศัยที่กล่าวมามีความสำคัญและพบได้ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ วิศวกรรม เศรษฐศาสตร์ และสาขาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

3.7.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม (Derivative of logarithmic functions)

ฟังก์ชันลอการิทึม คือฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง โดยฟังก์ชันลอการิทึมจะอยู่ในรูป $y = \log_a x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ฟังก์ชันลอการิทึมที่มักพบเจอบ่อย ๆ จะเรียกว่าลอการิทึมธรรมชาติ โดยมีตัวฐานเป็น e และอยู่ในรูป $y = \log_e x = \ln x$ เมื่อ e มีค่าประมาณ 2.71828...

ในหัวข้อนี้จะศึกษาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม ซึ่งเป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ผู้เรียนสามารถศึกษารายละเอียดพื้นฐานของฟังก์ชันลอการิทึม รวมถึงคุณสมบัติเพิ่มเติมได้ที่ภาคผนวกท้ายเล่ม

ก่อนที่จะเข้าสู่การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม พิจารณาการหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$ โดยใช้ตาราง 3.1 ดังนี้

ตาราง 3.1 แสดงค่าของ $(1+x)^{1/x}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้ายและทางขวา

x	$(1+x)^{1/x}$
0.0001	2.7181459
0.00001	2.7182682
0.000001	2.7182805
0.0000001	2.7182817
0.00000001	2.7182818

x	$(1+x)^{1/x}$
-0.0001	2.7184178
-0.00001	2.7182954
-0.000001	2.7182832
-0.0000001	2.7182820
-0.00000001	2.7182819

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากตาราง 3.1 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ ซึ่งจะใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.8 (อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม) สำหรับ $a > 0$ และ $a \neq 1$

$$1. \quad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e, \quad x > 0$$

$$2. \quad \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

พิสูจน์ ดูภาคผนวก ■

หมายเหตุ 1. จากคุณสมบัติ $\log_a e = \frac{\log e}{\log a} = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

2. จากกฎลูกโซ่ สามารถเขียนในรูปแบบทั่วไปของสูตรการหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

รูปฟังก์ชันของ x	รูปแบบทั่วไป
1. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$	$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u} \cdot \log_a e \cdot \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 3.19 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1) \quad y = \log_3(x^2 + 4)$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[\log_3(x^2 + 4) \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{สูตร } \frac{d}{dx}(\log_a u), u = x^2 + 4 \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{x^2 + 4} \cdot \log_3 e \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 4) \\
 &= \frac{1}{x^2 + 4} \cdot \log_3 e \cdot (2x) \\
 &= \frac{2x \log_3 e}{x^2 + 4}
 \end{aligned}$$

■

2) $y = x \log x^3$ ที่จุด $x = 1$

วิธีทำ จัดรูป

$$y = 3x \log x$$

$$\log u^n = n \log u$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x \log x)$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(uv), u = 3x, v = \log x$$

$$= 3x \cdot \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \cdot \frac{d}{dx}(3x)$$

$$= 3x \cdot \frac{1}{x} \log e + \log x \cdot (3)$$

$$= 3 \cdot \log e + 3 \log x$$

ที่จุด $x = 1$ จะได้

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1}$$

$$= 3 \cdot \log e + 3 \log 1$$

$$\log 1 = 0$$

$$= 3 \cdot \log e$$

■

$$3) \quad y = \ln \frac{x(2x+5)^4}{(3x-1)^2}$$

$$\ln uv = \ln u + \ln v$$

$$\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$$

$$\ln u^n = n \ln u$$

วิธีทำ จัดรูป

$$y = \ln x + \ln(2x+5)^4 - \ln(3x-1)^2$$

$$= \ln x + 4 \ln(2x+5) - 2 \ln(3x-1)$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\ln x + 4 \ln(2x+5) - 2 \ln(3x-1) \right]$$

$$= \frac{d}{dx}(\ln x) + 4 \frac{d}{dx} \left[\ln(2x+5) \right] - 2 \frac{d}{dx} \left[\ln(3x-1) \right]$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{2x+5} \cdot \frac{d}{dx}(2x+5) - 2 \cdot \frac{1}{3x-1} \cdot \frac{d}{dx}(3x-1)$$

$$= \frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{2x+5} \cdot (2) - 2 \cdot \frac{1}{3x-1} \cdot (3)$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{8}{2x+5} - \frac{6}{3x-1}$$

■

$$4) \quad y = \ln^3(2x - 1)$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[\ln^3(2x - 1) \right] \quad \text{สูตร } \frac{d}{dx}(u^n), u = \ln(2x - 1) \\ &= 3 \cdot \ln^2(2x - 1) \cdot \frac{d}{dx} \left[\ln(2x - 1) \right] \quad \text{สูตร } \frac{d}{dx}(\ln u), u = 2x - 1 \\ &= 3 \cdot \ln^2(2x - 1) \cdot \frac{1}{2x - 1} \cdot \frac{d}{dx}(2x - 1) \\ &= 3 \cdot \ln^2(2x - 1) \cdot \frac{1}{2x - 1} \cdot (2) \\ &= \frac{6 \ln^2(2x - 1)}{2x - 1} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

นอกจากนี้ ยังสามารถนำฟังก์ชันลอการิทึมไปหาอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปผลคูณหรือผลหารที่ซับซ้อนได้ โดยการหาลอการิทึมฐาน e ทั้งสมการ หลังจากนั้น ใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม แล้วจึงทำการหาอนุพันธ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.20 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม

$$1) \quad y = x^2(x + 3)^4(x^2 + 5)^6$$

วิธีทำ **ขั้นตอนที่ 1** ทำการหาลอการิทึมฐาน e ทั้งสมการ

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln \left[x^2(x + 3)^4(x^2 + 5)^6 \right] \quad \ln(uv) = \ln u + \ln v \\ \ln(u^n) = n \ln u &= \ln x^2 + \ln(x + 3)^4 + \ln(x^2 + 5)^6 \\ &= 2 \ln x + 4 \ln(x + 3) + 6 \ln(x^2 + 5) \end{aligned}$$

ขั้นตอนที่ 2 หาอนุพันธ์เทียบตัวแปร x ทั้งสมการ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\ln y) &= 2 \frac{d}{dx}(\ln x) + 4 \frac{d}{dx} \left[\ln(x + 3) \right] + 6 \frac{d}{dx} \left[\ln(x^2 + 5) \right] \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= 2 \cdot \frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{x + 3} \cdot \frac{d}{dx}(x + 3) + 6 \cdot \frac{1}{x^2 + 5} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 5) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{x + 3} \cdot (1) + 6 \cdot \frac{1}{x^2 + 5} \cdot (2x) \\ &= \frac{2}{x} + \frac{4}{x + 3} + \frac{12x}{x^2 + 5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad \frac{dy}{dx} &= y \left[\frac{2}{x} + \frac{4}{x+3} + \frac{12x}{x^2+5} \right] \\
 &= x^2(x+3)^4(x^2+5)^6 \left[\frac{2}{x} + \frac{4}{x+3} + \frac{12x}{x^2+5} \right] \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

$$2) \quad y = \frac{\sqrt{x-7}(3x-5)^7}{\sqrt[3]{2x+9}}$$

วิธีทำ จัดรูป $y = (x-7)^{1/2}(3x-5)^7(2x+9)^{-1/3}$

ขั้นตอนที่ 1 ทำการหาลอการิทึมฐาน e ทั้งสมการ

$$\ln(uv) = \ln u + \ln v$$

$$\ln y = \ln \left[(x-7)^{1/2}(3x-5)^7(2x+9)^{-1/3} \right]$$

$$\ln(u^n) = n \ln u$$

$$= \ln(x-7)^{1/2} + \ln(3x-5)^7 + \ln(2x+9)^{-1/3}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x-7) + 7 \ln(3x-5) - \frac{1}{3} \ln(2x+9)$$

ขั้นตอนที่ 2 หาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x ทั้งสมการ

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln(x-7) + 7 \frac{d}{dx} \ln(3x-5) - \frac{1}{3} \frac{d}{dx} \ln(2x+9)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-7} \cdot \frac{d}{dx}(x-7) + 7 \cdot \frac{1}{3x-5} \cdot \frac{d}{dx}(3x-5)$$

$$- \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2x+9} \cdot \frac{d}{dx}(2x+9)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-7} \cdot (1) + 7 \cdot \frac{1}{3x-5} \cdot (3) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2x+9} \cdot (2)$$

$$= \frac{1}{2(x-7)} + \frac{21}{3x-5} + \frac{2}{3(2x+9)}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{dy}{dx} = y \left[\frac{1}{2(x-7)} + \frac{21}{3x-5} + \frac{2}{3(2x+9)} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{x-7}(3x-5)^7}{\sqrt[3]{2x+9}} \left[\frac{1}{2(x-7)} + \frac{21}{3x-5} + \frac{2}{3(2x+9)} \right] \quad \blacksquare$$

3.7.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Derivative of exponential functions)

ฟังก์ชันเลขชี้กำลังคือฟังก์ชันที่อยู่ในลักษณะของตัวยกกำลังเป็นตัวแปรอิสระ x โดยมีลักษณะฟังก์ชันคือ $y = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ฟังก์ชันเลขชี้กำลังเป็นฟังก์ชันที่มีการใช้งานอย่างมากมายในทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรม เศรษฐศาสตร์ และสาขาอื่น ๆ โดยฟังก์ชันเลขชี้กำลังที่มักพบเจอจะมีตัวฐานเป็น e และอยู่ในรูป $y = e^x$ เมื่อ e มีค่าประมาณ 2.71828...

ในหัวข้อนี้จะศึกษาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ผู้เรียนสามารถศึกษารายละเอียดพื้นฐานของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง รวมถึงคุณสมบัติเพิ่มเติมได้ที่ภาคผนวกท้ายเล่ม

ทฤษฎีบท 3.9 (อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง) สำหรับ $a > 0$ และ $a \neq 1$

1. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln a$
2. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

พิสูจน์ ดูภาคผนวก ■

หมายเหตุ จากกฎลูกโซ่ สามารถเขียนในรูปแบบทั่วไปของสูตรการหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

รูปฟังก์ชันของ x	รูปแบบทั่วไป
1. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln a$	$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$

นอกจากนี้ ยังสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันยกกำลังฟังก์ชันได้ โดยอาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.10 ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x

$$\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ดูภาคผนวก ■

ตัวอย่าง 3.21 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $y = 5^{\sqrt{x}}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}(5^{\sqrt{x}})$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(a^u), u = \sqrt{x}$$

$$= 5^{\sqrt{x}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= 5^{\sqrt{x}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{5^{\sqrt{x}} \ln 5}{2\sqrt{x}}$$

■

2) $y = 2^{\ln x}(3x + 7)$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx} [2^{\ln x}(3x + 7)]$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(uv), u = 2^{\ln x}, v = 3x + 7$$

$$= 2^{\ln x} \frac{d}{dx}(3x + 7) + (3x + 7) \frac{d}{dx}(2^{\ln x})$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(a^u), u = \ln x$$

$$= 2^{\ln x} \cdot (3) + (3x + 7) \cdot 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$= 3 \cdot 2^{\ln x} + (3x + 7) \cdot 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 3 \cdot 2^{\ln x} + \frac{(3x + 7) \cdot 2^{\ln x} \cdot \ln 2}{x}$$

■

3) $y = (2e)^{\ln(3x-2)}$

วิธีทำ จาก

$$y$$

$$= (2e)^{\ln(3x-2)}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$= 2^{\ln(3x-2)} \cdot e^{\ln(3x-2)}$$

$$e^{\ln u} = u$$

$$= 2^{\ln(3x-2)}(3x - 2)$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(uv), u = 2^{\ln(3x-2)}, v = 3x - 2$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx} [2^{\ln(3x-2)}(3x - 2)]$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(a^u), u = \ln(3x - 2)$$

$$= 2^{\ln(3x-2)} \frac{d}{dx}(3x - 2) + (3x - 2) \frac{d}{dx} [2^{\ln(3x-2)}]$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 2^{\ln(3x-2)} \cdot (3) + (3x-2) \cdot 2^{\ln(3x-2)} \cdot \ln 2 \cdot \frac{d}{dx} [\ln(3x-2)] \\
&= 3 \cdot 2^{\ln(3x-2)} + (3x-2) \cdot 2^{\ln(3x-2)} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{3x-2} \frac{d}{dx} (3x-2) \\
&= 3 \cdot 2^{\ln(3x-2)} + (3x-2) \cdot 2^{\ln(3x-2)} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{3x-2} (3) \\
&= 3 \cdot 2^{\ln(3x-2)} + \frac{3(3x-2) \cdot 2^{\ln(3x-2)} \cdot \ln 2}{3x-2}
\end{aligned}$$

4) $y = \frac{e^{2x}}{\log 3x}$ เมื่อ $x = 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{2x}}{\log 3x} \right) \\
&= \frac{\log 3x \frac{d}{dx} (e^{2x}) - e^{2x} \frac{d}{dx} (\log 3x)}{(\log 3x)^2} \\
&= \frac{\log 3x \cdot e^{2x} \cdot \frac{d}{dx} (2x) - e^{2x} \cdot \frac{1}{3x} \cdot \log e \frac{d}{dx} (3x)}{(\log 3x)^2} \\
&= \frac{\log 3x \cdot e^{2x} \cdot (2) - e^{2x} \cdot \frac{1}{3x} \cdot \log e \cdot (3)}{(\log 3x)^2} \\
&= \frac{2e^{2x} \log 3x - \frac{e^{2x} \log e}{x}}{(\log 3x)^2}
\end{aligned}$$

ที่จุด $x = 1$ จะได้ว่า

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \frac{2e^2 \log 3 - e^2 \log e}{(\log 3)^2}$$

5) $y = x^{\sqrt{x}}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (x^{\sqrt{x}}) \\
&= \sqrt{x} \cdot x^{\sqrt{x}-1} \frac{dx}{dx} + x^{\sqrt{x}} \ln x \frac{d}{dx} \sqrt{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \sqrt{x} \cdot x^{\sqrt{x}-1}(1) + x^{\sqrt{x}} \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= \sqrt{x} \cdot x^{\sqrt{x}-1} + \frac{x^{\sqrt{x}} \ln x}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 3.22 กำหนดให้ $y = \ln 3x + e^{2x}$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

วิธีทำ จาก $y = \ln 3x + e^{2x}$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\ln 3x + e^{2x}) \\
 \text{สูตร } \frac{d}{dx}(\ln u), u = 3x & \quad \frac{d}{dx}(e^u), u = 2x \\
 &= \frac{d}{dx}(\ln 3x) + \frac{d}{dx}(e^{2x}) \\
 &= \frac{1}{3x} \frac{d}{dx}(3x) + e^{2x} \frac{d}{dx}(2x) \\
 &= \frac{1}{3x}(3) + e^{2x}(2) \\
 &= \frac{1}{x} + 2e^{2x} \\
 &= x^{-1} + 2e^{2x} \\
 \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(x^{-1} + 2e^{2x}) \\
 &= \frac{d}{dx}(x^{-1}) + 2 \frac{d}{dx}(e^{2x}) \quad \frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2e^{2x} \\
 &= (-1)x^{-2} + 2(2e^{2x}) \\
 &= -x^{-2} + 4e^{2x} \\
 &= -\frac{1}{x^2} + 4e^{2x}
 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 3.23 กำหนดให้ $e^y + \frac{x}{y} = 0$ เมื่อ y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด

(1,1)

วิธีทำ หาอนุพันธ์เทียบตัวแปร x ทั้งสมการ

จาก $\frac{d}{dx}(e^u), u = y$

$$e^y + \frac{x}{y} = 0$$

สูตร $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right), u = x, v = y$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}(e^y) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$e^y \frac{d}{dx}(y) + \frac{1}{y^2} \left[y \frac{d}{dx}(x) - x \frac{d}{dx}(y) \right] = 0$$

$$e^y \frac{dy}{dx} + \frac{y}{y^2} - \frac{x}{y^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$e^y \frac{dy}{dx} - \frac{x}{y^2} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y}$$

$$\left(e^y - \frac{x}{y^2} \right) \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{y}}{e^y - \frac{x}{y^2}}$$

$$\text{ที่จุด } (1,1), \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1)} = \frac{-\frac{1}{1}}{e^1 - \frac{1}{1^2}}$$

$$= -\frac{1}{e-1}$$

■

3.7.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Derivatives of trigonometric function)

ฟังก์ชันตรีโกณมิติถือเป็นฟังก์ชันที่ใช้งานในวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมค่อนข้างมากมาย การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติถือเป็นสิ่งสำคัญในทางแคลคูลัส นอกจากนี้ยังนำไปสู่การแก้ปัญหาที่น่าสนใจมากมายในทางวิทยาศาสตร์และทางวิศวกรรม

ในหัวข้อนี้จะศึกษาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 6 ตัว ได้แก่ไซน์ โคไซน์ แทนเจนต์ โคแทนเจนต์ เซแคนต์ และโคเซแคนต์ ผู้เรียนสามารถศึกษารายละเอียดพื้นฐานของฟังก์ชันตรีโกณมิติ รวมถึงคุณสมบัติเพิ่มเติมได้ที่ภาคผนวกท้ายเล่ม ในที่นี้จะพิจารณาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยมีหน่วยในการวัดเป็นเรเดียน

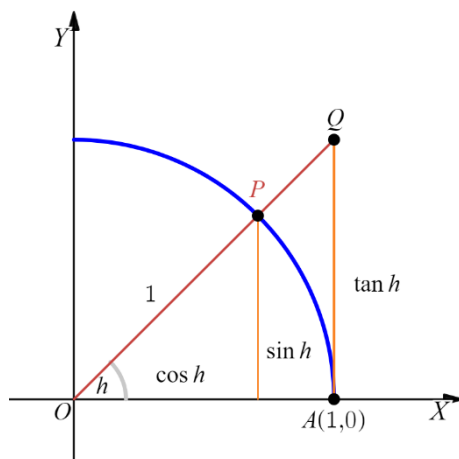
ก่อนที่จะพิสูจน์อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ควรต้องรู้ก่อน

คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ และ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$ ซึ่งแสดงดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.24 จงแสดงว่า $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

วิธีทำ สมมติให้ $0 < h < \frac{\pi}{2}$ พิจารณาการตัดกันของเส้นตรงกับกราฟวงกลม 1 หน่วย และมุม h

แสดงดังรูป 3.2



รูป 3.2 กราฟแสดงการตัดกันของเส้นตรงกับกราฟวงกลม 1 หน่วย

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากรูป 3.2 จะได้ว่า

$$0 < \text{พื้นที่ } \triangle OAP < \text{พื้นที่ของส่วนวง } \triangle OAP < \text{พื้นที่ } \triangle OAQ$$

$$\text{เนื่องจาก} \quad \text{พื้นที่ } \triangle OAP = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} = \frac{1}{2}(1) \sin h = \frac{1}{2} \sin h$$

$$\text{พื้นที่ของส่วนวง } \triangle OAP = \frac{1}{2} \times \text{รัศมี}^2 \times h = \frac{1}{2}(1)^2 h = \frac{1}{2} h$$

$$\text{พื้นที่ } \triangle OAQ = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} = \frac{1}{2}(1) \tan h = \frac{1}{2} \tan h$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad 0 < \frac{1}{2} \sin h < \frac{1}{2} h < \frac{1}{2} \tan h = \frac{1}{2} \frac{\sin h}{\cos h}$$

เมื่อ $h \neq 0$ นำ $\frac{2}{\sin h}$ คูณตลอด ดังนั้น

$$\text{จะได้ว่า} \quad 1 < \frac{h}{\sin h} < \frac{1}{\cos h}$$

เนื่องจาก $0 < h < \frac{\pi}{2}$ ดังนั้นกลับเศษเป็นส่วนได้คือ

$$\text{จะได้ว่า} \quad \cos h < \frac{\sin h}{h} < 1$$

เนื่องจาก $\lim_{h \rightarrow 0} \cos h = 1$ และ $\lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$

โดยทฤษฎีบทแซนวิส จะได้ว่า $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ ■

ตัวอย่าง 3.25 จงแสดงว่า $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = \frac{1 - \cos 0}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

ต้องแก้ปัญหาดังนี้โดยใช้ $1 + \cos h$ คูณทั้งเศษและส่วน ดังนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} \cdot \frac{1 + \cos h}{1 + \cos h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 h}{h(1 + \cos h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h(1 + \cos h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{1 + \cos h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{1 + \cos h} \right) \\
 &= (1) \frac{0}{0 + 1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$ ■

ทฤษฎีบท 3.11 (อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ)

1. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
2. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
3. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
4. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
5. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$
6. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$

พิสูจน์ ดูภาคผนวก ■

หมายเหตุ จากกฎลูกโซ่ สามารถเขียนในรูปแบบทั่วไปของสูตรการหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

รูปฟังก์ชันของ x	รูปแบบทั่วไป
1. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$	$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$

รูปฟังก์ชันของ x	รูปแบบทั่วไป
5. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$	$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \cdot \tan u \cdot \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cdot \cot u \cdot \frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 3.26 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $y = \sin \sqrt{\ln x}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin \sqrt{\ln x})$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(\sin u), u = \sqrt{\ln x}$$

$$= \cos \sqrt{\ln x} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{\ln x}$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx} \sqrt{u}, u = \ln x$$

$$= \cos \sqrt{\ln x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$= \cos \sqrt{\ln x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\cos \sqrt{\ln x}}{2x\sqrt{\ln x}}$$

■

2) $y = \cos(2^{\ln x})$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\cos(2^{\ln x})]$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(\cos u), u = 2^{\ln x}$$

$$= -\sin(2^{\ln x}) \cdot \frac{d}{dx}(2^{\ln x})$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(a^u), u = \ln x$$

$$= -\sin(2^{\ln x}) \cdot 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$= -\sin(2^{\ln x}) \cdot 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{\sin(2^{\ln x}) \cdot 2^{\ln x} \cdot \ln 2}{x}$$

■

$$3) \quad y = \frac{2x}{\sin \pi x}$$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2x}{\sin \pi x} \right)$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right), u = 2x, v = \sin \pi x$$

$$= \frac{\sin \pi x \cdot \frac{d}{dx}(2x) - 2x \cdot \frac{d}{dx}(\sin \pi x)}{(\sin \pi x)^2}$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(\sin u), u = \pi x$$

$$= \frac{\sin \pi x \cdot (2) - 2x \cdot \cos \pi x \cdot \frac{d}{dx}(\pi x)}{\sin^2 \pi x}$$

$$= \frac{2 \sin \pi x - 2x \cdot \cos \pi x \cdot (\pi)}{\sin^2 \pi x}$$

$$= \frac{2 \sin \pi x - 2\pi x \cdot \cos \pi x}{\sin^2 \pi x}$$

$$= \frac{2 \sin \pi x}{\sin^2 \pi x} - \frac{2\pi x \cdot \cos \pi x}{\sin^2 \pi x}$$

$$\text{cosec } \pi x = \frac{1}{\sin \pi x}$$

$$\frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \cot \pi x$$

$$= \frac{2}{\sin \pi x} - 2\pi x \cdot \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} \cdot \frac{1}{\sin \pi x}$$

$$= 2 \operatorname{cosec} \pi x - 2\pi x \cot \pi x \operatorname{cosec} \pi x$$

■

$$4) \quad y = e^x \tan^2 x$$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x \tan^2 x)$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(uv), u = e^x, v = \tan^2 x$$

$$= e^x \cdot \frac{d}{dx}(\tan^2 x) + \tan^2 x \cdot \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(u^n), u = \tan x$$

$$= e^x \cdot 2 \tan x \cdot \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan^2 x \cdot (e^x)$$

$$= 2e^x \tan x \sec^2 x + e^x \tan^2 x$$

$$= 2e^x \tan x (1 + \tan^2 x) + e^x \tan^2 x$$

$$= 2e^x \tan x + 2e^x \tan^3 x + e^x \tan^2 x$$

$$= 2e^x \tan x + e^x \tan^2 x + 2e^x \tan^3 x$$

■

5) $y = \sin(\ln \cos x)$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [\sin(\ln \cos x)]$$

$$= \cos(\ln \cos x) \cdot \frac{d}{dx} (\ln \cos x)$$

$$= \cos(\ln \cos x) \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{d}{dx} (\cos x)$$

$$= \cos(\ln \cos x) \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)$$

$$= -\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos(\ln \cos x)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= -\tan x \cdot \cos(\ln \cos x)$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx} (\sin u), u = \ln \cos x$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx} (\ln u), u = \cos x$$

6) $y = \tan(\cot x)$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [\tan(\cot x)]$$

$$= \sec^2(\cot x) \cdot \frac{d}{dx} (\cot x)$$

$$= \sec^2(\cot x) \cdot (-\operatorname{cosec}^2 x)$$

$$= -\operatorname{cosec}^2 x \cdot \sec^2(\cot x)$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx} (\tan u), u = \cot x$$

ตัวอย่าง 3.27 กำหนดให้ $f(x) = \sin 2x$ จงหา $f^{(4)}(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \sin 2x$

ดังนั้น $f'(x) = \frac{d}{dx} (\sin 2x)$

$$= \cos 2x \cdot \frac{d}{dx} (2x)$$

$$= \cos 2x \cdot (2)$$

$$= 2 \cos 2x$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx} (\sin u), u = 2x$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 2 \frac{d}{dx}(\cos 2x) \quad \text{สูตร } \frac{d}{dx}(\cos u), u = 2x \\
 &= 2(-\sin 2x) \frac{d}{dx}(2x) \\
 &= 2(-\sin 2x)(2) \\
 &= -4 \sin 2x \\
 f'''(x) &= -4 \frac{d}{dx}(\sin 2x) \quad \frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2 \cos 2x \\
 &= -4(2 \cos 2x) \\
 &= -8 \cos 2x \\
 f^{(4)}(x) &= -8 \frac{d}{dx}(\cos 2x) \quad \frac{d}{dx}(\cos 2x) = -2 \sin 2x \\
 &= -8(-2 \sin 2x) \\
 &= 16 \sin 2x
 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 3.28 กำหนดให้ $\sin x - \cos y = xy$ เมื่อ y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x จงหา

$$\frac{dy}{dx}$$

วิธีทำ หาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x ทั้งสมการ

$$\begin{aligned}
 \text{จาก} \quad \sin x - \cos y &= xy \\
 \text{ดังนั้น} \quad \frac{d}{dx}(\sin x) - \frac{d}{dx}(\cos y) &= \frac{d}{dx}(xy) \quad \text{สูตร } \frac{d}{dx}(uv), u = x, v = y \\
 \cos x - (-\sin y) \frac{dy}{dx} &= x \frac{d}{dx}(y) + y \frac{d}{dx}(x) \\
 \cos x + \sin y \frac{dy}{dx} &= x \frac{dy}{dx} + y(1) \\
 \sin y \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} &= y - \cos x \\
 (\sin y - x) \frac{dy}{dx} &= y - \cos x \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{y - \cos x}{\sin y - x}
 \end{aligned}$$

■

3.7.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Derivatives of inverse of trigonometric function)

หลังจากที่ผู้เรียนได้ทำการศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติพื้นฐานกันไปแล้ว ในหัวข้อนี้จะศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ซึ่งมีทั้งหมด 6 ตัว ได้แก่ อาร์กไซน์ อาร์กโคไซน์ อาร์กแทนเจนต์ อาร์กโคแทนเจนต์ อาร์กเซแคนต์ และอาร์กโคเซแคนต์ ผู้เรียนสามารถศึกษารายละเอียดพื้นฐานของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน รวมถึงคุณสมบัติเพิ่มเติมได้ที่ภาคผนวกท้ายเล่ม

ทฤษฎีบท 3.12 (อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน)

1. $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$
2. $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$
3. $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$
4. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$
5. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$
6. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccosec} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$

พิสูจน์ ดูภาคผนวก ■

หมายเหตุ จากกฎลูกโซ่ สามารถเขียนในรูปแบบทั่วไปของสูตรการหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

รูปฟังก์ชันของ x	รูปแบบทั่วไป
1. $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$

รูปฟังก์ชันของ x	รูปแบบทั่วไป
4. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} u) = -\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccosec} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccosec} u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 3.29 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $y = \arcsin x^2$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}(\arcsin x^2)$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(\arcsin u), u = x^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} (2x)$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

■

2) $y = \operatorname{arccot}(\ln x)$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}[\operatorname{arccot}(\ln x)]$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} u), u = \ln x$$

$$= -\frac{1}{1+(\ln x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$= -\frac{1}{1+\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$$

■

3) $y = e^{x \arctan x}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(e^{x \arctan x}) && \boxed{\text{สูตร } \frac{d}{dx}(e^u), u = x \arctan x} \\
 &= e^{x \arctan x} \cdot \frac{d}{dx}(x \cdot \arctan x) && \boxed{\text{สูตร } \frac{d}{dx}(uv), u = x, v = \arctan x} \\
 &= e^{x \arctan x} \left[x \frac{d}{dx}(\arctan x) + \arctan x \frac{d}{dx}(x) \right] \\
 &= e^{x \arctan x} \left[x \cdot \frac{1}{1+x^2} + \arctan x \cdot (1) \right] \\
 &= e^{x \arctan x} \left[\frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right] \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

4) $y = e^x \operatorname{arcsec} 3x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(e^x \operatorname{arcsec} 3x) && \boxed{\text{สูตร } \frac{d}{dx}(e^u), u = e^x, v = \operatorname{arcsec} 3x} \\
 &= e^x \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} 3x) + \operatorname{arcsec} 3x \cdot \frac{d}{dx}(e^x) \\
 &= e^x \cdot \frac{1}{3x\sqrt{(3x)^2 - 1}} \frac{d}{dx}(3x) + \operatorname{arcsec} 3x \cdot (e^x) && \boxed{\text{สูตร } \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} u), u = 3x} \\
 &= e^x \cdot \frac{1}{3x\sqrt{9x^2 - 1}} (3) + e^x \operatorname{arcsec} 3x \\
 &= \frac{e^x}{x\sqrt{9x^2 - 1}} + e^x \operatorname{arcsec} 3x \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

สรุปเนื้อหาในบทที่ 3

อนุพันธ์ของฟังก์ชันคือการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ณ จุดใดจุดหนึ่ง หรือในอีกมุมมองหนึ่งคือการหาความชันของเส้นสัมผัสโค้ง ณ จุดที่พิจารณา

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต หรือการหาอนุพันธ์เบื้องต้นจะมีสูตรพื้นฐาน เช่น อนุพันธ์ของค่าคงที่ อนุพันธ์ของการบวก อนุพันธ์ของการลบ อนุพันธ์ของการคูณ อนุพันธ์ของการหาร อนุพันธ์ของค่าคงที่คูณฟังก์ชัน ค่าคงที่การยกกำลัง อนุพันธ์ของรากต่าง ๆ

ในส่วนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย จะใช้พื้นฐานของการหาอนุพันธ์เบื้องต้นมาช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัยที่อยู่ในรูปของการดำเนินการต่าง ๆ ได้

เนื่องจากฟังก์ชันที่ซับซ้อน สามารถเขียนในรูปของฟังก์ชันประกอบได้ เพื่อความสะดวกในการใช้งานสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ สามารถใช้กฎลูกโซ่เข้ามาจัดรูปสูตรต่าง ๆ ให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปของสูตรการหาอนุพันธ์ได้

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันใด ๆ จะเห็นว่าอนุพันธ์ที่หาได้ยังคงเป็นฟังก์ชัน นั่นคือสามารถนำอนุพันธ์ของฟังก์ชันดังกล่าวมาหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปได้อีก จะเรียกอนุพันธ์ที่ถูกลำซ้ำ ๆ ว่าอนุพันธ์อันดับสูง

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $y = 3x^3 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{x} + 4$

1.2 $y = 4\sqrt{1-x^3}$

1.3 $y = x^2(x-4)^5$

1.4 $y = \frac{1}{(3x+1)^5}$

1.5 $s = (8-7t)(t^2-2)$

1.6 $y = (x-9)(3x+2)$

1.7 $y = \frac{x+2}{x-1}$

1.8 $w = \frac{x^2-9}{x+3}$

2. กำหนดให้ $f(x) = \frac{12-x^4}{4}$ จงหา $f'(3)$ 3. กำหนดให้ $g(x) = (2x-1)(x^2+3)$ จงหา $g'(0)$

4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

4.1 $y = \log x^4$

4.2 $y = x^2 \log_3(x^2+3)$

4.3 $y = x \ln x$

4.4 $y = \ln \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)$

4.5 $y = \ln \left[x^2(2x-1)^3 \right]$

4.6 $y = \log_4 \left(\frac{x^3(3x^2+2)}{1-x^3} \right)$

4.7 $y = x^3(x^2+1)^2(x-1)^5$

4.8 $y = \frac{x^4(x-1)}{(x+2)(x^2+1)}$

4.9 $y = \sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}$

4.10 $y = \frac{(2x-3)\sqrt{x^2-2}}{\sqrt[3]{3x-5}}$

5. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

5.1 $y = \ln(x+e^x)$

5.2 $y = 4^{6x^2-1}$

5.3 $y = e^{\log(x^2+4)}$

5.4 $y = x^2 e^{x^2}$

5.5 $y = 7^{-x} - e^{-x}$

5.6 $y = \frac{e^{x^2-2x+3}}{x-1}$

6. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$6.1 \quad y = \tan x \cot x$$

$$6.2 \quad y = \sin^2 x$$

$$6.3 \quad w = s^2 \cos(s^2 + 1)$$

$$6.4 \quad u = 10^x \tan \pi x$$

$$6.5 \quad v = \sec^3(2t - 1)$$

$$6.6 \quad y = \sin(\ln \cos \pi x)$$

$$6.7 \quad u = e^{2x} \operatorname{cosec}(1 - x)$$

$$6.8 \quad z = \sin^5(\ln 5t)$$

$$6.9 \quad y = \sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$6.10 \quad y = \cot(e^x + 1)$$

7. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$7.1 \quad y = \arcsin^2 x$$

$$7.2 \quad y = \arccos(\ln t)$$

$$7.3 \quad y = e^x \arcsin 3x$$

$$7.4 \quad u = x^2 \operatorname{arcsec} x$$

$$7.5 \quad v = \arctan(\ln 7x)$$

$$7.6 \quad y = \ln(\arcsin 2x)$$

8. กำหนดให้ $y = u^2 - u$, $u = x - x^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

9. กำหนดให้ $w = u^2$, $u = \frac{t+1}{t-1}$ จงหา $\frac{dw}{dt}$ เมื่อ $t = 3$

10. กำหนดให้ $w = u^2 + 1$, $u = 2x^2 + 5$, $x = 3t + 7$ จงหา $\frac{dw}{dt}$

11. กำหนดให้ $y = 2t^2 + 5$, $x = 3t - 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

12. กำหนดให้ $y = \sin 2u$, $u = e^{3t-2}$ จงหา $\frac{dy}{dt}$

13. กำหนดให้ $y = 7^{3u}$, $u = \sqrt{x}$, $x = \log t^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

14. กำหนดให้ $3y^4 - 5xy = 2$ โดยที่ y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x จงหา $\frac{dy}{dx}$

15. กำหนดให้ $x^3 + y^3 - 12xy = 0$ โดยที่ y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x จงหา $\frac{dy}{dx}$

16. กำหนดให้ $2xy + y^2 = 0$ โดยที่ y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด

$(1, -2)$

17. กำหนดให้ $\ln xy = \sin xy^2$ โดยที่ y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x จงหา $\frac{dy}{dx}$

18. กำหนดให้ $e^y + \log(x + y) = 3x$ โดยที่ y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x จงหา $\frac{dy}{dx}$

19. กำหนดให้ $\tan e^y - 2xy = e^{\sin y}$ โดยที่ y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x จงหา $\frac{dy}{dx}$
20. กำหนดให้ $y = x^4 - 4x^3 + 5x$ จงหา y'''
21. กำหนดให้ $y = \frac{x+1}{x-1}$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$
22. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{1-x}$ จงหา $f'''(x)$
23. กำหนดให้ $y = xe^x$ จงหา y'''
24. กำหนดให้ $y = \arctan x$ จงหา y''
25. กำหนดให้ $y = \log x^2$ จงหา $y^{(4)}$
26. กำหนดให้ $f(x) = \cos(1-2x)$ จงหา $f^{(4)}(x)$

เอกสารอ้างอิง

- ณรงค์ฤทธิ์ แก้วบรรจกร. (2557). *แคลคูลัสหนึ่งตัวแปร*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- นนุช สุขวารี, พชร เลิศวิจิตรศิลป์, กนกรัตน์ เสวตเศรณี, พันทิพย์ โตแก้ว, กันตภณ คูหาพัฒนกุล และกันย์ สุ่นยี่ขัน. (2556). *คณิตศาสตร์วิศวกรรม 1*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แสงสว่างเวิลด์เพรสจำกัด.
- ภัทราวดี ประเสริฐสังข์. (2563). *แคลคูลัสเบื้องต้น*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- มนัส ประสงค์. (2535). *แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 1*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.
- ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). *ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน*. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สหมิตรพรินต์ติ้ง.
- วิริยะ ศิริขานนท์. (มปป). *แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร*. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.
- สุชัย ตันยอัชฌาณ, นนนุช สุขวารี, ณรงค์ฤทธิ์ แก้วบรรจกร, ปรียาวัลย์ คูหา, สุรรัตน์ อาริรักษ์สกุล ก้องโลก. (2556). *แคลคูลัส 1*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ แสงสว่างเวิลด์เพรส จำกัด.
- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus* (10th ed.). John Wiley & Sons. Ltd., New York, U.S.A.
- Desmos. (n.d.). *Graphing Calculator*. <https://www.desmos.com/calculator>
- Thomas, G. B., Jr., Weir, M. D., & Hass, J. R. (2013). *Thomas' calculus: Early transcendentals* (13th ed.). Pearson.
- William L. Briggs, Denver L. Cochran and Eric L. Schulz. (2013). *Calculus for Scientists and Engineers*. (1st ed.). Pearson Education, Inc., USA

บทที่ 4

การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

อนุพันธ์ของฟังก์ชันคือแนวคิดพื้นฐานในการศึกษาแคลคูลัส ซึ่งอธิบายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ณ จุดใดจุดหนึ่ง โดยที่อนุพันธ์ของฟังก์ชันถูกนำไปประยุกต์ใช้ในหลากหลายสาขา ในบทนี้จะศึกษาถึงการนำอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาประยุกต์ใช้ในหลากหลายสาขา ดังนั้นผู้เรียนควรที่จะศึกษาการหาอนุพันธ์โดยใช้สูตรให้ชำนาญ เพื่อที่จะศึกษาต่อยอดในส่วนของการประยุกต์ได้ดียิ่งขึ้น

4.1 รูปแบบยังไม่กำหนด (Indeterminate forms)

รูปแบบยังไม่กำหนด คือรูปจำกัดของฟังก์ชัน ซึ่งไม่สามารถกำหนดค่าที่แน่นอนได้ โดยมีรูปแบบยังไม่กำหนดทั้งหมด 7 รูปแบบ คือ $\frac{0}{0}$, $\pm \frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 และ 1^∞

4.1.1 กฎของโลปีตาล (L'Hôpital's rule)

ในการหาขีดจำกัดที่อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด จะใช้การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชันเข้ามาช่วยเพื่อหาค่าของขีดจำกัด เรียกว่ากฎของโลปีตาล (L'Hôpital's rule: L-R) ดังทฤษฎีบท 4.1

ทฤษฎีบท 4.1 กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่า x บนช่วงเปิด (a, b) ยกเว้นที่จุด $x = c$ ซึ่ง

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \quad \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$$

ถ้า $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\pm \frac{\infty}{\infty}$ แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{L-R}}{=} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

หมายเหตุ กรณีที่ใช้กฎของโลปีตาลแล้ว ค่าของขีดจำกัดยังอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\pm \frac{\infty}{\infty}$ สามารถใช้กฎของโลปีตาลซ้ำได้

ตัวอย่าง 4.1 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

วิธีทำ จากโจทย์ $f(x) = \arcsin x$ และ $g(x) = x$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x = 0$ และ

$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ซึ่งลิมิตที่ต้องการหาอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{0}{0}$ โดยกฎของโลปีตาล จะ

ได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} & \stackrel{\text{L-R}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(\arcsin x)}{\frac{d}{dx}(x)} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} \\ & = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} \\ & = 1 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 4.2 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\tan \pi x}$

วิธีทำ จากโจทย์ $f(x) = \ln x$ และ $g(x) = \tan \pi x$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$ และ

$\lim_{x \rightarrow 1} \tan \pi x = 0$ ซึ่งลิมิตที่ต้องการหาอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{0}{0}$ โดยกฎของ

โลปีตาล จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\tan \pi x} & \stackrel{\text{L-R}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(\tan \pi x)} \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sec^2 \pi x \cdot \frac{d}{dx}(\pi x)} \end{aligned}$$

สูตร $\frac{d}{dx}(\tan u), u = \pi x$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\tan \pi x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\sec^2 \pi x \cdot (\pi)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\pi \sec^2 \pi x} \\
&= \frac{\frac{1}{1}}{\pi \sec^2 \pi} \quad \text{---} \boxed{\sec \pi = -1} \\
&= \frac{1}{\pi(-1)^2} \\
&= \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 4.3 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x \ln x}$

วิธีทำ จากโจทย์ $f(x) = e^x$ และ $g(x) = x \ln x$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ และ

$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln x = \infty$ ซึ่งลิมิตที่ต้องการหาอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{\infty}{\infty}$ โดยกฎของ

โลปีตาล จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x \ln x} &\stackrel{\text{L-R}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x \ln x)} \quad \text{---} \boxed{\text{สูตร } \frac{d}{dx}(uv), u = x, v = \ln x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \cdot \frac{d}{dx}(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot (1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1 + \ln x}
\end{aligned}$$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1 + \ln x}$ ซึ่งลิมิตที่ต้องการหาอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{\infty}{\infty}$ โดย

กฎของโลปีตาล จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1 + \ln x} &\stackrel{\text{LR}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(1 + \ln x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} x e^x \\
&= \infty
\end{aligned}$$

■

4.1.2 รูปแบบยังไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ และ $\infty - \infty$

รูปแบบยังไม่กำหนดที่อยู่ในรูป $0 \cdot \infty$ และ $\infty - \infty$ จะจัดรูปลิมิตให้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ก่อน แล้วจึงใช้กฎของโลปีตาลเพื่อหาค่าของลิมิต ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.4 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \operatorname{cosec} \pi x$

วิธีทำ จากโจทย์ $f(x) = x - 1$ และ $g(x) = \operatorname{cosec} \pi x$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ และ

$\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{cosec} \pi x = \infty$ ซึ่งลิมิตที่ต้องการหาอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $0 \cdot \infty$ ทำการ

จัดรูปใหม่

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \operatorname{cosec} \pi x &= \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \cdot \frac{1}{\sin \pi x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sin \pi x}
\end{aligned}$$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sin \pi x}$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{0}{0}$ โดยกฎของโลปีตาล จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sin \pi x} &\stackrel{\text{LR}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx}(x - 1)}{\frac{d}{dx}(\sin \pi x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos \pi x \cdot \frac{d}{dx}(\pi x)}
\end{aligned}$$

สูตร $\frac{d}{dx}(\sin u), u = \pi x$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sin \pi x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos \pi x \cdot (\pi)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\pi \cos \pi x} \\
&= \frac{1}{\pi(\cos \pi)} \\
&= \frac{1}{\pi(-1)} \\
&= -\frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 4.5 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} [\cot x - \operatorname{cosec} x]$

วิธีทำ จากโจทย์ $f(x) = \cot x$ และ $g(x) = \operatorname{cosec} x$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = \infty$ และ

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cosec} x = \infty$ ซึ่งลิมิตที่ต้องการหาอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\infty - \infty$ ทำการ

จัดรูปใหม่

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} [\cot x - \operatorname{cosec} x] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{\sin x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x}
\end{aligned}$$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x}$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{0}{0}$ โดยกฎของโลปีตาล จะ

ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x} &\stackrel{\text{L.R}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(\cos x - 1)}{\frac{d}{dx}(\sin x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x} \\
&= -\frac{0}{1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

4.1.3 รูปแบบยังไม่กำหนด 0^0 , ∞^0 หรือ 1^∞

รูปแบบยังไม่กำหนดที่อยู่ในรูป 0^0 , ∞^0 และ 1^∞ จะจัดรูปโดยใช้ฟังก์ชันลอการิทึม เพื่อให้อยู่ในรูป $0 \cdot \infty$ หรือ $\infty - \infty$ ก่อน แล้วใช้วิธีในหัวข้อที่ผ่านมา หรือจัดให้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ แล้วจึงใช้กฎของโลปิตาล ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.6 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

วิธีทำ จากโจทย์ $f(x) = x$ และ $g(x) = x$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ ซึ่งลิมิตที่ต้องการหาอยู่ใน

รูปแบบยังไม่กำหนดชนิด 0^0 ทำการจัดรูปใหม่

กำหนดให้ $y = x^x$

หาลอการิทึมฐาน e ทั้งสมการ

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln x^x && \text{---} \boxed{\ln u^n = n \ln u} \\ &= x \cdot \ln x \end{aligned}$$

หาลิมิต เมื่อ $x \rightarrow 0^+$ ทั้งสมการ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{\infty}{\infty}$ โดยกฎของโลปิตาล จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y &\stackrel{\text{L.R}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)} \\ \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} y \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x} \cdot x^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} y \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \\ &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} y &= e^0 \\ &= 1\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$ ■

ตัวอย่าง 4.7 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

วิธีทำ จากโจทย์ $f(x) = 1+x$ และ $g(x) = \frac{1}{x}$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x) = \infty$ และ

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ซึ่งลิมิตที่ต้องการหาอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด ∞^0 ทำการจัดรูปใหม่

กำหนดให้

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

หาลอการิทึมฐาน e ทั้งสมการ

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \boxed{\ln u^n = n \ln u} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)\end{aligned}$$

หาลิมิต เมื่อ $x \rightarrow \infty$ ทั้งสมการ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{x}$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{\infty}{\infty}$ โดยกฎของโลปิตาล จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln y) &\stackrel{\text{L-R}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} \ln(1+x)}{\frac{d}{dx} (x)} \quad \boxed{\text{สูตร } \frac{d}{dx} (\ln u), u = 1+x} \\ \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} y \right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x} \frac{d}{dx} (1+x)}{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln\left[\lim_{x \rightarrow \infty} y\right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} \\ &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} y &= e^0 \\ &= 1\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$ ■

ตัวอย่าง 4.8 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

วิธีทำ จากโจทย์ $f(x) = 1 + \sin x$ และ $g(x) = \frac{1}{x}$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x) = 1$ และ

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ ซึ่งลิมิตที่ต้องการหาอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด 1^∞ ทำการจัดรูปใหม่

กำหนดให้

$$y = (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

หาลอการิทึมฐาน e ทั้งสมการ

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad \left[\ln u^n = n \ln u \right] \\ &= \frac{1}{x} \cdot \ln(1 + \sin x)\end{aligned}$$

หาลิมิต เมื่อ $x \rightarrow 0^+$ ทั้งสมการ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\frac{0}{0}$ โดยกฎของโลปีตาล

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln y) &\stackrel{\text{L-R}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dx} \ln(1 + \sin x)}{\frac{d}{dx} (x)} \quad \left[\text{สูตร } \frac{d}{dx} (\ln u), u = 1 + \sin x \right] \\ \ln\left[\lim_{x \rightarrow 0^+} y\right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1 + \sin x} \frac{d}{dx} (1 + \sin x)}{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} y \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{1 + \sin x} \\ &= \frac{1}{1 + 0} \\ &= 1\end{aligned}$$

ดังนั้น

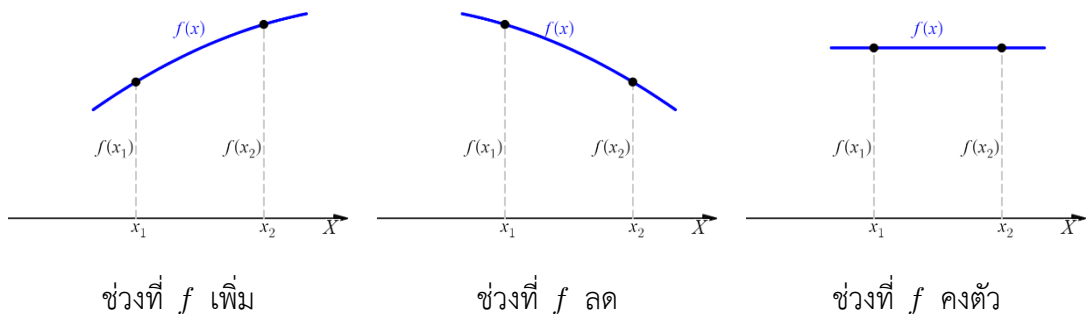
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} y &= e^1 \\ &= e\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e$ ■

4.2 การเขียนกราฟของฟังก์ชัน (Sketch graph of function)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการนำอนุพันธ์มาประยุกต์ใช้ในการเขียนกราฟของฟังก์ชัน โดยใช้ อนุพันธ์อันดับหนึ่งในการพิจารณาลักษณะกราฟช่วงที่เพิ่มขึ้นและช่วงที่ลดลง พิจารณาลักษณะกราฟ ช่วงที่เว้าขึ้นหรือช่วงเว้าลง นอกจากนี้ยังสามารถประยุกต์อนุพันธ์เพื่อนำมาหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันได้

4.2.1 ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด (Increasing and decreasing function)



รูป 4.1 กราฟแสดงฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด และฟังก์ชันคงตัว

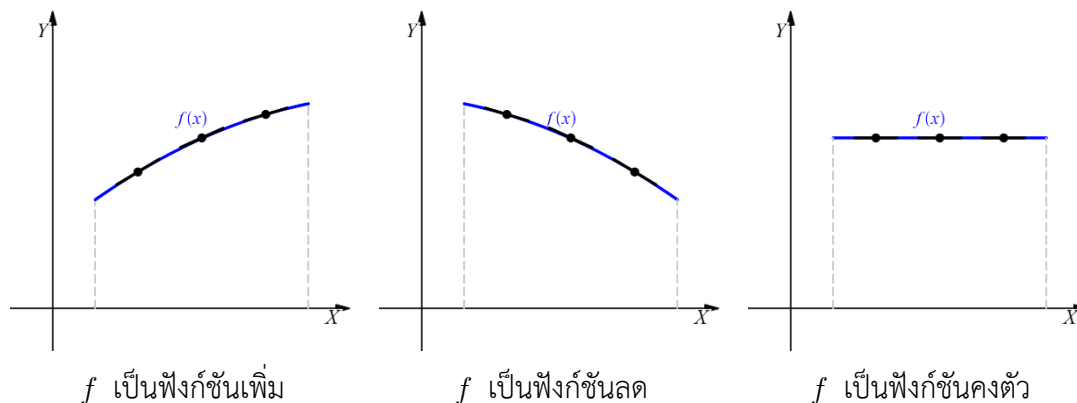
ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากรูป 4.1 จะได้ว่า

- f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วงใด ๆ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
- f เป็นฟังก์ชันลด บนช่วงใด ๆ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$
- f เป็นฟังก์ชันคงตัว บนช่วงใด ๆ ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว $f(x_1) = f(x_2)$

การทดสอบฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด ฟังก์ชันคงตัว โดยใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

พิจารณาเส้นสัมผัสโค้งบนกราฟที่เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด และฟังก์ชันคงตัว ดังรูป 4.2



รูป 4.2 กราฟแสดงเส้นสัมผัสโค้งบนฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด และฟังก์ชันคงตัว

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากรูป 4.2 สังเกตว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เส้นสัมผัสโค้งบนกราฟจะมีความชันเป็นบวก ถ้า f เป็นฟังก์ชันลด เส้นสัมผัสโค้งบนกราฟจะมีความชันเป็นลบ และถ้า f เป็นฟังก์ชันคงตัว เส้นสัมผัสโค้งบนกราฟจะมีความชันเป็น 0 ดังนั้น ผู้เรียนสามารถนำอนุพันธ์มาประยุกต์ในการหาฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด และฟังก์ชันคงตัวได้ ดังทฤษฎีบท 4.2

ทฤษฎีบท 4.2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้ทุกค่า x บนช่วงเปิด (a, b)

1. ถ้า $f'(x) > 0$ ทุกค่า $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงปิด $[a, b]$
2. ถ้า $f'(x) < 0$ ทุกค่า $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงปิด $[a, b]$
3. ถ้า $f'(x) = 0$ ทุกค่า $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วงปิด $[a, b]$

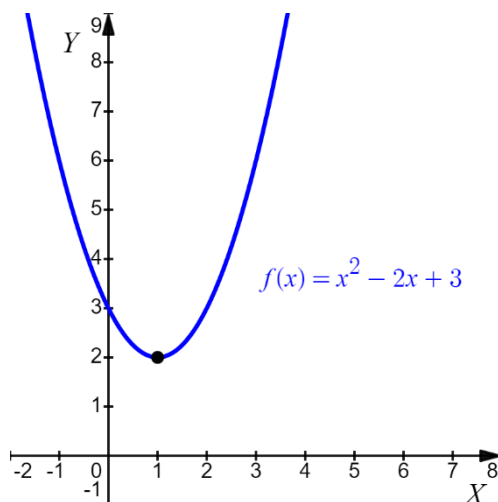
ตัวอย่าง 4.9 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2x + 3$ จงหาช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด หรือฟังก์ชันคงตัว

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f'(x) &= 2x - 2 \\ &= 2(x - 1) \end{aligned}$$

ช่วง	$2(x-1)$	$f'(x)$	สรุป
$x < 1$	(-)	(-)	f ลดลงบนช่วง $(-\infty, 1]$
$x > 1$	(+)	(+)	f เพิ่มขึ้นบนช่วง $[1, \infty)$

กราฟของฟังก์ชัน f แสดงได้ดังรูป 4.3



รูป 4.3 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 2x + 3$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

■

ตัวอย่าง 4.10 กำหนดให้ $f(x) = x^3$ จงหาช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด หรือ ฟังก์ชันคงตัว

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^3$

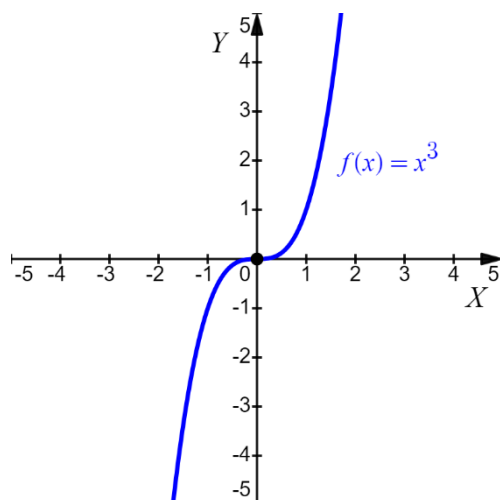
ดังนั้น $f'(x) = 3x^2$

ช่วง	$3x^2$	$f'(x)$	สรุป
$x < 0$	(+)	(+)	f เพิ่มขึ้นบนช่วง $(-\infty, 0]$
$x > 0$	(+)	(+)	f เพิ่มขึ้นบนช่วง $[0, \infty)$

เนื่องจาก f เพิ่มขึ้นบนช่วง $(-\infty, 0]$ และ $[0, \infty)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วง $(-\infty, \infty)$

กราฟของฟังก์ชัน f แสดงได้ดังรูป 4.4

รูป 4.4 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565) ■

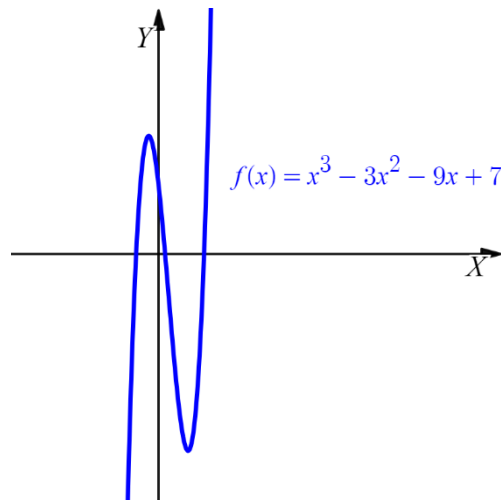
ตัวอย่าง 4.11 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ จงหาช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด หรือฟังก์ชันคงตัว

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \\ &= 3(x^2 - 2x - 3) \\ &= 3(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

ช่วง	$(x+1)(x-3)$	$f'(x)$	สรุป
$x < -1$	$(-)(-)$	$(+)$	f เพิ่มขึ้นบนช่วง $(-\infty, -1]$
$-1 < x < 3$	$(+)(-)$	$(-)$	f ลดลงบนช่วง $[-1, 3]$
$x > 3$	$(+)(+)$	$(+)$	f เพิ่มขึ้นบนช่วง $[3, \infty)$

กราฟของฟังก์ชัน f แสดงได้ดังรูป 4.5

รูป 4.5 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565) ■

4.2.2 ความเว้า และจุดเปลี่ยนเว้า (Concave and inflection point)

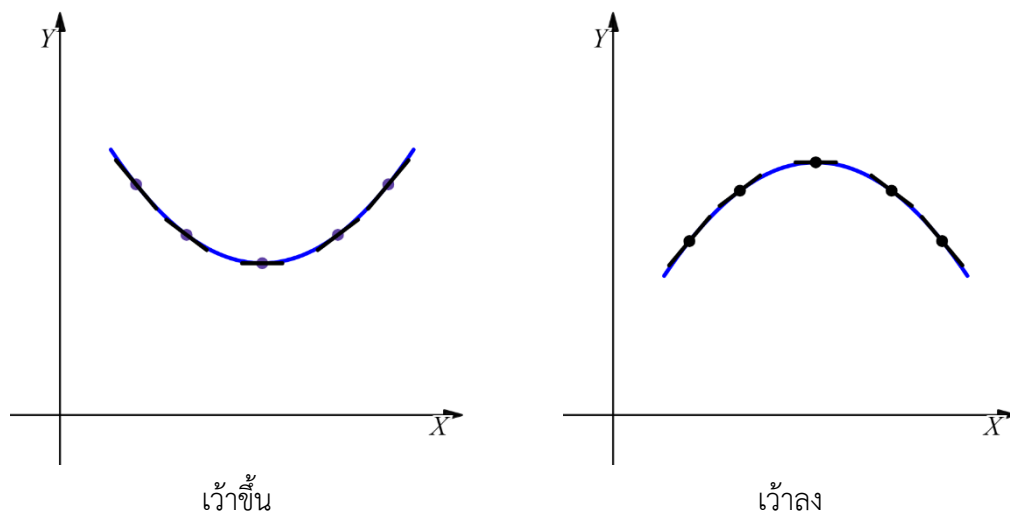
ในการพิจารณาช่วงที่เพิ่มหรือลดของฟังก์ชัน จะพบการเปลี่ยนลักษณะของกราฟจากฟังก์ชันเพิ่มไปเป็นฟังก์ชันลด หรือจากฟังก์ชันลดไปเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ลักษณะของกราฟที่เปลี่ยนเป็นลักษณะคล้ายตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวยูหาย (U) หรือตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวยูคว่ำ (∩) ดังนั้น จะนิยามลักษณะของกราฟดังนี้

บทนิยาม 4.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)

1. ถ้า f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงเปิด (a, b) จะกล่าวว่า f **เว้าขึ้น** (concave up) บนช่วงเปิด (a, b)
2. ถ้า f' เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงเปิด (a, b) จะกล่าวว่า f **เว้าลง** (concave down) บนช่วงเปิด (a, b)

หมายเหตุ ในการนิยามความเว้า บางตำราอาจนิยามแตกต่างกัน

กราฟแสดงการเว้าขึ้นและเว้าลงของฟังก์ชันแสดงได้ดังรูป 4.6



รูป 4.6 กราฟแสดงการเว้าขึ้นและเว้าลงของฟังก์ชัน

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

เนื่องจาก f'' เป็นอนุพันธ์ของ f' และ f' เป็นฟังก์ชัน โดยทฤษฎีบท 4.2 จะทำให้ได้การทดสอบความเว้าดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

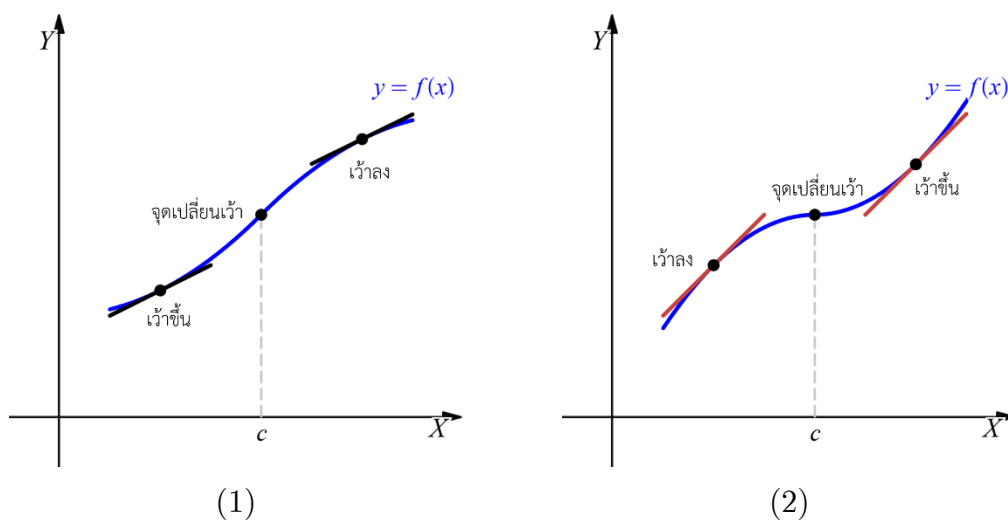
ทฤษฎีบท 4.3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)

1. ถ้า $f''(x) > 0$ ทุกค่า $x \in (a, b)$ แล้ว f เว้าขึ้นบนช่วงเปิด (a, b)
2. ถ้า $f''(x) < 0$ ทุกค่า $x \in (a, b)$ แล้ว f เว้าลงบนช่วงเปิด (a, b)

ในกรณีที่กราฟมีการเปลี่ยนเว้า โดยเปลี่ยนจากเว้าขึ้นเป็นเว้าลง และเปลี่ยนจากเว้าลงเป็นเว้าขึ้น จะนิยามจุดที่เปลี่ยนการเว้าของฟังก์ชันดังนี้

บทนิยาม 4.2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ ถ้า f เปลี่ยนความเว้าจากเว้าขึ้นเป็นเว้าลง หรือเปลี่ยนความเว้าจากเว้าลงเป็นเว้าขึ้น ที่จุด $x = c$ แล้วจะกล่าวว่าจุด $(c, f(c))$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า (inflection point) ของกราฟ f

กราฟแสดงจุดเปลี่ยนเว้าของฟังก์ชันแสดงได้ดังรูป 4.7



รูป 4.7 กราฟแสดงจุดเปลี่ยนเว้าของฟังก์ชัน

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ตัวอย่าง 4.12 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ จงหาช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด ช่วงที่เว้าขึ้น ช่วงที่เว้าลง และจุดเปลี่ยนเว้า

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x - 2)\end{aligned}$$

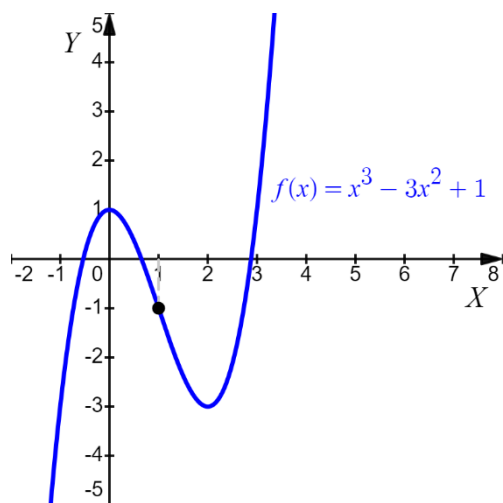
ช่วง	$3x(x - 2)$	$f'(x)$	สรุป
$x < 0$	$(-)(-)$	$(+)$	f เพิ่มขึ้นบนช่วง $(-\infty, 0]$
$0 < x < 2$	$(+)(-)$	$(-)$	f ลดลงบนช่วง $[0, 2]$
$x > 2$	$(+)(+)$	$(+)$	f เพิ่มขึ้นบนช่วง $[2, \infty)$

$$\begin{aligned}\text{และ } f''(x) &= 6x - 6 \\ &= 6(x - 1)\end{aligned}$$

ช่วง	$6(x - 1)$	$f''(x)$	สรุป
$x < 1$	$(-)$	$(-)$	f เว้าลงบนช่วง $(-\infty, 1)$
$x > 1$	$(+)$	$(+)$	f เว้าขึ้นบนช่วง $(1, \infty)$

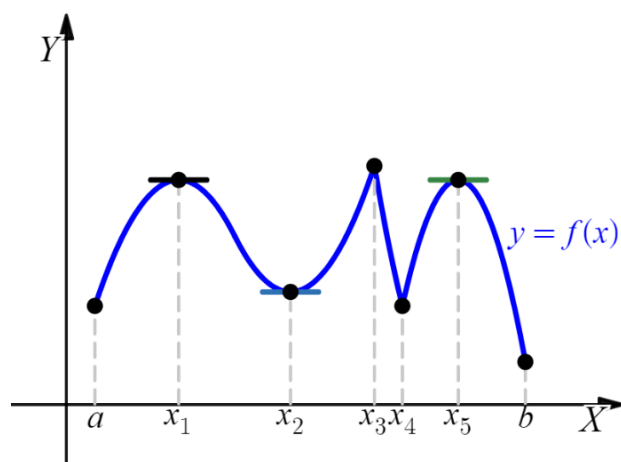
จะได้ว่าที่ $x = 1$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

กราฟของฟังก์ชัน f แสดงได้ดังรูป 4.8

รูป 4.8 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

4.2.3 ค่าสุดขีดของฟังก์ชัน (Extreme value of function)



รูป 4.9 กราฟแสดงค่าสุดขีดของฟังก์ชัน

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

พิจารณากราฟของฟังก์ชันดังรูป 4.9 จะสังเกตจุดที่อยู่บนยอด และจุดที่อยู่ด้านล่างในแต่ละช่วงที่พิจารณา จะนิยามจุดต่าง ๆ ดังนี้

บทนิยาม 4.3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ $c \in (a, b)$

1. f จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ที่จุด c บนช่วงปิด $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) \leq f(c)$ ทุกค่า $x \in [a, b]$
2. f จะมีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum) ที่จุด c บนช่วงปิด $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) \geq f(c)$ ทุกค่า $x \in [a, b]$

บทนิยาม 4.4 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ $c \in (a, b)$

1. $f(c)$ จะเรียกว่าค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ของ f ที่จุด c ก็ต่อเมื่อ $f(x) \leq f(c)$ ทุกค่า $x \in (a, b)$
2. $f(c)$ จะเรียกว่าค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) ของ f ที่จุด c ก็ต่อเมื่อ $f(x) \geq f(c)$ ทุกค่า $x \in (a, b)$

- หมายเหตุ**
1. ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ อาจเรียกว่าค่าสุดขีดสัมบูรณ์ (absolute extreme)
 2. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ อาจเรียกว่าค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (relative extreme)

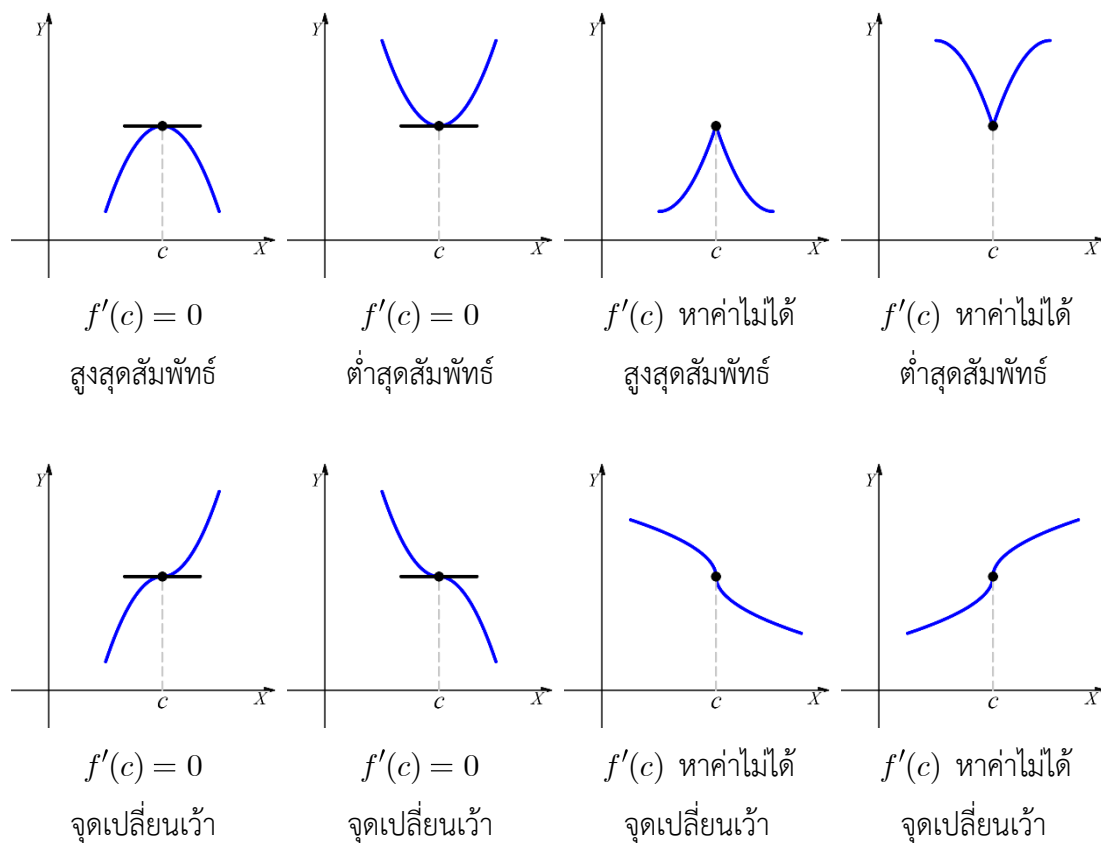
จากรูป 4.9 พิจารณาจุดในแต่ละช่วง จะได้ว่า

- จุด x_1 เป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์บนช่วง $[a, x_2]$ และ $f'(x_1) = 0$
- จุด x_2 เป็นจุดที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์บนช่วง $[x_1, x_3]$ และ $f'(x_2) = 0$
- จุด x_3 เป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์บนช่วง $[x_2, x_4]$ และ $f'(x_3)$ หาค่าไม่ได้
- จุด x_4 เป็นจุดที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์บนช่วง $[x_3, x_5]$ และ $f'(x_4)$ หาค่าไม่ได้
- จุด x_5 เป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์บนช่วง $[x_4, b]$ และ $f'(x_5) = 0$
- จุด x_3 เป็นจุดที่ให้ค่าสูงที่สุดบนช่วง $[a, b]$ เรียกว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์
- จุด b เป็นจุดที่ให้ค่าต่ำที่สุดบนช่วง $[a, b]$ เรียกว่าค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

หากพิจารณาเฉพาะจุดที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ จะเรียกจุดเหล่านี้ว่าจุดวิกฤต (critical point) ในการหาจุดวิกฤตสามารถอาศัยทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.4 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $c \in [a, b]$ ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ ที่จุด c จะเรียกจุด c ว่าจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f ถ้า $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้

สังเกตว่าบทกลับของทฤษฎีบท 4.4 นั้นไม่จริง นั่นคือ ถ้า c เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f แล้ว ไม่จำเป็นว่าที่ c จะเป็นจุดที่ให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ แสดงได้ดังรูป 4.10



รูป 4.10 กราฟแสดงจุดวิกฤตของฟังก์ชัน

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากรูป 4.10 จะเห็นว่าจุดที่อนุพันธ์มีค่าเป็น 0 หรือจุดที่หาอนุพันธ์ไม่ได้ ไม่จำเป็นจะต้องเป็นจุดที่ให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ ดังนั้นในการหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ ผู้เรียนสามารถนำอนุพันธ์มาประยุกต์ใช้ในการหาจุดที่ทำให้เกิดค่าสุดขีดสัมพัทธ์ได้ ดังนี้

การหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันพหุนาม โดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง

1. หา $f'(x)$
2. ให้ $f'(x) = 0$ แล้วหาค่า x (เรียก x ว่าค่าวิกฤต สมมติ $x = c$)
3. ทดสอบค่าวิกฤต $x = c$ ใน $f'(x)$ โดยแทนค่าที่อยู่ใกล้ c ทางซ้ายและทางขวา
 - ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจากบวกไปลบ แล้ว $x = c$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ $f(c)$ และจุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ $(x, f(c))$
 - ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจากลบไปบวก แล้ว $x = c$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ $f(c)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $(x, f(c))$
 - ถ้า $f'(x)$ ไม่เปลี่ยนเครื่องหมาย แสดงว่าไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดที่ $x = c$

ในการพิจารณารูปแบบกราฟที่เกิดขึ้นจากเครื่องหมายของ $f'(x)$ ว่าเป็นบวกหรือลบ ควบคู่ไปกับลักษณะของฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

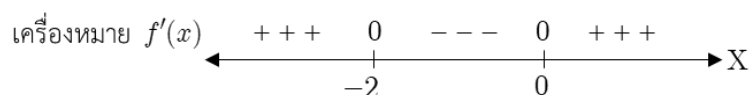
ตัวอย่าง 4.13 กำหนดให้ $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$ จงหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์

วิธีทำ จาก $f'(x) = 3x^2 + 6x$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } f'(x) = 0, \quad 3x^2 + 6x &= 0 \\ 3x(x + 2) &= 0 \\ x &= -2, 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดวิกฤตคือ $x = -2$ และ $x = 0$

ทดสอบค่าวิกฤตใน $f'(x)$ พิจารณาเครื่องหมายของ $f'(x)$



ที่ $x = -2$ จะได้ว่า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจากบวกไปลบ ดังนั้นที่ $x = -2$ จะทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และ

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 4 \\ &= -8 + 3(4) + 4 \\ &= -8 + 12 + 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

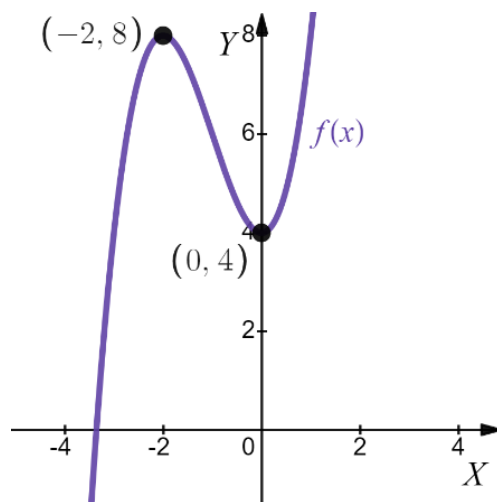
จะได้ว่า จุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(-2, 8)$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ 8

ที่ $x = 0$ จะได้ว่า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจากลบไปบวก ดังนั้นที่ $x = 0$ จะทำให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

$$\begin{aligned} f(0) &= (0)^3 + 3(0)^2 + 4 \\ &= 0 + 3(0) + 4 \\ &= 0 + 0 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

จะได้ว่า จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(0, 4)$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ 4

กราฟของฟังก์ชัน f แสดงได้ดังรูป 4.11



รูป 4.11 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ตัวอย่าง 4.14 กำหนดให้ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ จงค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์

วิธีทำ จาก $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$$\text{ให้ } f'(x) = 0, \quad 3x^2 + 6x - 9 = 0$$

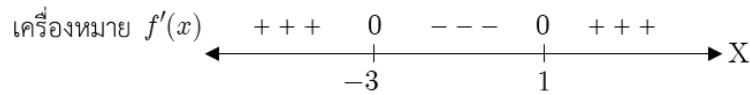
$$3(x^2 + 2x - 3) = 0$$

$$3(x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x = -3, 1$$

ดังนั้น จุดวิกฤตคือ $x = -3$ และ $x = 1$

ทดสอบค่าวิกฤตใน $f'(x)$ พิจารณาเครื่องหมายของ $f'(x)$



ที่ $x = -3$ จะได้ว่า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจากบวกไปลบ ดังนั้นที่ $x = -3$ จะทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และ

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) - 10 \\ &= -27 + 3(9) + 27 - 10 \\ &= -27 + 27 + 27 - 10 \\ &= 17 \end{aligned}$$

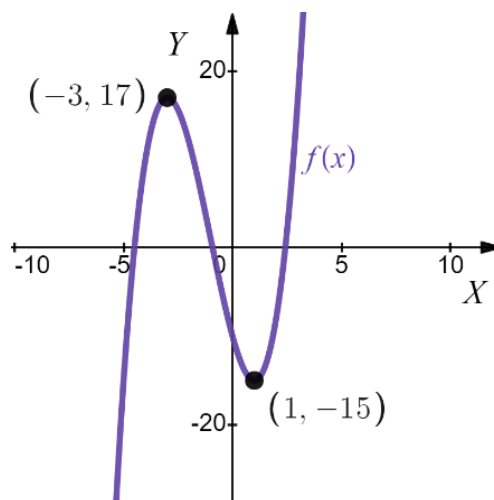
จะได้ว่า จุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(-3, 17)$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ 17

ที่ $x = 1$ จะได้ว่า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจากลบไปบวก ดังนั้นที่ $x = 1$ จะทำให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และ

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 + 3(1^2) - 9(1) - 10 \\ &= 1 + 3(1) - 9 - 10 \\ &= 1 + 3 - 9 - 10 \\ &= -15 \end{aligned}$$

จะได้ว่า จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(1, -15)$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ -15

กราฟของฟังก์ชัน f แสดงได้ดังรูป 4.12



รูป 4.12 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

■

4.2.4 การหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง

เนื่องจากการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่จุดวิกฤต $x = c$ นั้น ในการใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งจะต้องพิจารณาการเปลี่ยนเครื่องหมายของอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เพื่อดูว่าจุดวิกฤตนั้นให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ในขณะที่การใช้อนุพันธ์อันดับสองจะได้กราฟที่เว้าขึ้นหรือลง ซึ่งสามารถบอกได้ว่าจุดวิกฤตนั้นให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ นั่นคือ ผู้เรียนสามารถใช้อนุพันธ์อันดับสองในการพิจารณาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันได้ ดังต่อไปนี้

การหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันพหุนาม โดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง

1. หา $f'(x)$, $f''(x)$
2. ให้ $f'(x) = 0$ แล้วหาค่า x (เรียก x ว่าค่าวิกฤต สมมติ $x = c$)
3. ทดสอบค่าวิกฤต $x = c$ ใน $f''(x)$
 - ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $x = c$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ $f(c)$ และจุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ $(x, f(c))$
 - ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $x = c$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ $f(c)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $(x, f(c))$
 - ถ้า $f''(c) = 0$ แล้วสรุปผลไม่ได้ ต้องใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งทดสอบ

ตัวอย่าง 4.15 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$ จงหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์

วิธีทำ จาก $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$\text{ให้ } f'(x) = 0, \quad 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$3(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$3(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x = 3, -1$$

ดังนั้น จุดวิกฤตคือ $x = 3$ และ $x = -1$

$$\text{ที่ } x = 3; \quad f''(3) = 6(3) - 6$$

$$= 18 - 6$$

$$= 12 > 0$$

ดังนั้น ที่ $x = 3$ จะทำให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และ

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^3 - 3(3^2) - 9(3) + 9 \\ &= 27 - 3(9) - 27 + 9 \\ &= 27 - 27 - 27 + 9 \\ &= -18 \end{aligned}$$

จะได้ว่า จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(3, -18)$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ -18

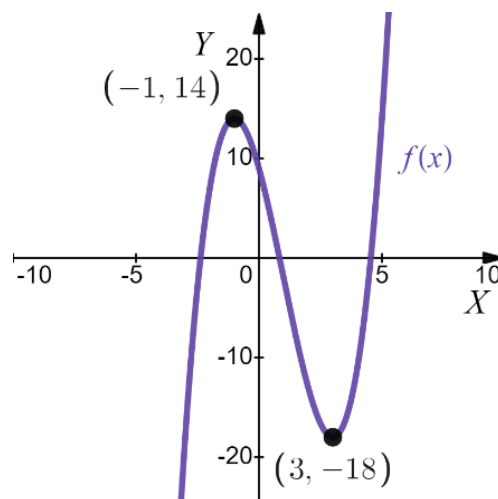
$$\begin{aligned} \text{ที่ } x = -1; \quad f''(-1) &= 6(-1) - 6 \\ &= -6 - 6 \\ &= -12 < 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น ที่ $x = -1$ จะทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และ

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 9 \\ &= -1 - 3(1) + 9 + 9 \\ &= -1 - 3 + 9 + 9 \\ &= 14 \end{aligned}$$

จะได้ว่า จุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(-1, 14)$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ 14

กราฟของฟังก์ชัน f แสดงได้ดังรูป 4.13



รูป 4.13 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)



ตัวอย่าง 4.16 กำหนดให้ $f(x) = 2 + 12x + 3x^2 - 2x^3$ จงค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์

วิธีทำ จาก $f'(x) = 12 + 6x - 6x^2$

$$f''(x) = 6 - 12x$$

$$\text{ให้ } f'(x) = 0, \quad 12 + 6x - 6x^2 = 0$$

$$0 = 6x^2 - 6x - 12$$

$$0 = 6(x^2 - x - 2)$$

$$0 = 6(x - 2)(x + 1)$$

$$x = 2, -1$$

ดังนั้น จุดวิกฤตคือ $x = 2$ และ $x = -1$

$$\text{ที่ } x = 2; \quad f''(2) = 6 - 12(2)$$

$$= 6 - 24$$

$$= -18 < 0$$

ดังนั้น ที่ $x = 2$ จะทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และ

$$f(2) = 2 + 12(2) + 3(2^2) - 2(2^3)$$

$$= 2 + 24 + 3(4) - 2(8)$$

$$= 2 + 24 + 12 - 16$$

$$= 22$$

จะได้ว่า จุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(2, 22)$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ 22

$$\text{ที่ } x = -1; \quad f''(-1) = 6 - 12(-1)$$

$$= 6 + 12$$

$$= 18 > 0$$

ดังนั้น ที่ $x = -1$ จะทำให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และ

$$f(-1) = 2 + 12(-1) + 3(-1)^2 - 2(-1)^3$$

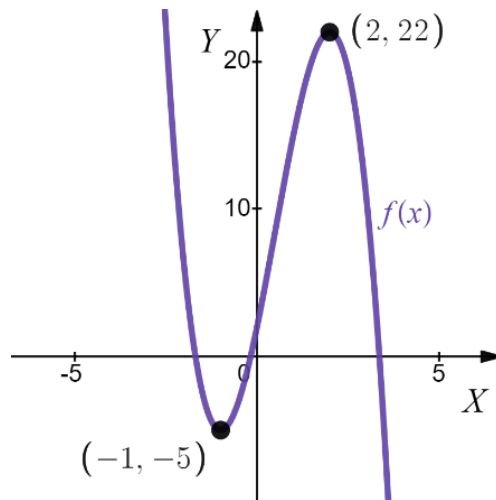
$$= 2 - 12 + 3(1) - 2(-1)$$

$$= 2 - 12 + 3 + 2$$

$$= -5$$

จะได้ว่า จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(-1, -5)$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ -5

กราฟของฟังก์ชัน f แสดงได้ดังรูป 4.14



รูป 4.14 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2 + 12x + 3x^2 - 2x^3$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565) ■

ตัวอย่าง 4.17 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$ จงค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์

วิธีทำ จาก $f'(x) = x^2 + x - 2$

$$f''(x) = 2x + 1$$

$$\text{ให้ } f'(x) = 0, \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -2, 1$$

ดังนั้น จุดวิกฤตคือ $x = -2$ และ $x = 1$

$$\text{ที่ } x = -2; \quad f''(-2) = 2(-2) + 1$$

$$= -4 + 1$$

$$= -3 < 0$$

ดังนั้น ที่ $x = -2$ จะทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และ

$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} - 2(-2)$$

$$= -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4$$

$$= \frac{-16 + 12 + 24}{6}$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= \frac{20}{6} \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

จะได้ว่า จุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(-2, \frac{10}{3})$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $\frac{10}{3}$

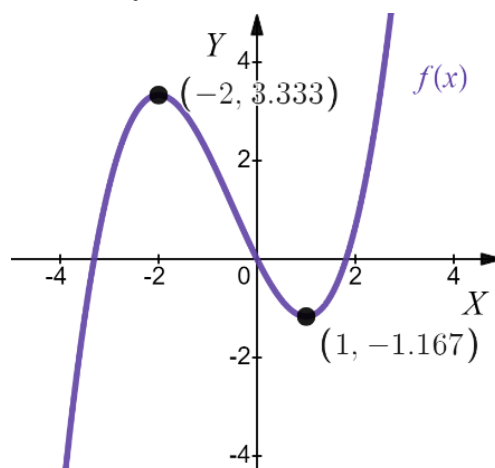
$$\begin{aligned} \text{ที่ } x = 1; \quad f''(1) &= 2(1) + 1 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 > 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น ที่ $x = 1$ จะทำให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และ

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2(1) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \\ &= \frac{2 + 3 - 12}{6} \\ &= -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

จะได้ว่า จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(1, -\frac{7}{6})$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $-\frac{7}{6}$

กราฟของฟังก์ชัน f แสดงดังรูป 4.15



รูป 4.15 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$

4.3 การประยุกต์การแก้ปัญหาโจทย์โดยใช้ค่าสุดขีดของฟังก์ชัน (Extreme value problem)

จากหัวข้อที่ผ่านมาผู้เรียนได้ศึกษาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน ในหัวข้อนี้จะเป็นการประยุกต์ใช้ อนุพันธ์ในการแก้ปัญหาโจทย์โดยใช้ค่าสุดขีดของฟังก์ชันมาเป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหา โดยเป็น การหาค่าที่มากที่สุดหรือน้อยที่สุดของปริมาณที่สนใจ ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด โดยมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

1. วาดรูปและระบุปริมาณต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง
2. หาสูตรปริมาณที่ต้องการ (อาจมีมากกว่า 1 ตัวแปร)
3. แสดงปริมาณในรูปของตัวแปรเดียว
4. หาช่วงค่าที่เป็นไปได้สำหรับตัวแปร
5. หาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (หาจุดวิกฤต)

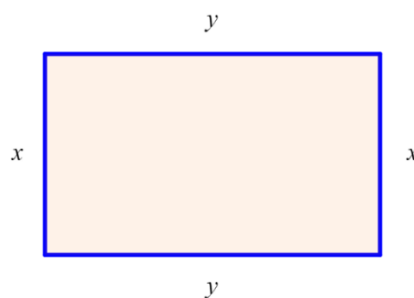
ตัวอย่าง 4.18 ต้องการจัดสวนในพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยทำการล้อมรอบด้วยรั้วลวดตาข่าย ถ้ามี ลวดตาข่ายยาว 100 เมตร จะสามารถทำสวนให้มีพื้นที่มากที่สุดเท่าใด

วิธีทำ ให้ x เป็นความกว้างของสวน (หน่วยเป็นเมตร)

y เป็นความยาวของสวน (หน่วยเป็นเมตร)

A เป็นพื้นที่ของสวน (หน่วยเป็นตารางเมตร)

สามารถแสดงส่วนของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีรั้วยาว 100 เมตร ได้ดังรูป 4.16



รูป 4.16 แสดงสวนสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีรั้วยาว 100 เมตร

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของสวนสี่เหลี่ยม} \quad A &= \text{กว้าง} \times \text{ยาว} \\ &= xy \end{aligned}$$

เนื่องจากลวดตาข่ายยาว 100 เมตร จากความยาวของสวนคือ

$$2x + 2y = 100$$

ดังนั้น $x + y = 50$

$$y = 50 - x$$

จะได้พื้นที่ของสวน $A = x(50 - x)$

$$= 50x - x^2$$

เนื่องจาก $y = 50 - x$ และ y เป็นความยาวของสวน ดังนั้น $0 \leq x \leq 50$

หาอนุพันธ์ของ A เทียบตัวแปร x

$$\frac{dA}{dx} = 50 - 2x$$

ให้ $\frac{dA}{dx} = 0$ จะได้ $x = 25$ และ $y = 50 - 25 = 25$

ดังนั้น พื้นที่ของสวนที่มากที่สุด คือมีความกว้าง 25 เมตร ความยาว 25 เมตร และมีพื้นที่

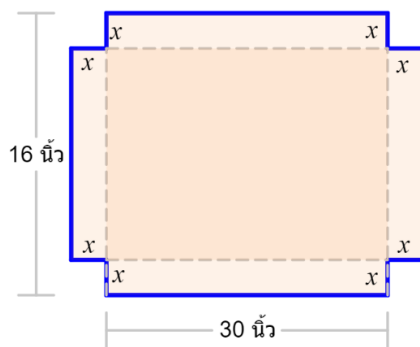
625 ตารางเมตร ■

ตัวอย่าง 4.19 แผ่นกระดาษแข็งขนาดกว้าง 16 นิ้ว ยาว 30 นิ้ว ต้องการทำกล่องเปิดด้านบนโดยการตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากันออกจากมุมทั้งสี่ แล้วพับด้านข้างขึ้นเพื่อสร้างกล่อง จะต้องตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกขนาดเท่าใดจึงจะทำให้ได้กล่องที่มีปริมาตรมากที่สุด

วิธีทำ ให้ x เป็นความยาวด้านหนึ่งของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ตัดออก (หน่วยเป็นนิ้ว)

V เป็นปริมาตรของกล่อง (หน่วยเป็นลูกบาศก์นิ้ว)

สามารถแผ่นกระดาษที่ตัดมุมทั้ง 4 เพื่อสร้างกล่อง ได้ดังรูป 4.17



รูป 4.17 แสดงแผ่นกระดาษที่ตัดมุมทั้ง 4 เพื่อสร้างกล่อง

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ปริมาตรของกล่องสี่เหลี่ยม คือ

$$\begin{aligned} V &= \text{กว้าง} \times \text{ยาว} \times \text{สูง} \\ &= (16 - 2x)(30 - 2x)x \\ &= 480x - 92x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

เนื่องจากต้องตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกจากมุม จะได้ว่าความยาวที่ตัดไป ต้องตัดทั้ง 2 ข้าง และความยาวด้านที่สั้นที่สุดคือ 16 นิ้ว ดังนั้น $0 \leq x \leq 8$

หาอนุพันธ์ของ V เทียบตัวแปร x

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= 480 - 184x + 12x^2 \\ &= 4(3x^2 - 46x + 120) \\ &= 4(x - 12)(3x - 10) \end{aligned}$$

$$\text{ให้ } \frac{dV}{dx} = 0 \text{ จะได้ } x = 12 \text{ และ } x = \frac{10}{3}$$

เนื่องจาก $x = 12$ อยู่นอกขอบเขตที่พิจารณาค่า x ดังนั้น $x = \frac{10}{3}$ และ

$$\begin{aligned} V &= 480\left(\frac{10}{3}\right) - 92\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{10}{3}\right)^3 \\ &= \frac{43,200}{27} - \frac{27,600}{27} + \frac{4,000}{27} \\ &= \frac{19,600}{27} \end{aligned}$$

นั่นคือ ปริมาตรที่มากที่สุดของกล่องเปิดด้านบนคือ $\frac{19,600}{27}$ ลูกบาศก์เซนติเมตร ■

4.4 ความเร็ว ความเร่ง (Velocity and acceleration)

ในการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง โดยมีสมการของการเคลื่อนที่คือ $s(t)$ เมื่อ s เป็นฟังก์ชันที่อธิบายการเคลื่อนที่หรือระยะทาง (distance) เรียกว่าฟังก์ชันระบุตำแหน่งของวัตถุ และ t คือระยะเวลา

ฟังก์ชันความเร็ว (velocity function) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของตำแหน่งของวัตถุต่อหน่วยเวลา โดยคำนึงถึงทิศทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ มีสูตรคือ

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

เมื่อ $v(t) > 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในทิศทางไปข้างหน้า (ทิศทางบวก)

$v(t) < 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในทิศทางตรงข้าม (ทิศทางลบ)

ฟังก์ชันอัตราเร็ว (speed function) คือขนาดของความเร็ว มีสูตรคือ

$$|v(t)| = |s'(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

ฟังก์ชันความเร่ง (acceleration function) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วของวัตถุต่อหน่วยเวลา โดยคำนึงถึงทิศทางมีสูตรคือ

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} \quad \text{หรือ} \quad a(t) = s''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

เมื่อ $a(t) > 0$ วัตถุมีความเร็วเพิ่มขึ้นในทิศความเร็วที่เป็นบวก หรือความเร็วลดลงในทิศตรงข้าม

$a(t) < 0$ วัตถุมีความเร็วลดลงในทิศความเร็วที่เป็นบวก หรือความเร็วเพิ่มขึ้นในทิศตรงข้าม
สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและความเร่งได้ดังตาราง 4.1 ดังนี้

ตาราง 4.1 แสดงความสัมพันธ์ความเร็วและความเร่ง

	$v > 0$	$v < 0$
$a > 0$	ความเร็วเพิ่มขึ้น	ความเร็วลดลง
$a < 0$	ความเร็วลดลง	ความเร็วเพิ่มขึ้น

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ตัวอย่าง 4.20 วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรง โดยมีความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง s เมตร และเวลา t วินาที ซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชัน $s(t) = t^3 + 3t^2$ จงหาระยะทาง ความเร็ว และความเร่งของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ เมื่อเวลา $t = 1$

วิธีทำ จาก $s(t) = t^3 + 3t^2$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad v(t) &= s'(t) \\ &= 3t^2 + 6t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ} \quad a(t) &= v'(t) \\ &= 6t - 6\end{aligned}$$

เมื่อ $t = 1$ วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ระยะทาง

$$\begin{aligned}s(1) &= 1^3 + 3(1^2) \\ &= 1 + 3(1) \\ &= 1 + 3 \\ &= 4\end{aligned}$$

เมื่อ $t = 1$ วัตถุเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว

$$\begin{aligned}v(1) &= 3(1^2) + 6(1) \\ &= 3(1) + 6 \\ &= 3 + 6 \\ &= 9\end{aligned}$$

เมื่อ $t = 1$ วัตถุเคลื่อนที่ไปด้วยความเร่ง

$$\begin{aligned}a(1) &= 6(1) + 6 \\ &= 6 + 6 \\ &= 12\end{aligned}$$

สรุป เมื่อเวลา 1 วินาที วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ในทิศทางบวก โดยมีระยะทาง 2 เมตร ความเร็ว 9 เมตร/วินาที และความเร่ง 12 เมตร/วินาที² ■

4.4.1 การเร่งความเร็วและการชะลอความเร็ว (Speed up and slowing down)

ในการพิจารณาว่าวัตถุใดมีการเร่งความเร็ว (speed up) หรือชะลอความเร็ว (slowing down) ในกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง จะพิจารณาดังนี้

วัตถุมีการ “เร่งความเร็ว” เมื่อความเร็วและความเร่งมีทิศทางเดียวกัน และวัตถุมีการ “ชะลอความเร็ว” เมื่อความเร็วและความเร่งมีทิศทางตรงข้ามกัน

หากพิจารณาทิศทางของการเคลื่อนที่ของวัตถุ (ทิศทางของความเร็ว) กรณีการเคลื่อนที่ที่ทิศทางบวก (ความเร็วเป็นบวก) จะได้ว่าเมื่อความเร่งเป็นบวก ความเร็วจะเพิ่มขึ้น (เร่งความเร็ว) และเมื่อความเร่งเป็นลบ ความเร็วจะลดลง (ชะลอความเร็ว)

กรณีการเคลื่อนที่ที่ทิศทางลบ (ความเร็วเป็นลบ) เมื่อความเร่งเป็นลบ ความเร็วจะมีค่าลบน้อยลง (เร่งความเร็ว) เมื่อความเร่งเป็นบวก ความเร็วจะมีค่าลบมากขึ้น (ชะลอความเร็ว)

ผู้เรียนอาจจะพิจารณาจากผลคูณของความเร็วและความเร่งได้ในทำนองเดียวกัน เมื่อผลคูณของความเร็วและความเร่งเป็นบวก จะได้ว่าวัตถุมีการเร่งความเร็ว และผลคูณของความเร็วและความเร่งเป็นลบ จะได้ว่าวัตถุมีการชะลอความเร็ว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.21 วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรง โดยมีความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง s เมตร และเวลา t วินาที ซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชัน $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ จงอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ เมื่อ $t \geq 0$

วิธีทำ จาก $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$

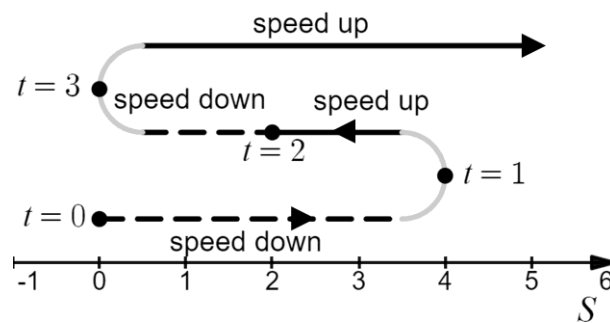
$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } v(t) &= s'(t) \\ &= 3t^2 - 12t + 9 \\ &= 3(t^2 - 4t + 3) \\ &= 3(t-1)(t-3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } a(t) &= v'(t) \\ &= 6t - 12 \\ &= 6(t-2)\end{aligned}$$

พิจารณาเวลา ระยะทาง ความเร็วและความเร่งได้ดังนี้

เวลา (t)	$s(t)$	$v(t)$	$a(t)$	สรุป
$t = 0$	0	$(-)(-) = (+)$	$(-)$	
$0 < t < 1$		$(-)(-) = (+)$	$(-)$	เคลื่อนที่ในทิศบวก และชะลอความเร็ว
$t = 1$	4	0	$(-)$	
$1 < t < 2$		$(+)(-) = (-)$	$(-)$	เคลื่อนที่ในทิศลบ และเร่งความเร็ว
$t = 2$	2	$(+)(-) = (-)$	0	
$2 < t < 3$		$(+)(-) = (-)$	$(+)$	เคลื่อนที่ในทิศลบ และชะลอความเร็ว
$t = 3$	0	0	$(+)$	
$t > 3$		$(+)(+) = (+)$	$(+)$	เคลื่อนที่ในทิศบวก และเร่งความเร็ว

สรุปการเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นแผนภาพได้ดังรูป 4.18 ดังนี้



รูป 4.18 แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุที่สอดคล้อง $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

4.5 ปัญหาอัตราสัมพันธ์ (Related rates problem)

ในหัวข้อนี้ จะทำการประยุกต์อนุพันธ์เพื่อแก้ปัญหาทางแคลคูลัสที่เกี่ยวข้องกับการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรหนึ่ง เมื่อทราบอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กัน เรียกว่าอัตราสัมพันธ์ (related rates) ซึ่งตัวแปรที่มักพบในปัญหานี้ก็คือตัวแปรเวลา t โดยอาจจะเรียกได้ว่าอัตราสัมพันธ์คือการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณต่าง ๆ เทียบกับเวลา ตัวอย่างเช่น อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณน้ำเทียบกับเวลา อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ววัตถุเทียบกับเวลา อัตราการเกิด การตายของประชากรเทียบกับเวลา เป็นต้น

ในการแก้ปัญหาี้ จะทำการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ เทียบกับตัวแปร t โดยนำความรู้ที่ได้จากการหาอนุพันธ์โดยกฎลูกโซ่ และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเข้ามาช่วยเหลือ โดยมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนการแก้ปัญหา

1. กำหนดตัวแปรของปริมาณต่าง ๆ ที่เปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา t
2. วาดรูปแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง (ถ้าวาดได้)
3. สร้างสมการที่มีความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ณ เวลา t ใด ๆ
4. หาอนุพันธ์ของสมการข้างต้นทั้งสองข้างเทียบกับตัวแปร t
5. แทนค่าตัวแปรต่าง ๆ และอัตราการเปลี่ยนแปลงที่โจทย์กำหนด แล้วคำนวณหาค่าสิ่งที่โจทย์ต้องการ

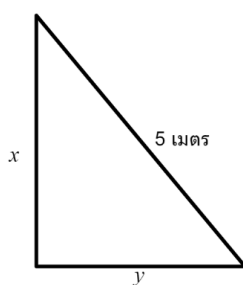
ตัวอย่าง 4.22 บันไดยาว 5 เมตร ปลายบันไดวางพิงกำแพงตั้งอยู่ และตีนบันไดวางอยู่บนพื้นดิน ถ้าตีนบันไดเคลื่อนห่างจากกำแพง 3 เมตร ด้วยความเร็ว 0.1 เมตรต่อวินาที จงหาว่าปลายบันไดจะเคลื่อนลงด้วยความเร็วเท่าไร

วิธีทำ เมื่อเวลาผ่านไป t วินาที

ให้ x เป็นระยะที่ปลายบันไดห่างจากตีนกำแพง หน่วยเป็นเมตร

y เป็นระยะที่ตีนบันไดห่างจากตีนกำแพง หน่วยเป็นเมตร

สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างบันไดและกำแพงได้ดังรูป 4.19



รูป 4.19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างบันไดและกำแพง

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากสูตรสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ t

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(5^2)$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$2x \frac{dx}{dt} = -2y \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$\text{จากโจทย์ } \frac{dy}{dt} = 0.1, y = 3 \text{ และ } x = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \frac{dx}{dt} &= -\frac{3}{4}(0.1) \\ &= -0.075 \end{aligned}$$

นั่นคือ ปลายบันไดจะเคลื่อนลงด้วยความเร็ว 0.075 เมตรต่อวินาที



ตัวอย่าง 4.23 ปลอยน้ำลงถังรูปกรวยกลม ด้วยอัตราเร็ว 3 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที ถังมีรัศมียาว 3 เมตร และสูง 10 เมตร จงหาว่าขณะที่น้ำในถังสูง 2 เมตร ระดับน้ำจะสูงขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด

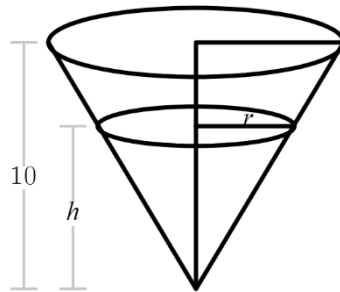
วิธีทำ เมื่อเวลาผ่านไป t วินาที

ให้ V เป็นปริมาตรของน้ำในถัง หน่วยเป็นลูกบาศก์เมตร

r เป็นรัศมีของผิวน้ำในถัง หน่วยเป็นเมตร

h เป็นความสูงของน้ำในถัง หน่วยเป็นเมตร

สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างถังรูปกรวยกลม รัศมีและความสูงได้ดังรูป 4.20



รูป 4.20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างถังรูปกรวยกลม รัศมีและความสูง

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากสูตรปริมาตรของรูปทรงกรวย

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

จากรูป สามเหลี่ยมคล้าย จะได้

$$\frac{r}{h} = \frac{3}{10}$$

$$r = \frac{3h}{10}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{3h}{10} \right)^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{9h^2}{100} \right) h$$

$$= \frac{3}{100} \pi h^3$$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ t

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9}{100} \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

จากโจทย์ $\frac{dV}{dt} = 3$ ลูกบาศก์เมตรต่อนาที และ $h = 2$ เมตร

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad 3 &= \frac{9}{100} \pi (2^2) \frac{dh}{dt} \\ &= \frac{9}{100} \pi (4) \frac{dh}{dt} \\ &= \frac{9\pi}{25} \frac{dh}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{25}{9\pi} \times 3 = \frac{25}{3\pi}$$

นั่นคือ ขณะที่น้ำในถังสูง 2 เมตร ระดับน้ำจะสูงขึ้นด้วยอัตราเร็ว $\frac{25}{3\pi}$ ลูกบาศก์เมตรต่อ
นาที ■

4.6 ค่าเชิงอนุพันธ์ (Differentials)

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ถ้า x มีการเปลี่ยนค่าไปเป็น $x + \Delta x$ จะเรียก Δx ว่าส่วนที่เปลี่ยนของ x ในทำนองเดียวกัน Δy จะเรียกว่าส่วนที่เปลี่ยนไปของ y เมื่อ x เปลี่ยนไป Δx ดังนั้น

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ดังนั้น $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$ เมื่อ $\Delta x \approx 0$ หรือกล่าวใน
อีกทำนองหนึ่ง คือ

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x \quad \text{เมื่อ } \Delta x \approx 0$$

จะนิยามค่าเชิงอนุพันธ์ดังบทนิยาม 4.5

บทนิยาม 4.5 กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ Δx คือส่วนที่เปลี่ยนของ x แล้ว ค่าเชิงอนุพันธ์ (differentials) ของ x เขียนแทนด้วย dx กำหนดโดย

$$dx = \Delta x$$

ค่าเชิงอนุพันธ์ของ y เขียนแทนด้วย dy กำหนดโดย

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

ถ้า $dx \neq 0$ แล้ว จากบทนิยาม 4.5 เมื่อนำค่าเชิงอนุพันธ์ dx หารตลอด จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)dx}{dx} = f'(x)$$

นั่นคือ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f สามารถเขียนอยู่ในรูปของผลหารของค่าเชิงอนุพันธ์ dy กับ dx ได้ ดังนั้น สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$df = f'(x)dx$$

แทนการเขียน $dy = f'(x)dx$ จะเรียก df ว่าค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^2 + 3$ ดังนั้นค่าเชิงอนุพันธ์ df เขียนในรูป

$$df = d(x^2 + 3) = 2x dx$$

นอกจากนี้ ผู้เรียนยังสามารถเขียนค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ ได้ในทำนองเดียวกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.24 จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ df ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

2) $f(x) = \sin x$

วิธีทำ 1) จากโจทย์ $f(x) = x^2 - 2x + 1$ จะได้ $f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad df &= d(x^2 - 2x + 1) \\ &= 2(x - 1)dx \end{aligned}$$

■

2) จากโจทย์ $f(x) = \sin x$ จะได้ $f'(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad df &= d(\sin x) \\ &= \cos x dx \end{aligned}$$

■

นอกจากนี้ ผู้เรียนยังสามารถใช้กฎลูกโซ่หรือสูตรการหาอนุพันธ์อื่น ๆ มาใช้ในการหาค่าเชิงอนุพันธ์ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.25 จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1) \quad d(\tan 3x) \qquad 2) \quad d(x^2 e^x)$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } 1) \quad d(\tan 3x) &= \sec^2 3x \, d(3x) \\ &= \sec^2 3x \cdot (3) \\ &= 3 \sec^2 3x \end{aligned} \quad \blacksquare$$

$$\begin{aligned} 2) \quad d(x^2 e^x) &= x^2 d(e^x) + e^x d(x^2) \\ &= x^2 e^x dx + 2x e^x dx \\ &= (x^2 e^x + 2x e^x) dx \end{aligned} \quad \blacksquare$$

4.6.1 การประมาณค่าเชิงเส้น (Linearization)

จากที่ทราบมาแล้วว่าเส้นสัมผัสของ $y = f(x)$ ที่จุด $x = x_0$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ คือเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$ และมีสมการ

$$y = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

นั่นคือ เส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ จะอยู่ในรูปสมการเชิงเส้น

$$L(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

จะนิยามการประมาณค่าเชิงเส้น ดังบทนิยาม 4.6

บทนิยาม 4.6 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = x_0$ การประมาณค่าเชิงเส้น (linearization) ของ f ที่ x_0 กำหนดโดย

$$L(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

การประมาณค่าเชิงเส้นมาตรฐาน (standard linear approximation) ของ f ที่ x_0 เป็นการประมาณค่า $f(x) \approx L(x)$ และเรียกจุด $x = x_0$ ว่าจุดศูนย์กลางของการประมาณค่า

ตัวอย่าง 4.26 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{1+x}$ จงหาการประมาณค่าเชิงเส้นของ f ที่จุด $x = 0$

วิธีทำ จากโจทย์ $f(x) = \sqrt{1+x}$ ดังนั้น $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

ที่จุด $x = 0$ จะได้ $f(0) = 1$ และ $f'(0) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad L(x) &= f(x_0) + f'(x)(x - x_0) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ ■

จากตัวอย่าง 4.26 เมื่อทำการประมาณค่าใกล้จุด $x = 0$ จะได้ค่าดังตาราง 4.2 ดังนี้

ตาราง 4.2 ตารางความสัมพันธ์ค่าจริงและค่าประมาณของ $f(x) = \sqrt{1+x}$ ที่จุด $x = 0$

x_0	การประมาณค่า	ค่าจริง	ผลต่าง
0.1	$\sqrt{1.1} = 1 + \frac{0.1}{2} = 1.05$	1.04880885	1.19115×10^{-3}
0.01	$\sqrt{1.01} = 1 + \frac{0.01}{2} = 1.005$	1.00498756	1.244×10^{-5}
0.001	$\sqrt{1.001} = 1 + \frac{0.001}{2} = 1.0005$	1.00049988	1.2×10^{-7}

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากตาราง 4.2 จะเห็นว่า ยิ่งค่า $x \rightarrow 0$ มากเท่าไร ค่าที่ได้จากการประมาณจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากยิ่งขึ้น

ตัวอย่าง 4.27 กำหนดให้ $f(x) = 3x^2 - 7x$ จงหา df เมื่อ $x = 1$ และ $dx = 0.1$

วิธีทำ จากโจทย์ $f(x) = 3x^2 - 7x$ จะได้ $f'(x) = 6x - 7$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad df &= f'(x)dx \\ &= (6x - 7)dx \end{aligned}$$

ที่ $x = 1$ และ $dx = 0.1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 df &= [6(1) - 7](0.1) \\
 &= (-1)(0.1) \\
 &= -0.1
 \end{aligned}$$

■

4.6.2 การประยุกต์ค่าเชิงอนุพันธ์ในการประมาณค่า

จากฟังก์ชัน $f(x)$ ถ้าผู้เรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันที่จุด x_0 ได้ ดังนั้นผู้เรียนสามารถที่จะประมาณค่าของฟังก์ชันที่จุด $x_0 + \Delta x$ ที่ใกล้เคียงกับจุด x_0 ได้

ถ้า $\Delta x = dx$ แล้วค่าเชิงอนุพันธ์ dy เป็นค่าประมาณของ Δy ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + \Delta y \\
 &\approx f(x_0) + dy \\
 &= f(x_0) + f'(x_0)dx
 \end{aligned}$$

ขั้นตอนการประมาณค่า

1. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ ที่สอดคล้องกับค่าที่ต้องการประมาณค่า และหา $f'(x)$
2. ให้จำนวนที่ต้องการประมาณค่าคือ $f(x_0 + \Delta x)$ โดยที่ $f(x_0)$ เป็นค่าที่สามารถหาค่าได้ และ $\Delta x = dx$
3. ประมาณค่าโดย $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$ แล้วแทนค่าต่าง ๆ ลงไป

ตัวอย่าง 4.28 จงหาค่าโดยประมาณของ $\sqrt[3]{28}$

วิธีทำ กำหนด $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ จะได้ $f'(x) = \frac{1}{3}x^{2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

ต้องการประมาณค่า $f(28) = f(x_0 + \Delta x)$ ให้ $x_0 = 27$, $\Delta x = 1$

จาก $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$

ดังนั้น $f(27 + 1) \approx f(27) + f'(27)(1)$

$$= \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}(1)$$

$$= \sqrt[3]{3^3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(3^3)^2}}$$

$$\begin{aligned}
 f(27+1) &= 3 + \frac{1}{3(3^2)} \\
 &= 3 + \frac{1}{27} \\
 &\approx 3 + 0.0370 \\
 &= 3.0370
 \end{aligned}$$

เมื่อคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขทางวิทยาศาสตร์ จะได้ $\sqrt[3]{28}$ มีค่าประมาณ 3.0366 ซึ่งถือว่าใกล้เคียงกับการหาโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ ■

ตัวอย่าง 4.29 จงหาค่าโดยประมาณของ $\cos 31^\circ$ เมื่อกำหนด $1^\circ = 0.0175$ เรเดียน

วิธีทำ กำหนด $f(x) = \cos x$ จะได้ $f'(x) = -\sin x$

ต้องการประมาณค่า $f(31^\circ) = f(x_0 + \Delta x)$ ให้ $x_0 = 30^\circ$, $\Delta x = 1^\circ = 0.0175$

$$\text{จาก} \quad f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad f(30^\circ + 1^\circ) &\approx f(30^\circ) + f'(30^\circ)(1^\circ) \\
 &= \cos 30^\circ - \sin 30^\circ(0.0175) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}(0.0175) \\
 &\approx 0.86603 - 0.00875 \\
 &= 0.85728
 \end{aligned}$$

เมื่อคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขทางวิทยาศาสตร์ จะได้ $\cos 31^\circ$ มีค่าประมาณ 0.85717 ซึ่งถือว่าใกล้เคียงกับการหาโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ ■

4.6.3 การประยุกต์ค่าเชิงอนุพันธ์ในการหาค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการวัด

ในการประมาณค่าความคลาดเคลื่อน (approximation error) ที่เกิดจากการวัด

จะกำหนดให้ u เป็นปริมาณที่ต้องการวัด และ du เป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการวัด u ดังนั้น

ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (relative error) คือ $\frac{du}{u}$ เมื่อ $u \neq 0$

และ ร้อยละของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ คือ $\frac{du}{u} \times 100$ เมื่อ $u \neq 0$

ตัวอย่าง 4.30 ในการวัดกล่องสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ โดยวัดความยาวแต่ละด้านได้ 10 เซนติเมตร โดยมีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.02 เซนติเมตร จงหา

- 1) คลามคลาดเคลื่อนที่มากที่สุดของปริมาตรกล่องสี่เหลี่ยมลูกบาศก์
- 2) คลามคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์และร้อยละของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของปริมาตรกล่องสี่เหลี่ยมลูกบาศก์

วิธีทำ 1) ให้ u เป็นความยาวของกล่องสี่เหลี่ยมลูกบาศก์

V แทนปริมาตรของกล่องสี่เหลี่ยมลูกบาศก์

du เป็นความคลาดเคลื่อนจากการวัดความยาวของกล่องสี่เหลี่ยมลูกบาศก์

dV เป็นความคลาดเคลื่อนจากการวัดปริมาตรของกล่องสี่เหลี่ยมลูกบาศก์

จากโจทย์ $du = \pm 0.02$ (เครื่องหมายบวก หมายถึงวัดได้มากกว่าค่าจริง และเครื่องหมายลบ หมายถึงวัดได้น้อยกว่าค่าจริง)

จากสูตรปริมาตรกล่องสี่เหลี่ยมลูกบาศก์

$$V = u^3$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} dV &= u' du \\ &= 3u^2 du \\ &= 3(10)^2 (\pm 0.02) \\ &= 3(100) (\pm 0.02) \\ &= \pm 6 \end{aligned}$$

นั่นคือ ความคลาดเคลื่อนที่มากที่สุดของปริมาตรกล่องสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ คือ ± 6 ลูกบาศก์เซนติเมตร ■

- 2) ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของปริมาตรกล่องสี่เหลี่ยมลูกบาศก์

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= \frac{3u^2 du}{u^3} \\ &= \frac{\pm 6}{10^3} \\ &= \pm \frac{6}{1000} \\ &= \pm 0.006 \end{aligned}$$

ร้อยละความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของปริมาตรกล่องสี่เหลี่ยมลูกบาศก์

$$\begin{aligned}\frac{dV}{V} \times 100 &= \pm 0.006 \times 100 \\ &= \pm 0.6\end{aligned}$$

■

สรุปเนื้อหาในบทที่ 4

อนุพันธ์ของฟังก์ชันคือแนวคิดพื้นฐานในการศึกษาแคลคูลัส ซึ่งอธิบายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ณ จุดใดจุด ในการประยุกต์อนุพันธ์ มีค่อนข้างหลากหลายขึ้นอยู่กับปัญหาที่ผู้เรียนสนใจ ไม่ว่าจะเป็นการหาค่าลิมิตที่อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด ซึ่งไม่สามารถหาได้โดยง่าย การนำอนุพันธ์มาใช้ในการทดสอบฟังก์ชันที่กำลังเพิ่มขึ้นหรือลดลง นำมาซึ่งการพิจารณากราฟของฟังก์ชัน การหาค่าสุดขีดโดยนำอนุพันธ์เข้ามาช่วยเหลือ สามารถประยุกต์ใช้ได้หลากหลายปัญหา เช่น การหาต้นทุนต่ำที่สุด การหาขนาดหรือปริมาตรที่มากที่สุด หรือการประยุกต์ในการหาอัตราการผลิตที่ให้ผลกำไรสูงสุด ในส่วนของการประมาณค่าต่าง ๆ สามารถนำอนุพันธ์มาประยุกต์ใช้ได้เช่นเดียวกัน ในการประยุกต์ใช้อนุพันธ์ช่วยให้ผู้เรียนสามารถแก้ปัญหา ปรับปรุงประสิทธิภาพ และสร้างแบบจำลองได้อย่างแม่นยำยิ่งขึ้น

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1.1
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

1.2
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

1.3
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x - \sin 3x}$$

1.4
$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \ln x$$

1.5
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1.6
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

1.7
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$$

1.8
$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

2. จงค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

2.2
$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$$

2.3
$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$$

2.4
$$f(x) = 2x^3 - 6x$$

2.5
$$f(x) = x(x-1)^2$$

2.6
$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

2.7
$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - 1$$

2.8
$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$$

3. ต้องการจัดสวนในพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยทำการล้อมรอบด้วยรั้วลวดตาข่าย ถ้ามีลวดตาข่ายยาว 200 เมตร จะสามารถทำสวนให้มีพื้นที่มากที่สุดเท่าใด

4. แผ่นกระดานแข็งขนาดกว้าง 12 นิ้ว ยาว 12 นิ้ว ต้องการทำกล่องเปิดด้านบนโดยทำการตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากันออกจากมุมทั้งสี่ แล้วพับด้านข้างขึ้นเพื่อสร้างกล่อง จะต้องตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกขนาดเท่าใดจึงจะทำให้ได้กล่องที่มีปริมาตรมากที่สุด

5. บันไดยาว 15 ฟุต วางพิงผนังตั้งอยู่ ถ้าปลายล่างสุดของบันไดเลื่อนห่างออกจากตัวตั้งในแนวนอนด้วยอัตรา 3 ฟุตต่อวินาที แล้วปลายด้านบนสุดของบันไดจะเลื่อนลงจากตัวตั้งด้วยอัตราเร็วเท่าไร เมื่อปลายบนสุดของบันไดอยู่สูงจากพื้น 9 ฟุต

6. ปล่อน้ำจากก๊อกน้ำลงถึงรูปกรวยกลม ด้วยอัตราเร็ว 2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที ถังมีรัศมียาว 10 เมตร และสูง 20 เมตร จงหาว่าขณะที่น้ำในถังสูง 10 เมตร ระดับน้ำจะสูงขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด

7. ว่าวลอยขึ้นจากพื้นห่างจากผู้สังเกตการณ์ 1,200 ฟุต ด้วยอัตราเร็ว 200 ฟุตต่อนาที จงหาว่ามุมเงยของผู้สังเกตการณ์จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าไร ขณะที่ว่าวลอยอยู่ที่ระดับความสูง 1,600 ฟุต

8. วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรง โดยมีความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง s เมตร และเวลา t วินาที ซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชัน $s(t) = 2t^3 - t^2$ จงหาระยะทาง ความเร็ว และความเร่งของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ เมื่อเวลา $t = 2$
9. วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรง โดยมีความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง s เมตร และเวลา t วินาที ซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชัน $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t$ จงหาระยะทาง ความเร็ว และความเร่งของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ เมื่อเวลา $t = 1$
10. จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้
- | | |
|-------------------------|-----------------------|
| 10.1 $d(\sin e^x)$ | 10.2 $d(\ln(1 - 2x))$ |
| 10.3 $d \sqrt{1 - x^2}$ | 10.4 $d(\arcsin 2x)$ |
11. จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์หาค่าโดยประมาณของ
- | | |
|-------------------|---------------------|
| 10.1 $\sqrt{101}$ | 10.2 $\sqrt[3]{65}$ |
| 10.3 $(1.98)^5$ | 10.4 $(21.03)^3$ |
12. กำหนด $1^\circ = 0.01745$ เรเดียน จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์หาค่าโดยประมาณของ
- | | |
|----------------------|----------------------|
| 11.1 $\sin 29^\circ$ | 11.2 $\cos 61^\circ$ |
|----------------------|----------------------|
13. ในการคำนวณปริมาตรทรงกลมโดยทำการวัดรัศมีของทรงกลม ถ้าปริมาตรที่คำนวณได้มีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 2 ลูกบาศก์เซนติเมตร และรัศมีที่วัดได้มีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.01 เซนติเมตร จงหาความยาวของรัศมีที่มากที่สุดที่ได้จากการวัดข้างต้น และคำนวณหาความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

เอกสารอ้างอิง

กฤษณะ เนียมมณี. (2543). *แคลคูลัสสำหรับธุรกิจ 1*. กรุงเทพมหานคร: พิกซ์การพิมพ์.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธกล้า และณัฐนาถ ไตรภพ. (2547). *แคลคูลัส 1*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

นงนุช สุขวารี, พชร เลิศวิจิตรศิลป์, กนกรัตน์ เสวตเศรณี, พันทิพย์ โตแก้ว, กันตภณ คูหาพัฒนกุล และกันย์ สุ่นยี่ขัน. (2556). *คณิตศาสตร์วิศวกรรม 1*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แสงสว่างเวิลด์เพรสจำกัด.

มนัส ประสงค์. (ม.ป.ป.). *แคลคูลัส 1*. กรุงเทพฯ: ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). *ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน*. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สหมิตรพรินติ้ง.

สันต์ชัย เบี้ยมูขดา. (มปป). *แคลคูลัส 1-1*. กรุงเทพฯ: ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus* (10th ed.). John Wiley & Sons. Ltd., New York, U.S.A.

Desmos. (n.d.). *Graphing Calculator*. <https://www.desmos.com/calculator>

Thomas, G. B., Jr., Weir, M. D., & Hass, J. R. (2013). *Thomas' calculus: Early transcendentals* (13th ed.). Pearson.

บทที่ 5

ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

ปริพันธ์ของฟังก์ชันเป็นการดำเนินการที่ตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ กล่าวคือ อนุพันธ์เป็นการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ณ จุดใดจุดหนึ่ง ในขณะที่ปริพันธ์จะเป็นการรวมการเปลี่ยนแปลงเล็กๆ น้อยๆ ที่เกิดขึ้นเข้าด้วยกัน เพื่อหาปริมาณรวมทั้งหมด

ปริพันธ์ของฟังก์ชันสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือ

1. **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต** (indefinite integral) เป็นการหาฟังก์ชันก่อนที่จะฟังก์ชันนั้นจะถูกหาอนุพันธ์ เช่น ถ้ามีฟังก์ชันที่ถูกหาอนุพันธ์ $f'(x) = 2x + 1$ หากผู้เรียนต้องการทราบว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันหน้าตาอย่างไร จะสามารถหาได้โดยการหาปริพันธ์ ซึ่งการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต จะได้ฟังก์ชันอยู่ในรูปของตัวแปรอิสระ
 2. **ปริพันธ์จำกัดเขต** (definite integral) เป็นการหาค่าปริพันธ์ในช่วงหรือขอบเขตที่กำหนด โดยอาจกล่าวในอีกทำนองหนึ่งได้ว่า การหาปริพันธ์จำกัดเขตคือการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งหรือฟังก์ชันที่พิจารณา โดยที่ค่าของปริพันธ์จำกัดเขตจะอยู่ในรูปตัวเลข
- ในบทนี้จะกล่าวถึงปริพันธ์ไม่จำกัดเขต รวมถึงสูตรต่าง ๆ ที่ใช้ในการหาปริพันธ์

5.1 ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivative)

ในการหาฟังก์ชันดั้งเดิมหรือฟังก์ชันก่อนที่ฟังก์ชันนั้นจะถูกหาอนุพันธ์ จะนิยามปฏิยานุพันธ์ดังนี้

บทนิยาม 5.1 ฟังก์ชัน F จะเรียกว่าเป็นปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ของฟังก์ชัน f บนช่วงเปิดใด ๆ ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ภายในช่วงเปิดนั้น ๆ

บทนิยาม 5.2 ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ แล้ว $F(x) + c$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$

จากบทนิยาม 5.1 และบทนิยาม 5.2 จะนิยามปริพันธ์ไม่จำกัดเขตดังนี้

บทนิยาม 5.3 กำหนดให้ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f บนช่วงเปิดใด ๆ ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integral) ของฟังก์ชัน f เทียบตัวแปร x นิยามโดย

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

จากบทนิยาม 5.3 อาจกล่าวในอีกทำนองหนึ่งได้ว่า

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad F'(x) = f(x)$$

- หมายเหตุ**
1. สัญลักษณ์ $\int$ เรียกว่า เครื่องหมายปริพันธ์ (integral sign)
 2. เรียก $f(x)$ ว่าปริพจน์ (integrand) หรือ ตัวถูกหาปริพันธ์
 3. เรียก x ว่าตัวแปร (variable) ของการหาปริพันธ์
 4. เรียก c ว่าค่าคงตัว (constant) ของปริพันธ์
 5. ในบางครั้ง อาจเขียน dx ผสมกับฟังก์ชันที่ถูกหาปริพันธ์ เช่น

$$\int 1 dx \quad \text{สามารถเขียนในรูป} \quad \int dx$$

$$\int \frac{1}{x^3} dx \quad \text{สามารถเขียนในรูป} \quad \int \frac{dx}{x^3}$$

6. จากปริพันธ์จำกัดเขต อาจกล่าวได้ว่า

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$$

เนื่องจาก $\int f(x) dx = F(x) + c$ ก็ต่อเมื่อ $F'(x) = f(x)$ จะเห็นได้ว่ารูปแบบของปริพันธ์ สามารถเทียบกับรูปแบบของการหาอนุพันธ์ได้ ดังนั้น จึงได้สูตรการหาปริพันธ์ที่เกิดจากรูปแบบของการหาอนุพันธ์ ซึ่งเป็นสูตรพื้นฐานดังต่อไปนี้

รูปแบบอนุพันธ์	รูปแบบปริพันธ์
1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\int 0 dx = c$
2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\int dx = x + c$
3. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n, (n \neq -1)$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$
4. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$
5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) = a^x, (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, (a > 0, a \neq 1)$
6. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
7. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
8. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
9. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$
10. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$
11. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$
12. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$	$\int \operatorname{cosec} x \cot x dx = -\operatorname{cosec} x + c$
13. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{x^2 + a^2}$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$
14. $\frac{d}{dx}\left(\arcsin \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$
15. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + c$

สมบัติพื้นฐานของการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต เป็นตามทฤษฎีบท 5.1

ทฤษฎีบท 5.1 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ a เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$
2. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

หมายเหตุ 1. ในกรณีที่มีฟังก์ชันมากกว่า 2 ฟังก์ชัน ทฤษฎีบท 5.1 ข้อ 2 และ 3 ยังคงเป็นจริง
 2. เพื่อความสะดวก อาจกำหนดให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ ดังนั้น ทฤษฎีบท 5.1 สามารถเขียนในรูป

$$\int au dx = a \int u dx \quad \text{และ} \quad \int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$$

ตัวอย่าง 5.1 จงหาค่าของ $\int (x^2 + 2x - 3)dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \int (x^2 + 2x - 3)dx &= \int x^2 dx + \int 2x dx - \int 3dx && \text{สูตร } \int au dx \\
 &= \int x^2 dx + 2 \int x dx - 3 \int dx && \text{สูตร } \int (u \pm v) dx \quad \text{สูตร } \int x dx \quad \text{สูตร } \int dx \\
 &= \left(\frac{x^3}{3} + c_1 \right) + 2 \left(\frac{x^2}{2} + c_2 \right) - 3(x + c_3) && \text{สูตร } \int x^n dx \\
 &= \frac{x^3}{3} + c_1 + x^2 + 2c_2 - 3x - 3c_3 \\
 &= \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + (c_1 + 2c_2 - 3c_3) \\
 &= \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + c \quad \text{เมื่อ } c = c_1 + 2c_2 - 3c_3 \blacksquare
 \end{aligned}$$

ข้อสังเกต

ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน ทุกครั้งจะเกิดค่าคงตัว c ของการหาปริพันธ์เสมอ เมื่อนำค่าคงตัวที่เกิดจากการหาปริพันธ์แต่ละพจน์มารวมกัน ก็ยังคงเป็นค่าคงตัว เช่นเดิม ดังนั้น ในการหาปริพันธ์ จะละการเขียนค่าคงตัวหลาย ๆ ตัวที่เกิดจากการหาปริพันธ์ โดยจะเขียนค่าคงตัวเพียงตัวเดียวเท่านั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.2 จงหาค่าของ $\int \left(4x^3 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} \right) dx$

วิธีทำ
$$\int \left(4x^3 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} \right) dx = \int (4x^3 + 2x^{1/2} - 3x^{-2}) dx$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{สูตร } \int (u \pm v) dx}{=} \int 4x^3 dx + \int 2x^{1/2} dx - \int 3x^{-2} dx \\ & \stackrel{\text{สูตร } \int au dx}{=} 4 \int x^3 dx + 2 \int x^{1/2} dx - 3 \int x^{-2} dx \\ & \stackrel{\text{สูตร } \int x^n dx}{=} 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} - 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + c \\ & = x^4 + \frac{4}{3} x^{3/2} + 3x^{-1} + c \\ & = x^4 + \frac{4}{3} x^{3/2} + \frac{3}{x} + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ข้อสังเกต เพื่อความสะดวกในการหาปริพันธ์ ผู้เรียนสามารถที่จะทำการหาปริพันธ์ โดยไม่จำเป็นต้องหาค่าคงตัวออกนอกปริพันธ์ หรือแยกปริพันธ์ออกเป็นฟังก์ชันหลาย ๆ พจน์ โดยทำการหาปริพันธ์ในครั้งเดียว หากฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์ สอดคล้องกับสูตร ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.3 จงหาค่าของ $\int (2x^3 - x^{-1} + 4x^{-3}) dx$

วิธีทำ
$$\int (2x^3 - x^{-1} + 4x^{-3}) dx = \frac{2x^4}{4} - \ln |x| + \frac{4x^{-2}}{-2} + c$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{สูตร } \int x^n dx}{=} \frac{x^4}{2} - \ln |x| - \frac{2}{x^2} + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.4 จงหาค่าของ $\int (x-1)(x^2-2x+3) dx$

วิธีทำ
$$\int (x-1)(x^2-2x+3) dx = \int (x^3 - 3x^2 + 5x - 3) dx$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{สูตร } \int x^n dx}{=} \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 3x + c \\ & = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{5x^2}{2} - 3x + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.5 จงหาค่าของ $\int \frac{4x^2 + 3x - 2}{x} dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 + 3x - 2}{x} dx &= \int \left(4x + 3 - \frac{2}{x} \right) dx \\ &= \frac{4x^2}{2} + 3x - 2 \ln |x| + c \\ &= 2x^2 + 3x - 2 \ln |x| + c \end{aligned}$$

สูตร $\int \frac{1}{x} dx$

ตัวอย่าง 5.6 จงหาค่าของ $\int (3e^x + 2 \cdot 5^x) dx$

วิธีทำ
$$\int (3e^x + 2 \cdot 5^x) dx = 3e^x + \frac{2 \cdot 5^x}{\ln 5} + c$$

สูตร $\int e^x dx$

สูตร $\int a^x dx$

ตัวอย่าง 5.7 จงหาค่าของ $\int \frac{2 \sin x - 3 \operatorname{cosec} x}{\tan x} dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \int \frac{2 \sin x - 3 \operatorname{cosec} x}{\tan x} dx &= \int \left(\frac{2 \sin x}{\tan x} - \frac{3 \operatorname{cosec} x}{\tan x} \right) dx \\ &= \int (2 \sin x \cot x - 3 \operatorname{cosec} x \cot x) dx \\ &= \int \left(2 \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - 3 \operatorname{cosec} x \cot x \right) dx \\ &= \int (2 \cos x - 3 \operatorname{cosec} x \cot x) dx \\ &= 2 \sin x + 3 \operatorname{cosec} x + c \end{aligned}$$

สูตร $\int \cos x dx$

สูตร $\int \operatorname{cosec} x \cot x dx$

ตัวอย่าง 5.8 จงหาค่าของ $\int \frac{3}{x^2 + 9} dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \int \frac{3}{x^2 + 9} dx &= \int \frac{3}{x^2 + 3^2} dx \\ &= \frac{3}{3} \arctan \frac{x}{3} + c \\ &= \arctan \frac{x}{3} + c \end{aligned}$$

สูตร $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

ตัวอย่าง 5.9 จงหาค่าของ $\int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{2}{\sqrt{2^2-x^2}} dx \\ &= 2 \arcsin \frac{x}{2} + c \end{aligned}$$

$$\text{สูตร } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

5.2 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตัวแปร (Integration by substitution)

ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน จะพบว่าฟังก์ชันบางประเภท ไม่สามารถใช้สูตรได้โดยตรง เช่น $f(x) = \sin(e^x)$ ดังนั้นผู้เรียนจะต้องมองฟังก์ชันที่ซับซ้อนในรูปของฟังก์ชันประกอบ $f(g(x))$ โดยที่ฟังก์ชันด้านนอกคือ $f(x) = \sin x$ และฟังก์ชันด้านในคือ $g(x) = e^x$ แล้วใช้กฎลูกโซ่เข้ามาช่วยในการหาอนุพันธ์ดังนี้

ให้ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จากกฎลูกโซ่

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

ดังนั้น

$$\int F'(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

เนื่องจาก F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ดังนั้น

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

ให้ $u = g(x)$ ดังนั้นค่าเชิงอนุพันธ์ $du = g'(x)dx$ จะได้ว่า

$$\int f(u) du = F(u) + c$$

โดยมีขั้นตอนในการหาปริพันธ์ดังนี้

ขั้นตอนในการหาปริพันธ์โดยใช้การแทนค่าตัวแปร

1. ให้ $u = g(x)$ และ $du = g'(x)dx$ ดังนั้น

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$$

2. ทำการหาปริพันธ์เทียบตัวแปร u
3. หลังจากหาปริพันธ์เรียบร้อยแล้ว แทนค่า $u = g(x)$

เมื่อประยุกต์หลักการหาปริพันธ์โดยใช้การแทนค่าตัวแปรเข้าไปในสูตรการหาปริพันธ์พื้นฐาน โดยการกำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x โดยที่ a และ c เป็นค่าคงตัว จะได้สูตรการหาปริพันธ์ใหม่ที่เทียบตัวแปร u ดังนี้

สูตรปริพันธ์ของฟังก์ชันเทียบตัวแปร x	สูตรปริพันธ์ในรูปฟังก์ชันเทียบตัวแปร u
1. $\int dx = x + c$	$\int du = u + c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c, (a > 0, a \neq 1)$
5. $\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^u du = e^u + c$
6. $\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos u du = \sin u + c$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin u du = -\cos u + c$
8. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$	$\int \sec^2 u dx = \tan u + c$
9. $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$	$\int \operatorname{cosec}^2 u dx = -\cot u + c$
10. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$	$\int \sec u \tan u dx = \sec u + c$
11. $\int \operatorname{cosec} x \cot x dx = -\operatorname{cosec} x + c$	$\int \operatorname{cosec} u \cot u dx = -\operatorname{cosec} u + c$
12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + c$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$
14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + c$	$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + c$

จากสูตรพื้นฐานข้างต้น ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะเห็นว่ายังขาดสูตรบางสูตรไป เพื่อให้สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ครบทุกฟังก์ชัน จะทำการพิสูจน์สูตรโดยนำหลักการหาปริพันธ์โดยใช้การแทนค่าตัวแปรเข้ามาช่วยในการพิสูจน์ เพื่อให้ได้สูตรที่นำมาใช้ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ครอบคลุมยิ่งขึ้นดังนี้

สูตรปริพันธ์ของฟังก์ชันเทียบตัวแปร x	สูตรปริพันธ์ในรูปฟังก์ชันเทียบตัวแปร u
1. $\int \tan x \, dx = \ln \sec x + c$	$\int \tan u \, dx = \ln \sec u + c$
2. $\int \cot x \, dx = \ln \sin x + c$	$\int \cot u \, dx = \ln \sin u + c$
3. $\int \sec x \, dx = \ln \sec x + \tan x + c$	$\int \sec u \, dx = \ln \sec u + \tan u + c$
4. $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln \operatorname{cosec} x - \cot x + c$	$\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln \operatorname{cosec} u - \cot u + c$

พิสูจน์ ดูภาคผนวก

ตัวอย่าง 5.10 จงหาค่าของ $\int x(x^2 + 1)^{10} \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 + 1$ จะได้ $du = 2x \, dx$

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{2} &= x \, dx \\
 \text{ดังนั้น} \quad \int x(x^2 + 1)^{10} \, dx &= \int (x^2 + 1)^{10} (x \, dx) \\
 &= \int u^{10} \frac{du}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \int u^{10} \, du \quad \left(\text{สูตร } \int u^n \, du \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{11}}{11} + c \\
 &= \frac{u^{11}}{22} + c \quad \left(\text{แทน } u = x^2 + 1 \right) \\
 &= \frac{(x^2 + 1)^{11}}{22} + c
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.11 จงหาค่าของ $\int \sqrt{3x+2} \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x+2$ จะได้ $du = 3 \, dx$

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{3} &= dx \\
 \text{ดังนั้น} \quad \int \sqrt{3x+2} \, dx &= \int (3x+2)^{1/2} \, dx \\
 &= \int u^{1/2} \frac{du}{3} \\
 &= \frac{1}{3} \int u^{1/2} \, du \quad \text{สูตร } \int u^n \, du \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + c \\
 &= \frac{2}{9} u^{3/2} + c \quad \text{แทน } u = 3x+2 \\
 &= \frac{2}{9} (3x+2)^{3/2} + c
 \end{aligned}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างต้น จะทำการแทนค่า u เพื่อให้สอดคล้องกับสูตรที่ใช้ในการหาปริพันธ์ และหลังจากหาปริพันธ์แล้ว จึงทำการแทนค่า u ย้อนกลับ ผู้เรียนสามารถทำการหาปริพันธ์ได้อีกวิธีโดยพิจารณาการจัดรูป du ให้อยู่ในรูปค่าเชิงอนุพันธ์ของตัวแปรอิสระ x แล้วจึงทำการหาปริพันธ์ตามสูตรได้ในทำนองเดียวกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.12 จงหาค่าของ $\int \frac{x+3}{(x^2+6x+4)^3} \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2+6x+4$ จะได้ $d(x^2+6x+4) = (2x+6) \, dx$
 $= 2(x+3) \, dx$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} d(x^2+6x+4) &= (x+3) \, dx \\
 \text{ดังนั้น} \quad \int \frac{x+3}{(x^2+6x+4)^3} \, dx &= \int (x^2+6x+4)^{-3} (x+3) \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{(x^2+6x+4)^3} dx &= \int (x^2+6x+4)^{-3} \cdot \frac{1}{2} d(x^2+6x+4) \\
\boxed{\text{สูตร } \int u^n du} &= \frac{1}{2} \int (x^2+6x+4)^{-3} d(x^2+6x+4) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+6x+4)^{-2}}{-2} + c \\
&= -\frac{1}{4} (x^2+6x+4)^{-2} + c \\
&= -\frac{1}{4(x^2+6x+4)^2} + c \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.13 จงหาค่าของ $\int \frac{2x^2-3x+1}{x-2} dx$

วิธีทำ ทำการหารพหุนาม $\frac{2x^2-3x+1}{x-2}$ ดังนี้

$$\begin{array}{r}
2x^2 + 1 \\
x-2 \overline{) 2x^2 - 3x + 1} \\
\underline{2x^2 - 4x} \\
x + 1 \\
\underline{x - 2} \\
+3 \\
\hline
\end{array}$$

ดังนั้น $\frac{2x^2-3x+1}{x-2} = 2x+1 + \frac{3}{x-2}$

นั่นคือ $\int \frac{2x^2-3x+1}{x-2} dx = \int \left(2x+1 + \frac{3}{x-2} \right) dx$

ให้ $u = x-2$ จะได้ $d(x-2) = dx$

$$\begin{aligned}
\text{ดังนั้น } \int \left(2x+1 + \frac{3}{x-2} \right) dx &= \int (2x+1) dx + \int \frac{3}{x-2} dx \quad \boxed{\text{สูตร } \int \frac{1}{u} du} \\
&= \int (2x+1) dx + 3 \int \frac{1}{x-2} d(x-2) \\
&= \frac{2x^2}{2} + x + 3 \ln |x-2| + c \\
&= x^2 + x + 3 \ln |x-2| + c \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.14 จงหาค่าของ $\int \frac{2x}{x^2+5} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 + 5$ จะได้ $d(x^2 + 5) = 2x dx$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \int \frac{2x}{x^2+5} dx &= \int \frac{1}{x^2+5} (2x dx) && \text{สูตร } \int \frac{1}{u} du \\ &= \int \frac{1}{x^2+5} d(x^2+5) \\ &= \ln|x^2+5| + c \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.15 จงหาค่าของ $\int 3x \cdot 7^{x^2-1} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 - 1$ จะได้ $d(x^2 - 1) = 2x dx$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \int 3x \cdot 7^{x^2-1} dx &= 3 \int 7^{x^2-1} (x dx) \\ &= 3 \int 7^{x^2-1} \cdot \frac{1}{2} d(x^2 - 1) \\ &= \frac{3}{2} \int 7^{x^2-1} d(x^2 - 1) && \text{สูตร } \int a^u du \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{7^{x^2+1}}{\ln 7} + c \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.16 จงหาค่าของ $\int x^2 e^{x^3} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^3$ จะได้ $d(x^3) = 3x^2 dx$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \int x^2 e^{x^3} dx &= \int e^{x^3} (x^2 dx) \\ &= \int e^{x^3} \cdot \frac{1}{3} d(x^3) \\ &= \frac{1}{3} \int e^{x^3} d(x^3) && \text{สูตร } \int e^u du \end{aligned}$$

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + c \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 5.17 จงหาค่าของ $\int x \sin(1 - 3x^2) dx$

วิธีทำ ให้ $u = 1 - 3x^2$ จะได้ $d(1 - 3x^2) = -6x dx$

$$-\frac{1}{6} d(1 - 3x^2) = x dx$$

ดังนั้น

$$\int x \sin(1 - 3x^2) dx = \int \sin(1 - 3x^2)(x dx)$$

$$\boxed{\text{สูตร } \int \sin u du} = \int \sin(1 - 3x^2) \left(-\frac{1}{6} d(1 - 3x^2) \right)$$

$$= -\frac{1}{6} \int \sin(1 - 3x^2) d(1 - 3x^2)$$

$$= -\frac{1}{6} (-\cos(1 - 3x^2)) + c$$

$$= \frac{1}{6} \cos(1 - 3x^2) + c \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 5.18 จงหาค่าของ $\int e^x \cos(e^x) dx$

วิธีทำ ให้ $u = e^x$ จะได้ $d(e^x) = e^x dx$

ดังนั้น

$$\int e^x \cos(e^x) dx = \int \cos(e^x)(e^x dx)$$

$$= \int \cos(e^x) d(e^x) \quad \boxed{\text{สูตร } \int \cos u du}$$

$$= \sin(e^x) + c \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 5.19 จงหาค่าของ $\int \cos x \cdot \sec^2(\sin x) dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sin x$ จะได้ $d(\sin x) = \cos x dx$

$$\text{ดังนั้น } \int \cos x \cdot \sec^2(\sin x) dx = \int \sec^2(\sin x)(\cos x dx)$$

$$= \int \sec^2(\sin x) d(\sin x)$$

$$= \tan(\sin x) + c \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 5.20 จงหาค่าของ $\int e^{3x} \operatorname{cosec}^2(e^{3x}) dx$

วิธีทำ ให้ $u = e^{3x}$ จะได้ $d(e^{3x}) = 3e^{3x} dx$

$$\frac{1}{3} d(e^{3x}) = e^{3x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \int e^{3x} \operatorname{cosec}^2(e^{3x}) dx &= \int \operatorname{cosec}^2(e^{3x})(e^{3x} dx) \\ &= \int \operatorname{cosec}^2(e^{3x}) \cdot \frac{1}{3} d(e^{3x}) \quad \left[\text{สูตร } \int \operatorname{cosec}^2 u du \right] \\ &= \frac{1}{3} \int \operatorname{cosec}^2(e^{3x}) d(e^{3x}) \\ &= -\frac{1}{3} \cot(e^{3x}) + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.21 จงหาค่าของ $\int \frac{\sec(\sqrt{x}) \tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sqrt{x}$ จะได้ $d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$$2 d(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \int \frac{\sec(\sqrt{x}) \tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx &= \int \sec(\sqrt{x}) \tan(\sqrt{x}) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} dx \right) \\ &= \int \sec(\sqrt{x}) \tan(\sqrt{x}) \cdot 2 d(\sqrt{x}) \\ &\quad \left[\text{สูตร } \int \sec u \tan u du \right] \\ &= 2 \int \sec(\sqrt{x}) \tan(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}) \\ &= 2 \sec(\sqrt{x}) + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.22 จงหาค่าของ $\int 5^x \operatorname{cosec}(5^x) \cot(5^x) dx$

วิธีทำ ให้ $u = 5^x$ จะได้ $d(5^x) = 5^x \ln 5 dx$

$$\frac{1}{\ln 5} d(5^x) = 5^x dx$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int 5^x \operatorname{cosec}(5^x) \cot(5^x) dx = \int \operatorname{cosec}(5^x) \cot(5^x) (5^x dx)$$

$$\begin{aligned}
 \int 5^x \operatorname{cosec}(5^x) \cot(5^x) dx &= \int \operatorname{cosec}(5^x) \cot(5^x) \cdot \frac{1}{\ln 5} d(5^x) \\
 \boxed{\text{สูตร } \int \operatorname{cosec} u \cot u du} &= \frac{1}{\ln 5} \int \operatorname{cosec}(5^x) \cot(5^x) d(5^x) \\
 &= -\frac{1}{\ln 5} \operatorname{cosec}(5^x) + c
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.23 จงหาค่าของ $\int \frac{\tan(\ln \sqrt{x})}{x} dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$ จะได้ $d(\ln \sqrt{x}) = \frac{1}{2x} dx$

$$2 d(\ln \sqrt{x}) = \frac{1}{x} dx$$

ดังนั้น $\int \frac{\tan(\ln \sqrt{x})}{x} dx = \int \tan(\ln \sqrt{x}) \cdot \left(\frac{1}{x} dx \right)$

$$\begin{aligned}
 \boxed{\text{สูตร } \int \tan u du} &= \int \tan(\ln \sqrt{x}) \cdot 2 d(\ln \sqrt{x}) \\
 &= 2 \int \tan(\ln \sqrt{x}) d(\ln \sqrt{x}) \\
 &= 2 \ln \left| \sec(\ln \sqrt{x}) \right| + c
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.24 จงหาค่าของ $\int \sec^2 4x \cot(\tan 4x) dx$

วิธีทำ ให้ $u = \tan 4x$ จะได้ $d(\tan 4x) = 4 \sec^2 4x dx$

$$\frac{1}{4} d(\tan 4x) = \sec^2 4x dx$$

ดังนั้น $\int \sec^2 4x \cot(\tan 4x) dx = \int \cot(\tan 4x) (\sec^2 4x dx)$

$$\begin{aligned}
 &= \int \cot(\tan 4x) \cdot \frac{1}{4} d(\tan 4x) \\
 \boxed{\text{สูตร } \int \cot u du} &= \frac{1}{4} \int \cot(\tan 4x) d(\tan 4x) \\
 &= \frac{1}{4} \ln \left| \sin(\tan 4x) \right| + c
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.25 จงหาค่าของ $\int e^{2x} \sec(1 - e^{2x}) dx$

วิธีทำ ให้ $u = 1 - e^{2x}$ จะได้ $d(1 - e^{2x}) = -2e^{2x} dx$

$$-\frac{1}{2}d(1 - e^{2x}) = e^{2x} dx$$

ดังนั้น $\int e^{2x} \sec(1 - e^{2x}) dx = \int \sec(1 - e^{2x})(e^{2x} dx)$

$$= \int \sec(1 - e^{2x}) \left(-\frac{1}{2} d(1 - e^{2x}) \right)$$

สูตร $\int \sec u du$

$$= -\frac{1}{2} \int \sec(1 - e^{2x}) d(1 - e^{2x})$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| \sec(1 - e^{2x}) + \tan(1 - e^{2x}) \right| + c \blacksquare$$

ตัวอย่าง 5.26 จงหาค่าของ $\int \cot x \operatorname{cosec}(\ln(\sin x)) dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln(\sin x)$ จะได้ $d(\ln(\sin x)) = \frac{\cos x}{\sin x} dx$
 $= \cot x dx$

ดังนั้น $\int \cot x \operatorname{cosec}(\ln(\sin x)) dx = \int \operatorname{cosec}(\ln(\sin x)) (\cot x dx)$

สูตร $\int \operatorname{cosec} u du$

$$= \int \operatorname{cosec}(\ln(\sin x)) d(\ln(\sin x))$$

$$= \ln \left| \operatorname{cosec}(\ln(\sin x)) - \cot(\ln(\sin x)) \right| + c \blacksquare$$

ตัวอย่าง 5.27 จงหาค่าของ $\int \frac{1}{4x^2 + 9} dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x$ จะได้ $d(2x) = 2 dx$

$$\frac{1}{2}d(2x) = dx$$

ดังนั้น $\int \frac{1}{4x^2 + 9} dx = \int \frac{1}{(2x)^2 + 3^2} \cdot \frac{1}{2} d(2x)$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{(2x)^2 + 3^2}$$

สูตร $\int \frac{du}{u^2 + a^2}$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4x^2 + 9} dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \arctan \frac{2x}{3} + c \\ &= \frac{1}{6} \arctan \frac{2x}{3} + c\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 5.28 จงหาค่าของ $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 16} dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}x^2 + 6x - 9 &= (x^2 + 6x + 3^2) - 3^2 + 16 \\ &= (x + 3)^2 - 9 + 16 \\ &= (x + 3)^2 + 7 \\ &= (x + 3)^2 + (\sqrt{7})^2\end{aligned}$$

ให้ $u = x + 3$ จะได้ $d(x + 3) = dx$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 + 6x + 16} dx &= \int \frac{d(x + 3)}{(x + 3)^2 + (\sqrt{7})^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{x + 3}{\sqrt{7}} + c\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 5.29 จงหาค่าของ $\int \frac{x}{\sqrt{25 - x^4}} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2$ จะได้ $d(x^2) = 2x dx$

$$\frac{1}{2} d(x^2) = x dx$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{25 - x^4}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{5^2 - (x^2)^2}} (x dx) \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{5^2 - (x^2)^2}} \cdot \frac{1}{2} d(x^2) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{5^2 - (x^2)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{5} + c\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 5.30 จงหาค่าของ $\int \frac{4}{x\sqrt{9x^2-4}} dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x$ จะได้ $d(3x) = 3 dx$

$$\frac{1}{3} d(3x) = dx$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \int \frac{4}{x\sqrt{9x^2-4}} dx &= 4 \int \frac{1}{x\sqrt{(3x)^2-2^2}} \cdot \frac{1}{3} d(3x) \\ &= 4 \int \frac{d(3x)}{3x\sqrt{(3x)^2-2^2}} \quad \left[\text{สูตร } \int \frac{du}{u\sqrt{x^2-a^2}} \right] \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \frac{3x}{2} + c \\ &= 2 \operatorname{arcsec} \frac{3x}{2} + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

นอกจากนี้ ผู้เรียนยังนำการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตัวแปร u ไปใช้ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ซับซ้อนได้ โดยจัดรูปของฟังก์ชันให้สอดคล้องกับสูตรการหาปริพันธ์ แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.31 จงหาค่าของ $\int x\sqrt{3x-2} dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x-2$ จะได้ $x = \frac{1}{3}(u+2)$ และ $du = 3 dx$

$$\frac{1}{3} du = dx$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \int x\sqrt{3x-2} dx &= \int \frac{1}{3}(u+2)u^{1/2} \left(\frac{1}{3} du \right) \\ &= \frac{1}{9} \int (u+2)u^{1/2} du \\ &\quad \left[\text{สูตร } \int u^n du \right] = \frac{1}{9} \int (u^{3/2} + 2u^{1/2}) du \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{2u^{3/2}}{3/2} \right) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int x\sqrt{3x-2} \, dx &= \frac{2}{45} u^{5/2} + \frac{4}{27} u^{3/2} + c \\
 &= \frac{2}{45} (3x-2)^{5/2} + \frac{4}{27} (3x-2)^{3/2} + c \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.32 จงหาค่าของ $\int \frac{x}{x^2 - 2x + 5} dx$

วิธีทำ พิจารณา
$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x + 5 &= (x^2 - 2x + 1^2) - 1^2 + 5 \\
 &= (x-1)^2 - 1 + 5 \\
 &= (x-1)^2 + 4
 \end{aligned}$$

ให้ $u = x-1$ จะได้ $x = u+1$ และ $du = dx$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{x^2 - 2x + 5} dx &= \int \frac{u+1}{u^2 + 4} du \\
 &= \int \frac{u}{u^2 + 4} du + \int \frac{1}{u^2 + 4} du
 \end{aligned}$$

ให้ $v = u^2 + 4$ จะได้ $d(u^2 + 4) = 2u \, du$

$$\frac{1}{2} d(u^2 + 4) = u \, du$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \int \frac{u}{u^2 + 4} du + \int \frac{1}{u^2 + 4} du &= \int \frac{1}{u^2 + 4} (u \, du) + \int \frac{du}{u^2 + 2^2} \\
 &= \int \frac{1}{u^2 + 4} \cdot \frac{1}{2} d(u^2 + 4) + \int \frac{du}{u^2 + 2^2} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 + 4} d(u^2 + 4) + \int \frac{du}{u^2 + 2^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{สูตร } \int \frac{1}{u} du \\ \text{สูตร } \int \frac{du}{u^2 + a^2} \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln |u^2 + 4| + \frac{1}{2} \arctan \frac{u}{2} + c \\
 &= \frac{1}{2} \ln |(x-1)^2 + 4| + \frac{1}{2} \arctan \frac{x-1}{2} + c \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

สรุปเนื้อหาในบทที่ 5

ปริพันธ์ของฟังก์ชันเป็นการดำเนินการที่ตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ กล่าวคือ อนุพันธ์เป็นการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ณ จุดใดจุดหนึ่ง ในขณะที่ปริพันธ์จะเป็นการรวมการเปลี่ยนแปลงเล็กๆ น้อยๆ ที่เกิดขึ้นเข้าด้วยกัน เพื่อหาปริมาณรวมทั้งหมด ในบทนี้จะกล่าวถึงปริพันธ์จำกัดเขต ซึ่งเป็นการหาฟังก์ชันเริ่มต้นก่อนที่จะฟังก์ชันนั้นจะถูกหาอนุพันธ์

สูตรในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสามารถเทียบกับรูปแบบของการหาอนุพันธ์ได้ ดังนั้นเมื่อทำการเทียบแล้วจะได้สูตรการหาปริพันธ์ที่เกิดจากรูปแบบของการหาอนุพันธ์ ซึ่งเป็นสูตรพื้นฐาน

ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ซับซ้อน ซึ่งไม่สามารถใช้สูตรพื้นฐานที่เกิดจากการเทียบจากรูปแบบของการหาอนุพันธ์ได้โดยตรง จะทำการพิจารณาฟังก์ชันที่ซับซ้อนในรูปของฟังก์ชันประกอบ โดยพิจารณาในรูปฟังก์ชันภายนอกและฟังก์ชันภายใน หรือการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันโดยการแทนค่าตัวแปร u ซึ่งทำให้สูตรพื้นฐานขยายไปเป็นรูปแบบที่ซับซ้อน และยังช่วยในการหาปริพันธ์ได้ดียิ่งขึ้น

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

จงหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\int (x^2 + 3x + 5) dx$

2. $\int x(x + 3)^2 dx$

3. $\int 2x(x^2 + 12)^3 dx$

4. $\int (x^2 + 1)\sqrt{x^3 + 3x} dx$

5. $\int \frac{3 dx}{(3x - 1)^4}$

6. $\int \sqrt{7x - 4} dx$

7. $\int x\sqrt{(7 - 5x^2)^3} dx$

8. $\int \frac{\sqrt{1 + \cos 3x}}{\operatorname{cosec} 3x} dx$

9. $\int \sin^2 \theta \cos \theta (\sin^3 \theta + 4)^5 d\theta$

10. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$

11. $\int \frac{x^2 dx}{1 + 4x^3}$

12. $\int \frac{(3x^2 - 2) dx}{x^3 - 2x + 7}$

13. $\int \frac{e^x dx}{1 + 3e^x}$

14. $\int \frac{dx}{(x + 1) \ln(x + 1)}$

15. $\int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx$

16. $\int \frac{dx}{x \ln \sqrt{x}}$

17. $\int \frac{\sin 4x}{1 + \sin^2 2x} dx$

18. $\int \frac{dx}{(1 + x^2) \arctan x}$

19. $\int 8^{3x} dx$

20. $\int e^{4x-3} dx$

21. $\int xe^{3x^2-1} dx$

22. $\int (2x + 1) \cdot 3^{4x^2+4x} dx$

23. $\int \frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}} dx$

24. $\int \frac{e^{2\ln(2x-1)}}{2x-1} dx$

25. $\int (4^x + 4^{-x}) dx$

26. $\int \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x} dx$

27. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

28. $\int x^3 \sin(4x^4 + 7) dx$

29. $\int e^{2x} \sec e^{2x} dx$

$$30. \quad \int \frac{\cot\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$$

$$32. \quad \int x \sec x^2 \tan x^2 dx$$

$$34. \quad \int e^x \cos e^x \tan(\sin e^x) dx$$

$$36. \quad \int \frac{\sec(3\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx$$

$$38. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9 - (2x - 3)^2}}$$

$$40. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$$

$$31. \quad \int (x + 1) \sec^2(x^2 + 2x - 3) dx$$

$$33. \quad \int \frac{\cos(\tan \theta)}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$35. \quad \int \frac{\sin(\ln \sqrt{x})}{x} dx$$

$$37. \quad \int \frac{dx}{4x^2 + 25}$$

$$39. \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{16x^2 - 1}}$$

เอกสารอ้างอิง

- ธีระศักดิ์ อัจฉนนนท์. (2564). *แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ สกายบุ๊กส์.
- นนุช สุขวารี, พัชร เลิศวิจิตรศิลป์, กนกรัตน์ เสวตเศรณี, พันทิพย์ โตแก้ว, กันตภณ คูหาพัฒนกุล และกันย์ สุ่นยี่ขัน. (2556). *คณิตศาสตร์วิศวกรรม 1*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ แสงสว่างเวิลด์เพรสจำกัด.
- นนุช สุขวารี, พัชร เลิศวิจิตรศิลป์, สุขชัย ตันยอชฌาภูมิ, กนกรัตน์ เสวตเศรณี และมนตรี มาลีวงศ์. (2553). *เทคนิคอินทิเกรตและการประยุกต์*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ แสงสว่างเวิลด์เพรสจำกัด.
- มนัส ประสงค์. (ม.ป.ป.). *แคลคูลัส 1*. กรุงเทพฯ: ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.
- ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). *ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน*. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สหมิตรพรินติ้ง.
- วิริยะ ศิริขานนท์. (มปป). *แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร*. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.
- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus* (10th ed.). John Wiley & Sons. Ltd., New York, U.S.A.
- James, S. (2008). *Calculus: Early transcendentals* (6th ed.). Thomson Brooks/Cole.
- Swokowski, E. W., Olinick, M., & Pence, D. (1994). *Calculus of a single variable* (2nd ed.). PSW Publishing Company, Boston, U.S.A.
- Thomas, G. B., Jr., Weir, M. D., & Hass, J. R. (2013). *Thomas' calculus: Early transcendentals* (13th ed.). Pearson.

บทที่ 6

เทคนิคการหาปริพันธ์

ในบทที่ผ่านมา ถึงแม้จะมีสูตรในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันและมีวิธีการแทนค่าตัวแปร u ในฟังก์ชันที่ซับซ้อน แต่ฟังก์ชันบางประเภทที่ซับซ้อนบางฟังก์ชันนั้น ไม่สามารถจัดรูปให้สอดคล้องกับสูตรที่ผ่านมาได้ ในบทนี้จะทำการศึกษาเทคนิคการหาปริพันธ์ซึ่งมีหลากหลายวิธี โดยที่แต่ละวิธีนั้นจะมีความเหมาะสมกับฟังก์ชันในรูปแบบที่แตกต่างกันไป ดังนั้นก่อนที่จะศึกษาเทคนิคต่าง ๆ ในบทนี้ ผู้เรียนควรมีทักษะในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรให้มีความชำนาญ ซึ่งจะเป็นพื้นฐานต่อยอดไปสู่การศึกษาเทคนิคต่าง ๆ ได้ดียิ่งขึ้น

6.1 การหาปริพันธ์ทีละส่วน (Integration by parts)

การหาปริพันธ์ทีละส่วน เป็นเทคนิคที่ใช้ในการหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$\int f(x)g(x) dx$$

โดยมีเงื่อนไขว่า $f(x)$ จะต้องเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ในขณะที่ $g(x)$ จะต้องเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้

กำหนดให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ ต่างเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของตัวแปรอิสระ x ดังนั้น ค่าเชิงอนุพันธ์ของ uv คือ

$$d(uv) = u dv + v du$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$u dv = d(uv) - v du$$

หาปริพันธ์ทั้งสองข้าง

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du$$

จะได้

$$\int u dv = uv - \int v du$$

เรียกสมการข้างต้นว่า **ปริพันธ์ทีละส่วน** (integration by parts)

เทคนิคการหาปริพันธ์ที่ละส่วน เมื่อพิจารณาจากสูตรจะสังเกตว่าฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์ หรือโจทย์จะอยู่ในรูปของ $\int u dv$ และสิ่งสำคัญของเทคนิคนี้คือคำตอบที่ต้องการจะอยู่ในรูปของ $\int v du$ แสดงว่าในส่วนของคำตอบนี้ ผู้เรียนจะต้องอาศัยการหาปริพันธ์โดยใช้สูตรที่ได้เรียนมาก่อนหน้านี้ หรืออาจจะใช้เทคนิคการหาปริพันธ์อื่น ๆ เข้ามาช่วยเหลือในการหาคำตอบ โดยมีหลักการในการหาปริพันธ์ที่ละส่วนดังนี้

หลักการในการหาปริพันธ์ที่ละส่วน

1. แบ่งฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์ออกเป็น 2 ส่วน คือ u และ dv โดยมีเงื่อนไขว่า dv จะต้องหาปริพันธ์ได้ (หรือ dv เป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อน) และ dx อยู่ในรูปของ dv
2. จาก u จะทำการหาค่าเชิงอนุพันธ์ du และจาก dv จะทำการหาปริพันธ์ $\int dv = v$
3. แทนค่า u, v, du, dv ลงในสมการปริพันธ์ที่ละส่วน
4. ทำการหาปริพันธ์ $\int v du$ (ในบางครั้ง อาจจะต้องใช้ปริพันธ์ที่ละส่วนซ้ำ)

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.1 จงหา $\int x^2 \ln x dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x$ $dv = x^2 dx$

ดังนั้น $du = d(\ln x)$ $v = \int x^2 dx$ สูตร $\int x^n dx$

$= \frac{1}{x} dx$ $= \frac{x^3}{3}$

จากสูตร $\int u dv = uv - \int v du$

ดังนั้น $\int x^2 \ln x dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$ สูตร $\int x^n dx$

$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$

$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c$

$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$ ■

ตัวอย่าง 6.2 จงหา $\int x \log_4 x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \log_4 x$ $dv = x \, dx$

ดังนั้น $du = d(\log_4 x)$ $v = \int x \, dx$

$= \frac{1}{x} \log_4 e \, dx$ $= \frac{x^2}{2}$

จากสูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

ดังนั้น $\int x \log_4 x \, dx = \log_4 x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \log_4 e \, dx$

$= \frac{1}{2} x^2 \log_4 x - \frac{1}{2} \log_4 e \int x \, dx$

$= \frac{1}{2} x^2 \log_4 x - \frac{1}{2} \log_4 e \cdot \frac{x^2}{2} + c$

$= \frac{1}{2} x^2 \log_4 x - \frac{1}{4} x^2 \log_4 e + c$ ■

ตัวอย่าง 6.3 จงหา $\int x e^x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x$ $dv = e^x \, dx$

ดังนั้น $du = dx$ $v = \int e^x \, dx$

$= e^x$

จากสูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

ดังนั้น $\int x e^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx$

$= x e^x - e^x + c$ ■

ตัวอย่าง 6.4 จงหา $\int \arcsin x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \arcsin x$ $dv = dx$

ดังนั้น $du = d(\arcsin x)$ $v = \int dx$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $= x$

จากสูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

ดังนั้น $\int \arcsin x \, dx = \arcsin x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

ให้ $u = 1 - x^2$ $d(1 - x^2) = -2x dx$
 $\frac{d(1 - x^2)}{-2} = x dx$

$\int \arcsin x \, dx = \arcsin x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= x \arcsin x - \int (1 - x^2)^{-1/2} (x dx)$

สูตร $\int u^n \, du, u = 1 - x^2$

$= x \arcsin x - \int (1 - x^2)^{-1/2} \frac{d(1 - x^2)}{-2}$

$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1 - x^2)^{-1/2} d(1 - x^2)$

$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$

$= x \arcsin x + (1 - x^2)^{1/2} + c$

$= x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$ ■

ตัวอย่าง 6.5 จงหา $\int x^2 e^x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2$ $dv = e^x \, dx$

ดังนั้น $du = d(x^2)$ $v = \int e^x \, dx$

สูตร $\int e^x \, dx$

$= 2x \, dx$ $= e^x$

จากสูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

ดังนั้น $\int x^2 e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x \, dx$

$= x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$ ----(*)

พิจารณา $\int x e^x \, dx$ โดยใช้ปริพันธ์ทีละส่วน

ให้ $u = x$ $dv = e^x \, dx$

ดังนั้น $du = dx$ $v = \int e^x \, dx$

สูตร $\int e^x \, dx$

$= e^x$

จากสูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

ดังนั้น $\int x e^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx$ (นำไปแทนค่าในสมการ *)

จาก $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$

ดังนั้น $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \left[x e^x - \int e^x dx \right]$ สูตร $\int e^x dx$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

ตัวอย่าง 6.6 จงหา $\int x^2 \sin x dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2$ $dv = \sin x dx$ สูตร $\int \sin x dx$

ดังนั้น $du = d(x^2)$ $v = \int \sin x dx$

$$= 2x dx$$

$$= -\cos x$$

จากสูตร $\int u dv = uv - \int v du$

ดังนั้น $\int x^2 \sin x dx = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 2x dx$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx \quad \text{----} (*)$$

พิจารณา $\int x \cos x dx$ โดยใช้ปริพันธ์ทีละส่วน

ให้ $u = x$ $dv = \cos x dx$ สูตร $\int \cos x dx$

ดังนั้น $du = dx$ $v = \int \cos x dx$

$$= \sin x$$

จากสูตร $\int u dv = uv - \int v du$

ดังนั้น $\int x \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx$ (นำไปแทนค่าในสมการ *)

จาก $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$ สูตร $\int \sin x dx$

ดังนั้น $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x dx \right]$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2(-\cos x) + c$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

ตัวอย่าง 6.7 จงหา $\int e^x \cos 2x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = e^x$ ให้ $u = 2x$, $d(2x) = 2dx$
 $\frac{d(2x)}{2} = dx$

ดังนั้น $du = d(e^x)$ $dv = \cos 2x \, dx$

$= e^x \, dx$ $v = \int \cos 2x \, dx$

สูตร $\int \cos u \, du$, $u = 2x$ $= \int \cos 2x \frac{d(2x)}{2}$

$= \frac{1}{2} \sin 2x$ $= \frac{1}{2} \sin 2x$

จากสูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

ดังนั้น $\int e^x \cos 2x \, dx = e^x \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x \cdot e^x \, dx$

$= \frac{1}{2} e^x \sin 2x - \frac{1}{2} \int e^x \sin 2x \, dx \quad \text{----} (*)$

พิจารณา $\int e^x \sin 2x \, dx$ โดยใช้ปริพันธ์ทีละส่วน

ให้ $u = e^x$ ให้ $u = 2x$, $d(2x) = 2dx$
 $\frac{d(2x)}{2} = dx$

ดังนั้น $du = d(e^x)$ $dv = \sin 2x \, dx$

$= e^x \, dx$ $v = \int \sin 2x \, dx$

สูตร $\int \sin u \, du$, $u = 2x$ $= \int \sin 2x \frac{d(2x)}{2}$

$= -\frac{1}{2} \cos 2x$ $= -\frac{1}{2} \cos 2x$

จากสูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

ดังนั้น $\int e^x \sin 2x \, dx = e^x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) \cdot e^x \, dx$

$= -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x \, dx$

(นำไปแทนค่าในสมการ *)

จาก $\int e^x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} e^x \sin 2x - \frac{1}{2} \int e^x \sin 2x \, dx$

ดังนั้น $\int e^x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} e^x \sin 2x - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x \, dx \right)$

$= \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x - \frac{1}{4} \int e^x \cos 2x \, dx$

นำ $\frac{1}{4} \int e^x \cos 2x \, dx$ บวกตลอดสมการ จะได้

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right) \int e^x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x$$

$$\frac{5}{4} \int e^x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x$$

นำ $\frac{4}{5}$ คูณตลอดสมการ จะได้

$$\begin{aligned} \int e^x \cos 2x \, dx &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} e^x \cos 2x \\ &= \frac{2}{5} e^x \sin 2x + \frac{1}{5} e^x \cos 2x + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

จากตัวอย่างข้างต้น ในการหาปริพันธ์ทีละส่วน ผู้เรียนจะต้องเลือก u และ dv ที่สอดคล้องกับเทคนิคโดยจะอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบที่แตกต่างกัน คือ

L: ฟังก์ชันลอการิทึม

I: ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

A: ฟังก์ชันพีชคณิต

T: ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

E: ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

จะเรียกเทคนิคการเลือก u และ dv ในการหาปริพันธ์ทีละส่วนนี้ว่า “LIATE” โดยจะให้ u เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันที่อยู่ลำดับก่อนหน้า (หรือทางซ้ายมือ) และ dv จะเป็นฟังก์ชันที่อยู่ลำดับหลัง (หรือทางขวามือ) ของ LIATE สังเกตว่าในการพิจารณาลำดับนี้ “อาจไม่ถูกต้องทุกครั้ง” ทั้งนี้ทั้งนั้น ขึ้นอยู่กับรูปแบบของฟังก์ชันที่ใช้เทคนิคนี้ อย่างไรก็ตามการใช้ LIATE ก็มีความถูกต้องมากพอและยังเป็นเครื่องมือที่ช่วยในการตัดสินใจได้ดีอีกด้วย

จากตัวอย่าง 6.1 $\int x^2 \ln x \, dx$ จะสังเกตเห็นว่าจากโจทย์มี x^2 เป็นฟังก์ชันพีชคณิต (A)

และ $\ln x$ เป็นฟังก์ชันลอการิทึม (L) ซึ่งตัว “L” มาก่อนตัว “A” ดังนั้น ให้ $u = \ln x$ และ $dv = x^2 dx$ ซึ่งจะเห็นว่าสามารถทำการหาปริพันธ์ทีละส่วนได้ตามขั้นตอน ดังนั้นผู้เรียนสามารถนำ LIATE ไปช่วยในการตัดสินใจในการเลือก u และ dv เพื่อนำไปใช้ในการหาปริพันธ์ทีละส่วนได้

6.1.1 การหาปริพันธ์ที่ละส่วนโดยใช้ตาราง (Tabular integration by parts)

ในการหาปริพันธ์ที่ละส่วนที่อยู่ในรูป

$$\int p(x)f(x) dx$$

เมื่อ $p(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม จะสามารถหาปริพันธ์ที่ละส่วนได้อีกวิธีหนึ่ง เรียกว่าการหาปริพันธ์ที่ละส่วนโดยใช้ตาราง ซึ่งเหมาะกับการหาปริพันธ์ เนื่องจากฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบนี้จะต้องหาปริพันธ์ที่ละส่วนหลายรอบ ดังตัวอย่าง 6.5 และ ตัวอย่าง 6.6 ซึ่งอยู่ในรูป $\int p(x)f(x) dx$ ดังนั้นสามารถหาปริพันธ์ที่ละส่วนโดยใช้ตารางได้โดยหลักการดังต่อไปนี้

หลักการในการหาปริพันธ์ที่ละส่วนโดยใช้ตาราง

1. ให้ $u = p(x)$ และ $dv = f(x)dx$
2. หาอนุพันธ์ของ $p(x)$ จนกระทั่งมีค่าเป็น 0 ใส่ไว้ในคอลัมน์ที่หนึ่ง
3. หาปริพันธ์ของ $f(x)$ เท่าจำนวนของการหาอนุพันธ์ ใส่ไว้ในคอลัมน์ที่สอง
4. เขียนลูกศรแยกลง จากคอลัมน์ที่หนึ่งไปยังคอลัมน์ที่สอง
5. เขียนเครื่องหมาย + และ - สลับกันในแต่ละลูกศร โดยเริ่มต้นที่เครื่องหมาย +
6. ทำการคูณฟังก์ชันที่อยู่ในคอลัมน์ที่หนึ่งและคอลัมน์ที่สองตามลูกศร โดยถ้าลูกศรมีเครื่องหมาย + ให้ทำการคูณด้วย +1 และถ้าลูกศรมีเครื่องหมาย - ให้ทำการคูณด้วย -1 ผลรวมของผลลัพธ์ข้างต้น จะเป็นคำตอบของการหาปริพันธ์

จาก LIATE จะเห็นได้ว่าการหาปริพันธ์ที่ละส่วนโดยใช้ตาราง $p(x)$ จะเป็นฟังก์ชันพีชคณิต (A) ส่วน $f(x)$ จะเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ (T) หรือฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (E) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.8 จงหา $\int x^2 e^{4x} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2$ และ $dv = e^{4x} dx$ การหาปริพันธ์ที่ละส่วนโดยใช้ตารางแสดงได้ดังนี้

D		I
x^2	+	e^{4x}
$2x$	-	$\frac{1}{4}e^{4x}$
2	+	$\frac{1}{16}e^{4x}$
0	-	$\frac{1}{64}e^{4x}$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad \int x^2 e^{4x} dx &= x^2 \cdot \frac{1}{4} e^{4x} - 2x \cdot \frac{1}{16} e^{4x} + 2 \cdot \frac{1}{64} e^{4x} + c \\
 &= \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{8} x e^{4x} + \frac{1}{32} e^{4x} + c
 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 6.9 จงหา $\int (x^3 - 4x + 5) \sin 2x dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^3 - 4x + 5$ และ $dv = \sin 2x dx$ การหาปริพันธ์ทีละส่วนโดยใช้ตารางแสดงได้ดังนี้

D		I
$x^3 - 4x + 5$	+	$\sin 2x$
$3x^2 - 4$	-	$-\frac{1}{2} \cos 2x$
$6x$	+	$-\frac{1}{4} \sin 2x$
6	-	$\frac{1}{8} \cos 2x$
0	+	$\frac{1}{16} \sin 2x$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad & \int (x^3 - 4x + 5) \sin 2x dx \\
 &= (x^3 - 4x + 5) \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) - (3x^2 - 4) \left(-\frac{1}{4} \sin 2x \right) + 6x \cdot \frac{1}{8} \cos 2x \\
 &\quad - 6 \cdot \frac{1}{16} \sin 2x + c \\
 &= -\frac{1}{2} (x^3 - 4x + 5) \cos 2x + \frac{1}{4} (3x^2 - 4) \sin 2x + \frac{3}{4} x \cos 2x \\
 &\quad - \frac{3}{8} \sin 2x + c
 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 6.10 จงหา $\int (1 + x - x^2) \cos 3x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 1 + x - x^2$ และ $dv = \cos 3x \, dx$ การหาปริพันธ์ทีละส่วนโดยใช้ตารางแสดงได้ดังนี้

D		I
$1 + x - x^2$		$\cos 3x$
$1 - 2x$	+	$\frac{1}{3} \sin 3x$
-2	-	$-\frac{1}{9} \cos 3x$
0	+	$-\frac{1}{27} \sin 3x$

ดังนั้น $\int (1 + x - x^2) \cos 3x \, dx$

$$= (1 + x - x^2) \left(\frac{1}{3} \sin 3x \right) - (1 - 2x) \left(-\frac{1}{9} \cos 3x \right) + (-2) \left(-\frac{1}{27} \sin 3x \right) + c$$

$$= \frac{1}{3} (1 + x - x^2) \sin 3x + \frac{1}{9} (1 - 2x) \cos 3x + \frac{2}{27} \sin 3x + c \quad \blacksquare$$

6.2 การหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง (Integration by trigonometric power)

จากที่ผู้เรียนได้ศึกษาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติไปแล้วนั้น พบว่าสูตรที่ใช้ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ นั้น ยังคงเป็นฟังก์ชันพื้นฐานทั้ง 6 ฟังก์ชัน และเป็นสูตรที่มาจากรูปแบบการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชัน ซึ่งยังคงไม่ครอบคลุมกับการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในหัวข้อนี้ จะศึกษาลักษณะของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูปผลคูณหรือในรูปยกกำลัง โดยพื้นฐานสำคัญสำหรับเทคนิคนี้คือฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

6.2.1 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูป $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูป $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ โดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก หรือศูนย์ จะพิจารณากรณี m, n ที่เป็นจำนวนคู่ จำนวนคี่ ดังนี้

กรณี m เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่า $m = 2k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\sin^m x &= \sin^{2k} x \cdot \sin x \\ &= (\sin^2 x)^k \sin x\end{aligned}$$

ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ จะได้

$$\sin^m x = (1 - \cos^2 x)^k \sin x$$

ให้ $u = \cos x$ จะได้ $d(\cos x) = -\sin x dx$ ดังนั้น

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = - \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x)$$

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.11 จงหา $\int \sin x \cos^4 x dx$

วิธีทำ ให้ $u = \cos x$, $du = d(\cos x) = -\sin x dx$

$$-d(\cos x) = \sin x dx$$

$$\text{ดังนั้น } \int \sin x \cos^4 x dx = - \int \cos^4 x d(\cos x)$$

$$= - \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

สูตร $\int u^n du, u = \cos x$

ตัวอย่าง 6.12 จงหา $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

วิธีทำ ให้ $u = \cos x$, $du = d(\cos x) = -\sin x dx$

$$-d(\cos x) = \sin x dx$$

$$\text{จาก } \int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \sin x \cos^2 x dx$$

$$\text{ดังนั้น } \int \sin^3 x \cos^2 x dx = - \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x d(\cos x)$$

$$= - \int (\cos^2 x - \cos^4 x) d(\cos x)$$

$$= - \left(\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} \right) + c$$

$$= - \frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

สูตร $\int u^n du, u = \cos x$

ตัวอย่าง 6.13 จงหา $\int \sin^5 2x \cos^4 2x dx$

วิธีทำ ให้ $u = \cos 2x$, $du = d(\cos 2x) = -2 \sin 2x dx$

$$-\frac{d(\cos 2x)}{2} = \sin 2x dx$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } \int \sin^5 2x \cos^4 2x dx &= \int \sin^4 2x \sin 2x \cos^4 2x dx \\ &= \int (\sin^2 2x)^2 \cos^4 2x \sin 2x dx \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \int \sin^5 2x \cos^4 2x dx = -\int (1 - \cos^2 2x)^2 \cos^4 2x \frac{d(\cos 2x)}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \int (1 - 2\cos^2 2x + \cos^4 2x) \cos^4 2x d(\cos 2x)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \int (\cos^4 2x - 2\cos^6 2x + \cos^8 2x) d(\cos 2x) \\ &\quad \boxed{\text{สูตร } \int u^n du, u = \cos 2x} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos^5 2x}{5} - \frac{2\cos^7 2x}{7} + \frac{\cos^9 2x}{9} \right) + c$$

$$= -\frac{\cos^5 2x}{10} + \frac{\cos^7 2x}{7} - \frac{\cos^9 2x}{18} + c \quad \blacksquare$$

กรณี n เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่า $n = 2k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \cos^n x &= \cos^{2k} x \cdot \cos x \\ &= (\cos^2 x)^k \cos x \end{aligned}$$

ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ จะได้

$$\cos^n x = (1 - \sin^2 x)^k \cos x$$

ให้ $u = \sin x$ จะได้ $d(\sin x) = \cos x dx$ ดังนั้น

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k d(\sin x)$$

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.14 จงหา $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sin x$, $du = d(\sin x) = \cos x \, dx$

$$\text{จาก } \int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x \, dx$$

$$\text{ดังนั้น } \int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x)$$

$$\begin{aligned} & \boxed{\text{สูตร } \int u^n \, du, u = \sin x} = \int (\sin^4 x - \sin^6 x) d(\sin x) \\ & = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 6.15 จงหา $\int \sin^4 3x \cos^5 3x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sin 3x$, $du = d(\sin 3x) = 3 \cos 3x \, dx$

$$\frac{d(\sin 3x)}{3} = \cos 3x \, dx$$

$$\text{จาก } \int \sin^4 3x \cos^5 3x \, dx = \int \sin^4 3x (\cos^2 3x)^2 \cos 3x \, dx$$

$$\text{ดังนั้น } \int \sin^4 3x \cos^5 3x \, dx = \int \sin^4 3x (1 - \sin^2 3x)^2 \frac{d(\sin 3x)}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \int \sin^4 3x (1 - 2\sin^2 3x + \sin^4 3x) d(\sin 3x)$$

$$= \frac{1}{3} \int (\sin^4 3x - 2\sin^6 3x + \sin^8 3x) d(\sin 3x)$$

$$\begin{aligned} & \boxed{\text{สูตร } \int u^n \, du, u = \sin 3x} = \frac{1}{3} \left(\frac{\sin^5 3x}{5} - \frac{2\sin^7 3x}{7} + \frac{\sin^9 3x}{9} \right) + c \\ & = \frac{\sin^5 3x}{15} - \frac{2\sin^7 3x}{21} + \frac{\sin^9 3x}{27} + c \end{aligned}$$

■

จากตัวอย่าง 6.15 จะเห็นว่าเลขชี้กำลังยิ่งมาก ยิ่งทำได้ยาก ดังนั้นในกรณีที่ตัวเลขชี้กำลังของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์เป็นจำนวนคี่ทั้งคู่ จะพิจารณาในกรณีที่เลขชี้กำลังเป็นเลขคี่ที่น้อยที่สุดเป็นหลัก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.16 จงหา $\int \sin^5 x \cos^3 x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sin x$, $du = d(\sin x) = \cos x \, dx$

$$\text{จาก } \int \sin^5 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^5 x \cos^2 x \cos x \, dx$$

$$\text{ดังนั้น } \int \sin^5 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^5 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x)$$

$$\begin{aligned} &= \int (\sin^5 x - \sin^7 x) d(\sin x) \\ &= \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + c \end{aligned}$$

■

กรณี m และ n เป็นจำนวนคู่

จะทำการลดกำลังของ m และ n ลง โดยใช้เอกลักษณ์

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{และ} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

สังเกตว่าหลังจากลดกำลังของ m และ n ลงแล้ว ฟังก์ชันที่ได้จะอยู่ในรูปของฟังก์ชันโคไซน์ ดังนั้น จะใช้สูตร $\int \cos u \, du$ ในการหาคำตอบสุดท้ายเป็นหลัก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.17 จงหา $\int \sin^2 4x \cos^2 4x \, dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \int \sin^2 4x \cos^2 4x \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 8x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 8x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 8x)(1 + \cos 8x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 8x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left[1 - \frac{1 + \cos 16x}{2} \right] dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left[1 - \frac{1}{2} - \frac{\cos 16x}{2} \right] dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos 16x}{2} \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 4x \cos^2 4x dx &= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 16x dx \\
 &\stackrel{\text{สูตร } \int dx}{=} \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 16x \frac{d(16x)}{16} \\
 &= \frac{1}{8} x - \frac{1}{128} \sin 16x + c
 \end{aligned}$$

■

ให้ $u = 16x$, $d(16x) = 16dx$
 $\frac{d(16x)}{16} = dx$

สูตร $\int \cos u du$, $u = 16x$

6.2.2 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูป $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$,
 $\int \cos mx \cos nx dx$

ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ โดยที่มุมของฟังก์ชันไม่เท่ากัน จะทำการจัดรูปใหม่ โดยใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติดังนี้

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

หลังจากนั้นจึงทำการหาปริพันธ์ด้วยสูตร $\int \sin u du$ และ $\int \cos u du$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.18 จงหา $\int \sin 5x \cos 3x dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \int \sin 5x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(5x+3x) + \sin(5x-3x)] dx \\
 &\stackrel{\text{ให้ } u=8x, \frac{d(8x)}{8}=dx}{=} \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin 2x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \sin 8x dx + \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \\
 &\stackrel{\text{สูตร } \int \sin u du}{=} \frac{1}{2} \int \sin 8x \frac{d(8x)}{8} + \frac{1}{2} \int \sin 2x \frac{d(2x)}{2} \\
 &= -\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{4} \cos 2x + c
 \end{aligned}$$

■

ให้ $u = 8x$, $d(8x) = 8dx$
 $\frac{d(8x)}{8} = dx$

ให้ $u = 2x$, $d(2x) = 2dx$
 $\frac{d(2x)}{2} = dx$

ตัวอย่าง 6.19 จงหา $\int \cos 7x \cos 4x \, dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \int \cos 7x \cos 4x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos(7x + 4x) + \cos(7x - 4x)] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\cos 11x + \cos 3x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos 11x \, dx + \frac{1}{2} \int \cos 3x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos 11x \frac{d(11x)}{11} + \frac{1}{2} \int \cos 3x \frac{d(3x)}{3} \\ &= \frac{1}{22} \sin 11x + \frac{1}{6} \sin 3x + c \end{aligned}$$

6.2.3 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูป $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ หรือ

$$\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x \, dx$$

ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูป $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ หรือ $\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x \, dx$ โดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก หรือศูนย์ จะพิจารณากรณี m, n ที่เป็นจำนวนคู่ จำนวนคี่ ดังนี้

กรณี m เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่า $m = 2k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \tan^m x \sec^n x &= \tan^{2k} x \cdot \sec^{n-1} x (\tan x \sec x) \\ &= (\tan^2 x)^k \cdot \sec^{n-1} x (\tan x \sec x) \end{aligned}$$

ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ จะได้

$$\tan^m x \sec^n x = (\sec^2 x - 1)^k \cdot \sec^{n-1} x (\tan x \sec x)$$

ให้ $u = \sec x$ จะได้ $d(\sec x) = \sec x \tan x \, dx$ ดังนั้น

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx = \int (\sec^2 x - 1)^k \cdot \sec^{n-1} x \, d(\sec x)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x \, dx = - \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)^k \cdot \operatorname{cosec}^{n-1} x \, d(\operatorname{cosec} x)$$

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.20 จงหา $\int \tan^3 x \sec^5 x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sec x$, $du = d(\sec x) = \sec x \tan x \, dx$

$$\text{จาก} \quad \int \tan^3 x \sec^5 x \, dx = \int \tan^2 x \sec^4 x (\tan x \sec x \, dx)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int \tan^3 x \sec^5 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec^4 x \, d(\sec x)$$

$$\begin{aligned} &= \int (\sec^6 x - \sec^4 x) \, d(\sec x) \\ &\stackrel{\text{สูตร } \int u^n \, du, u = \sec x}{=} = \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.21 จงหา $\int \cot^5 x \operatorname{cosec}^3 x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \operatorname{cosec} x$, $du = d(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x \, dx$

$$-d(\operatorname{cosec} x) = \operatorname{cosec} x \cot x \, dx$$

$$\text{จาก} \quad \int \cot^5 x \operatorname{cosec}^3 x \, dx = \int \cot^4 x \operatorname{cosec}^2 x (\cot x \operatorname{cosec} x \, dx)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int \cot^5 x \operatorname{cosec}^3 x \, dx = - \int (\cot^2 x)^2 \operatorname{cosec}^2 x \, d(\operatorname{cosec} x)$$

$$= - \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)^2 \operatorname{cosec}^2 x \, d(\operatorname{cosec} x)$$

$$= - \int (\operatorname{cosec}^4 x - 2 \operatorname{cosec} x + 1) \operatorname{cosec}^2 x \, d(\operatorname{cosec} x)$$

$$\stackrel{\text{สูตร } \int u^n \, du, u = \operatorname{cosec} x}{=} = - \int (\operatorname{cosec}^6 x - 2 \operatorname{cosec}^3 x + \operatorname{cosec} x) \, d(\operatorname{cosec} x)$$

$$= - \frac{\operatorname{cosec}^7 x}{7} + \frac{2 \operatorname{cosec}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{2} + c$$

$$= - \frac{\operatorname{cosec}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{cosec}^4 x}{2} - \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{2} + c$$

กรณี n เป็นจำนวนคู่

จะได้ว่า $n = 2k + 2$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ดังนั้น

$$\sec^n x = \sec^{2k} x \cdot \sec^2 x$$

$$= (\sec^2 x)^k \cdot \sec^2 x$$

ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ จะได้

$$\sec^n x = (1 + \tan^2 x)^k \cdot \sec^2 x$$

ให้ $u = \tan x$ จะได้ $d(\tan x) = \sec^2 x dx$ ดังนั้น

$$\int \tan^m x \sec^n x dx = \int \tan^m x (1 + \tan^2 x)^k d(\tan x)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x dx = - \int \cot^m x (1 + \cot^2 x)^k d(\cot x)$$

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.22 จงหา $\int \tan^4 3x \sec^4 3x dx$

วิธีทำ ให้ $u = \tan 3x$, $du = d(\tan 3x) = 3 \sec^2 3x dx$

$$\frac{d(\tan 3x)}{3} = \sec^2 3x dx$$

จาก $\int \tan^4 3x \sec^4 3x dx = \int \tan^4 3x \sec^2 3x (\sec^2 3x dx)$

ดังนั้น $\int \tan^4 3x \sec^4 3x dx = \int \tan^4 3x (1 + \tan^2 3x) \frac{d(\tan 3x)}{3}$

$$\begin{aligned} & \text{สูตร } \int u^n du, u = \tan 3x = \frac{1}{3} \int (\tan^4 3x + \tan^6 3x) d(\tan 3x) \\ & = \frac{1}{3} \left(\frac{\tan^5 3x}{5} + \frac{\tan^7 3x}{7} \right) + c \\ & = \frac{\tan^5 3x}{15} + \frac{\tan^7 3x}{21} + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.23 จงหา $\int \cot^2 2x \operatorname{cosec}^4 2x dx$

วิธีทำ ให้ $u = \cot 2x$, $du = d(\cot 2x) = -2 \operatorname{cosec}^2 2x dx$

$$-\frac{d(\cot 2x)}{2} = \operatorname{cosec}^2 2x dx$$

จาก $\int \cot^2 2x \operatorname{cosec}^4 2x dx = \int \cot^2 2x \operatorname{cosec}^2 2x (\operatorname{cosec}^2 2x dx)$

ดังนั้น $\int \cot^2 2x \operatorname{cosec}^4 2x dx = - \int \cot^2 2x (1 + \cot^2 2x) \frac{d(\cot 2x)}{2}$

$$\begin{aligned}
 \int \cot^2 2x \operatorname{cosec}^4 2x \, dx &= -\frac{1}{2} \int (\cot^2 2x + \cot^4 2x) d(\cot 2x) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\cot^3 2x}{3} + \frac{\cot^5 2x}{5} \right) + c \\
 &= -\frac{\cot^3 2x}{4} - \frac{\cot^5 2x}{10} + c
 \end{aligned}$$

■

ในกรณีที่ตัวยกกำลัง m เป็นจำนวนคี่ และ n เป็นจำนวนคู่ จะพิจารณาในกรณีที่เลขชี้กำลัง m หรือ n ที่น้อยที่สุดเป็นหลัก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.24 จงหา $\int \tan^7 2x \sec^6 2x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \tan 2x$, $du = d(\tan 2x) = \sec^2 2x \, dx$

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\tan 2x)}{2} &= \sec^2 2x \, dx \\
 \text{จาก } \int \tan^7 2x \sec^6 2x \, dx &= \int \tan^7 2x \sec^4 2x (\sec^2 2x \, dx) \\
 &= \int \tan^7 2x (\sec^2 2x)^2 (\sec^2 2x \, dx) \\
 \text{ดังนั้น } \int \tan^7 2x \sec^6 2x \, dx &= \int \tan^7 2x (1 + \tan^2 2x)^2 \frac{d(\tan 2x)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \tan^7 2x (1 + 2 \tan^2 2x + \tan^4 2x) d(\tan 2x) \\
 &= \frac{1}{2} \int (\tan^7 2x + 2 \tan^9 2x + \tan^{11} 2x) d(\tan 2x) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tan^8 2x}{8} + \frac{\tan^{10} 2x}{10} + \frac{\tan^{12} 2x}{12} \right) + c \\
 &= \frac{\tan^8 2x}{16} + \frac{\tan^{10} 2x}{20} + \frac{\tan^{12} 2x}{24} + c
 \end{aligned}$$

■

6.2.4 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูปยกกำลัง

ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูปยกกำลัง เช่น $\sin^n x$, $\cos^n x$ หากใช้วิธีก่อนหน้านั้นจะค่อนข้างยุ่งยากในการพิจารณากำลังที่เป็นเลขคู่หรือเลขคี่ เพื่อความสะดวกผู้เรียนสามารถใช้สูตรการหาปริพันธ์ดังสูตรต่อไปนี้

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx, \quad n \geq 2$$

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx, \quad n \geq 2$$

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \, dx, \quad n \geq 2$$

$$\int \cot^n x \, dx = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x \, dx, \quad n \geq 2$$

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan x \cdot \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx, \quad n > 2$$

$$\int \operatorname{cosec}^n x \, dx = -\frac{1}{n-1} \cot x \cdot \operatorname{cosec}^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2} x \, dx, \quad n > 2$$

พิสูจน์ ดูภาคผนวก

- หมายเหตุ
1. สูตรดังกล่าว เรียกว่าสูตรลดทอนในการหาปริพันธ์ (integration reduction formula)
 2. ในกรณีเลขชี้กำลังยังอยู่ในเงื่อนไขของการใช้สูตร สามารถใช้สูตรซ้ำได้จนกระทั่งไม่อยู่ในเงื่อนไข
 3. สูตรข้างต้น สามารถเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันเทียบตัวแปร u ได้ในทำนองเดียวกันกับสูตรการหาปริพันธ์อื่น ๆ ดังนี้

$$\int \sin^n u \, du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cdot \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u \, du, \quad n \geq 2$$

$$\int \cos^n u \, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \cdot \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du, \quad n \geq 2$$

$$\int \tan^n u \, du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u \, du, \quad n \geq 2$$

$$\int \cot^n u \, du = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u \, du, \quad n \geq 2$$

$$\int \sec^n u \, du = \frac{1}{n-1} \tan u \cdot \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du, \quad n > 2$$

$$\int \operatorname{cosec}^n u \, du = -\frac{1}{n-1} \cot u \cdot \operatorname{cosec}^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2} u \, du, \quad n > 2$$

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.25 จงหา $\int \sin^5 x \, dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \, dx &= -\frac{1}{5} \sin^4 x \cos x + \frac{4}{5} \int \sin^3 x \, dx \\ &= -\frac{1}{5} \sin^4 x \cos x + \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x + \frac{2}{3} \int \sin x \, dx \right) \\ &= -\frac{1}{5} \sin^4 x \cos x - \frac{4}{15} \sin^2 x \cos x + \frac{8}{15} \int \sin x \, dx \\ &= -\frac{1}{5} \sin^4 x \cos x - \frac{4}{15} \sin^2 x \cos x - \frac{8}{15} \cos x + c \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 6.26 จงหา $\int \tan^4 3x \, dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \int \tan^4 3x \, dx &= \frac{1}{3} \int \tan^4 3x \, d(3x) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \tan^3 3x - \int \tan^2 3x \, d(3x) \right) \\ &= \frac{1}{9} \tan^3 3x - \frac{1}{3} \int \tan^2 3x \, d(3x) \\ &= \frac{1}{9} \tan^3 3x - \frac{1}{3} \tan 3x + \frac{1}{3} \int d(3x) \\ &= \frac{1}{9} \tan^3 3x - \frac{1}{3} \tan 3x + \frac{1}{3} (3x) + c \\ &= \frac{1}{9} \tan^3 3x - \frac{1}{3} \tan 3x + x + c \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 6.27 จงหา $\int \sec^6 2x \, dx$

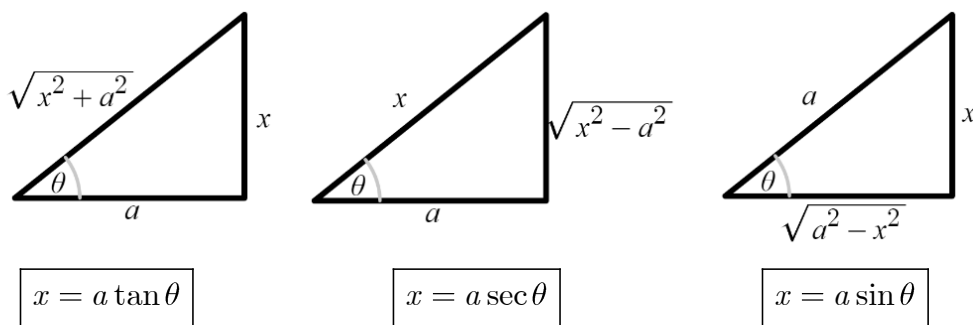
วิธีทำ
$$\begin{aligned} \int \sec^6 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int \sec^6 2x \, d(2x) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \tan 2x \sec^4 2x + \frac{4}{5} \int \sec^4 2x \, d(2x) \right) \\ &= \frac{1}{10} \tan 2x \sec^4 2x + \frac{2}{5} \int \sec^4 2x \, d(2x) \\ &= \frac{1}{10} \tan 2x \sec^4 2x + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{3} \tan 2x \sec^2 2x + \frac{2}{3} \int \sec^2 2x \, d(2x) \right) \end{aligned}$$

$$\text{สูตร } \int \sec^2 u \, du, u = 2x$$

$$\begin{aligned} \int \sec^6 2x \, dx &= \frac{1}{10} \tan 2x \sec^4 2x + \frac{2}{15} \tan 2x \sec^2 2x + \frac{4}{15} \int \sec^2 2x \, d(2x) \\ &= \frac{1}{10} \tan 2x \sec^4 2x + \frac{2}{15} \tan 2x \sec^2 2x + \frac{4}{15} \tan 2x + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6.3 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Integration by trigonometric substitutions)

การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือการเปลี่ยนตัวแปรที่ต้องการหาปริพันธ์ให้อยู่ในรูปของตรีโกณมิติ โดยอาศัยคุณสมบัติของสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งจะทำให้การแทนค่าตัวแปร x ด้วย $x = a \tan \theta$, $x = a \sec \theta$ และ $x = a \sin \theta$ ที่สอดคล้องกับ $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ และ $\sqrt{a^2 - x^2}$ ตามลำดับ แสดงได้ดังรูป 6.1



รูป 6.1 แสดงสามเหลี่ยมมุมฉากที่สอดคล้องกับ $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ และ $\sqrt{a^2 - x^2}$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ในการใช้เทคนิคการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะทำการพิจารณากรณีที่สอดคล้องกับฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อตัวถูกหาปริพันธ์ อยู่ในรูป $\sqrt{x^2 + a^2}$ เมื่อ $a > 0$

ให้ $x = a \tan \theta$ จะได้ $dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \sqrt{x^2 + a^2} &= \sqrt{a^2 \tan^2 \theta + a^2} \\ &= \sqrt{a^2 (\tan^2 \theta + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} \\
 &= a |\sec \theta| \\
 &= a \sec \theta
 \end{aligned}$$

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.28 จงหา $\int \sqrt{4x^2 + 9} \, dx$

วิธีทำ จาก
$$\begin{aligned}
 \sqrt{4x^2 + 9} &= \sqrt{4 \left(x^2 + \frac{9}{4} \right)} \\
 &= 2 \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2}
 \end{aligned}$$

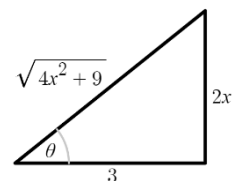
ให้ $x = \frac{3}{2} \tan \theta$ จะได้ $dx = \frac{3}{2} \sec^2 \theta \, d\theta$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

และ
$$\sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2} = \frac{3}{2} \sec \theta \text{ ดังนั้น}$$

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{4x^2 + 9} \, dx &= 2 \int \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2} \, dx \\
 &= 2 \int \frac{3}{2} \sec \theta \cdot \frac{3}{2} \sec^2 \theta \, d\theta \\
 &= \frac{9}{2} \int \sec^3 \theta \, d\theta \quad \left[\text{สูตร } \int \sec^n x \, dx \right] \\
 &= \frac{9}{2} \left(\frac{1}{2} \tan \theta \sec \theta + \frac{1}{2} \int \sec \theta \, d\theta \right) \quad \left[\text{สูตร } \int \sec x \, dx \right] \\
 &= \frac{9}{4} \tan \theta \sec \theta + \frac{9}{4} \int \sec \theta \, d\theta \\
 &= \frac{9}{4} \tan \theta \sec \theta + \frac{9}{4} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c
 \end{aligned}$$

จาก $x = \frac{3}{2} \tan \theta$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $\tan \theta = \frac{2}{3}x$ และ $\sec \theta = \frac{\sqrt{4x^2 + 9}}{3}$ ดังนั้น



$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{4x^2 + 9} \, dx &= \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} x \frac{\sqrt{4x^2 + 9}}{3} + \frac{9}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{4x^2 + 9}}{3} + \frac{2}{3} x \right| + c \\
 &= \frac{1}{2} x \sqrt{4x^2 + 9} + \frac{3}{4} \ln \left| \sqrt{4x^2 + 9} + 2x \right| + c \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 เมื่อตัวถูกหาปริพันธ์ อยู่ในรูป $\sqrt{x^2 - a^2}$ เมื่อ $a > 0$

ให้ $x = a \sec \theta$ จะได้ $dx = a \sec \theta \tan \theta \, d\theta$ เมื่อ $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad \sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} \\
 &= \sqrt{a^2 (\sec^2 \theta - 1)} \\
 &= \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} \\
 &= a \tan \theta
 \end{aligned}$$

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.29 จงหา $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2 - 9}}$ เมื่อ $x > \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \text{จาก} \quad \sqrt{16x^2 - 9} &= \sqrt{16 \left(x^2 - \frac{9}{16} \right)} \\
 &= 4 \sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{4} \right)^2}
 \end{aligned}$$

ให้ $x = \frac{3}{4} \sec \theta$ จะได้ $dx = \frac{3}{4} \sec \theta \tan \theta \, d\theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

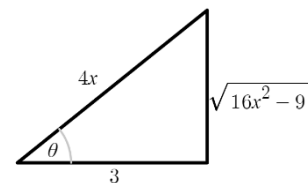
$$\text{และ} \quad \sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{4} \right)^2} = \frac{3}{4} \tan \theta \quad \text{ดังนั้น}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2 - 9}} = \int \frac{dx}{4 \sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{4} \right)^2}}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{16x^2 - 9}} &= \frac{1}{4} \int \frac{\frac{3}{4} \sec \theta \tan \theta d\theta}{\frac{3}{4} \tan \theta} \\
 &= \frac{1}{4} \int \sec \theta d\theta \quad \text{สูตร } \int \sec x dx \\
 &= \frac{1}{4} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c
 \end{aligned}$$

จาก $x = \frac{3}{4} \sec \theta$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $\sec \theta = \frac{4}{3}x$ และ $\tan \theta = \frac{\sqrt{16x^2 - 9}}{3}$ ดังนั้น



$$\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2 - 9}} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{4}{3}x + \frac{\sqrt{16x^2 - 9}}{3} \right| + c$$

■

กรณีที่ 3 เมื่อตัวถูกหาปริพันธ์ อยู่ในรูป $\sqrt{a^2 - x^2}$ เมื่อ $a > 0$

ให้ $x = a \sin \theta$ จะได้ $dx = a \cos \theta d\theta$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \\
 &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} \\
 &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \\
 &= a \cos \theta
 \end{aligned}$$

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.30 จงหา $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ เมื่อ $x < 1$

วิธีทำ ให้ $x = \sin \theta$ จะได้ $dx = \cos \theta d\theta$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $\sqrt{1-x^2} = \cos \theta$

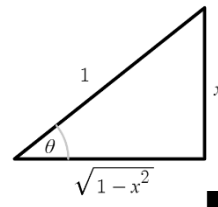
$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \cos \theta d\theta \\
 &= \int \sin^2 \theta d\theta \quad \text{สูตร } \int \sin^n x dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \int d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \theta + c\end{aligned}$$

จาก $x = \sin \theta$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $\sin \theta = x$, $\cos \theta = \sqrt{1-x^2}$ และ $\theta = \arcsin x$

$$\text{ดังนั้น } \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + c$$



จากการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อความสะดวกในการหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูป $x^2 + a^2$, $x^2 - a^2$, $a^2 - x^2$ สามารถใช้สูตรการหาปริพันธ์ดังสูตรต่อไปนี้

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$$

พิสูจน์ ดูภาคผนวก

หมายเหตุ สูตรข้างต้น สามารถเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันเทียบตัวแปร u ได้ในทำนองเดียวกันกับสูตรการหาปริพันธ์อื่น ๆ ดังนี้

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + c$$

$$\int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + c$$

$$\int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + c$$

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.31 จงหา $\int \sqrt{16 - x^2} dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \int \sqrt{16 - x^2} dx &= \int \sqrt{4^2 - x^2} dx && \text{สูตร } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{4^2 - x^2} + \frac{4^2}{2} \arcsin \frac{x}{4} + c \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{16 - x^2} + \frac{16}{2} \arcsin \frac{x}{4} + c \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{16 - x^2} + 8 \arcsin \frac{x}{4} + c \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.32 จงหา $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2 - 3^2}} && \text{ให้ } u = 2x, \quad d(2x) = 2dx \\ & && \frac{d(2x)}{2} = dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2 - 3^2}} && \text{สูตร } \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}}, u = 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}} &= \frac{1}{2} \ln \left| 2x + \sqrt{(2x)^2 - 3^2} \right| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| 2x + \sqrt{4x^2 - 9} \right| + c\end{aligned}$$

6.4 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย (Integration of rational functions by partial fractions)

ในการหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันตรรกยะ จะทำการพิจารณาฟังก์ชันตรรกยะที่อยู่ในรูปผลหารของฟังก์ชันพหุนาม 2 ฟังก์ชัน โดยเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนอย่างง่าย ตัวอย่างเช่น

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 3}$$

หากทำการหาปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้

$$\int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx = \int \frac{2}{x + 1} dx + \int \frac{3}{x - 3} dx$$

ซึ่งสมการด้านขวามือสามารถหาปริพันธ์ได้โดยง่ายโดยใช้สูตรที่เรียนมา

วิธีการในการเขียนฟังก์ชันตรรกยะ ให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนอย่างง่าย เรียกว่าการแยกเป็นเศษส่วนย่อย (partial fractions) โดยรูปแบบของเศษส่วนย่อยจะมีด้วยกัน 2 รูปแบบคือ

$$\frac{A}{(ax + b)^k} \quad \text{หรือ} \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

เมื่อ A, B เป็นค่าคงตัว และ $ax^2 + bx + c$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงได้

พิจารณา $\frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม จะทำการตรวจสอบดีกรีของ

$p(x)$ และ $q(x)$ ก่อน

- ถ้าดีกรีของ $p(x)$ มากกว่าหรือเท่ากับ $q(x)$ จะยังไม่สามารถใช้วิธีการแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ จะต้องทำการตั้งหารพหุนามก่อน
- ถ้าดีกรีของ $p(x)$ น้อยกว่า $q(x)$ สามารถที่จะใช้วิธีการแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้

ในการแยกตัวประกอบของ $q(x)$ แบ่งได้ 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ตัวประกอบของ $q(x)$ อยู่ในรูป $(ax + b)^k$ สามารถแยกเศษส่วนย่อยได้เป็น

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$$

เมื่อ $A_1, A_2, \dots, A_k$ เป็นค่าคงตัว

กรณีที่ 2 ตัวประกอบของ $q(x)$ อยู่ในรูป $(ax^2 + bx + c)^k$ และ $ax^2 + bx + c$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงได้ สามารถแยกเศษส่วนย่อยได้เป็น

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

เมื่อ $A_1, A_2, \dots, A_k$ และ $B_1, B_2, \dots, B_k$ เป็นค่าคงตัว

โดยมีหลักการในการหาปริพันธ์ดังนี้

หลักการในการหาปริพันธ์โดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อยของฟังก์ชัน $\frac{p(x)}{q(x)}$

1. ตรวจสอบดีกรีของ $p(x)$ และ $q(x)$ ก่อน ถ้าดีกรีของ $p(x)$ มากกว่าหรือเท่ากับดีกรีของ $q(x)$ จะต้องตั้งหารพหุนามก่อน
2. ถ้าดีกรีของ $p(x)$ น้อยกว่า $q(x)$ ให้ทำการแยกตัวประกอบ $q(x)$ ให้อยู่ในรูปตัวประกอบเชิงเส้น $(ax + b)^k$ หรือตัวประกอบกำลังสอง $(ax^2 + bx + c)^k$ โดยที่ตัวประกอบกำลังสองไม่สามารถแยกตัวประกอบเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงได้
3. เขียน $\frac{p(x)}{q(x)}$ ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อย
4. หาค่าคงตัวต่าง ๆ โดยวิธีการแทนค่าตัวแปรที่เหมาะสม หรือวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ หรือวิธีอื่น ๆ
5. หาค่าปริพันธ์ของเศษส่วนย่อยที่ได้

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.33 จงหา $\int \frac{x-8}{x^2-x-6} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$

$$\text{ให้} \quad \frac{x-8}{x^2-x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \quad \text{----} (*)$$

$$= \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x+2)(x-3)}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad x-8 = A(x-3) + B(x+2) \quad \text{----} (**)$$

แทน $x = -2$ ในสมการ (**),

$$-2-8 = A(-2-3) + \cancel{B(-2+2)}$$

$$-10 = -5A$$

$$A = \frac{-10}{-5} = 2$$

แทน $x = 3$ ในสมการ (**),

$$3-8 = \cancel{A(3-3)} + B(3+2)$$

$$-5 = 5B$$

$$B = \frac{-5}{5} = -1$$

แทนค่า $A = 2$, $B = -1$ ในสมการ (*) พร้อมหาปริพันธ์

$$\begin{aligned} \int \frac{x-8}{x^2-x-6} dx &= \int \left(\frac{2}{x+2} + \frac{-1}{x-3} \right) dx \quad \left[\text{ให้ } u = x-3, \quad d(x-3) = dx \right] \\ &= 2 \int \frac{1}{x+2} dx - \int \frac{1}{x-3} dx \quad \left[\text{ให้ } u = x+2, \quad d(x+2) = dx \right] \\ &= 2 \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{x-3} d(x-3) \quad \left[\text{สูตร } \int \frac{1}{u} du \right] \\ &= 2 \ln|x+2| - \ln|x-3| + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.34 จงหา $\int \frac{3x^2 + 3x - 2}{x(x^2 - 1)} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$

$$\text{ให้} \quad \frac{3x^2 + 3x - 2}{x(x^2 - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} \quad \text{----} (*)$$

$$= \frac{A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$$

ดังนั้น $3x^2 + 3x - 2 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1) \dots (**)$

แทน $x = 0$ ในสมการ (**),

$$\begin{aligned} 3(0)^2 + 3(0) - 2 &= A(0+1)(0-1) + \cancel{B(0)(0-1)} + \cancel{C(0)(0+1)} \\ -2 &= A(1)(-1) \\ &= -A \end{aligned}$$

$$A = \frac{-2}{-1} = 2$$

แทน $x = -1$ ในสมการ (**),

$$\begin{aligned} 3(-1)^2 + 3(-1) - 2 &= \cancel{A(-1+1)(-1-1)} + B(-1)(-1-1) \\ &\quad + \cancel{C(-1)(-1+1)} \\ 3 - 3 - 2 &= B(-1)(-2) \\ -2 &= 2B \end{aligned}$$

$$B = \frac{-2}{2} = -1$$

แทน $x = 1$ ในสมการ (**),

$$\begin{aligned} 3(1)^2 + 3(1) - 2 &= \cancel{A(1+1)(1-1)} + \cancel{B(1)(1-1)} + C(1)(1+1) \\ 3 + 3 - 2 &= C(1)(2) \\ 4 &= 2C \end{aligned}$$

$$C = \frac{4}{2} = 2$$

แทนค่า $A = 2$, $B = -1$, $C = 2$ ในสมการ (*) พร้อมหาปริพันธ์

$$\int \frac{3x^2 + 3x - 2}{x(x^2 - 1)} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x-1} \right) dx$$

$$\begin{aligned} &\text{ให้ } u = x+1, \quad d(x+1) = dx \quad \text{ให้ } u = x-1, \quad d(x-1) = dx \\ &= 2 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{สูตร } \int \frac{1}{u} du = 2 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} d(x+1) + 2 \int \frac{1}{x-1} d(x-1) \\ &= 2 \ln|x| - \ln|x+1| + 2 \ln|x-1| + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.35 จงหา $\int \frac{2x}{(x-1)(x^2-4)} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } \frac{2x}{(x-1)(x^2-4)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} \quad \text{----} (*) \\ &= \frac{A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-2)} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$2x = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2) \quad \text{---} (**)$$

แทน $x = 1$ ในสมการ (**),

$$2(1) = A(1+2)(1-2) + \cancel{B(1-1)(1-2)} + \cancel{C(1-1)(1+2)}$$

$$2 = A(3)(-1)$$

$$= -3A$$

$$A = -\frac{2}{3}$$

แทน $x = -2$ ในสมการ (**),

$$2(-2) = \cancel{A(-2+2)(-2-2)} + B(-2-1)(-2-2)$$

$$+ \cancel{C(-2-1)(-2+2)}$$

$$-4 = B(-3)(-4)$$

$$-4 = 12B$$

$$B = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

แทน $x = 2$ ในสมการ (**),

$$2(2) = A(2+2)(2-2) + B(2-1)(2-2) + C(2-1)(2+2)$$

$$4 = C(1)(4)$$

$$4 = 4C$$

$$C = \frac{4}{4} = 1$$

แทนค่า $A = -\frac{2}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = 1$ ในสมการ (*) พร้อมหาปริพันธ์

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x}{(x-1)(x^2-4)} dx &= \int \left(\frac{-2/3}{x-1} + \frac{-1/3}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right) dx \\
&= -\frac{2}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} dx + \int \frac{1}{x-2} dx \\
&= -\frac{2}{3} \int \frac{1}{x-1} d(x-1) - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} d(x+2) \\
&\quad + \int \frac{1}{x-2} d(x-2) \\
&= -\frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + \ln|x-2| + c \blacksquare
\end{aligned}$$

ให้ $u = x-1$, $d(x-1) = dx$
 ให้ $u = x+2$, $d(x+2) = dx$
 ให้ $u = x-2$, $d(x-2) = dx$
 สูตร $\int \frac{1}{u} du$

ตัวอย่าง 6.36 จงหา $\int \frac{x^2 - 6x + 12}{x(x-2)^2} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $(x-2)^2 = (x-2)(x-2)$

$$\begin{aligned}
\text{ให้ } \frac{x^2 - 6x + 12}{x(x-2)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \quad \text{----(*)} \\
&= \frac{A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx}{(x-1)(x+2)(x-2)}
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } x^2 - 6x + 12 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx \quad \text{----(**)}$$

แทน $x = 0$ ในสมการ (**),

$$(0)^2 - 6(0) + 12 = A(0-2)^2 + \cancel{B(0)(0-2)} + \cancel{C(0)}$$

$$12 = A(-2)^2$$

$$= 4A$$

$$A = \frac{12}{4} = 3$$

แทน $x = 2$ ในสมการ (**),

$$(2)^2 - 6(2) + 12 = \cancel{A(2-2)^2} + \cancel{B(2)(2-2)} + C(2)$$

$$4 - 12 + 12 = 2C$$

$$4 = 2C$$

$$C = \frac{4}{2} = 2$$

แทน $x = 1$, $A = 3$, $C = 2$ ในสมการ (**),

$$(1)^2 - 6(1) + 12 = 3(1-2)^2 + B(1)(1-2) + 2(1)$$

$$1 - 6 + 12 = 3(-1)^2 + B(1)(-1) + 2$$

$$7 = 3(1) - B + 2$$

$$5 = 3 - B$$

$$B = 3 - 5 = -2$$

แทนค่า $A = 3$, $B = -2$, $C = 2$ ในสมการ (*) พร้อมหาปริพันธ์

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 6x + 12}{x(x-2)^2} dx &= \int \left(\frac{3}{x} + \frac{-2}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} \right) dx \\ &= 3 \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{x-2} dx + 2 \int (x-2)^{-2} dx \\ &\stackrel{\text{สูตร } \int \frac{1}{u} du}{=} 3 \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{x-2} d(x-2) \\ &\quad + 2 \int (x-2)^{-2} d(x-2) \stackrel{\text{สูตร } \int u^n du}{=} \\ &= 3 \ln|x| - 2 \ln|x-2| + 2 \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c \\ &= 3 \ln|x| - 2 \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.37 จงหา $\int \frac{2x^2}{(x-1)(x^2+1)} dx$

วิธีทำ ให้
$$\frac{2x^2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad \text{----} (*)$$

$$= \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} 2x^2 &= A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) \\ &= Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C \\ &= (A+B)x^2 + (-B+C)x + (A-C) \quad \text{----} (**) \end{aligned}$$

เทียบสัมประสิทธิ์หน้า x ยกกำลัง ในสมการ (**),

$$2 = A + B \quad \text{----(1)}$$

$$0 = -B + C \quad \text{----(2)}$$

$$0 = A - C \quad \text{----(3)}$$

จาก (2) จะได้ $B = C$

จาก (3) จะได้ $A = C$

ดังนั้น $A = B = C$

แทน $A = B$ ในสมการ (1),

$$2 = B + B$$

$$= 2B$$

$$B = \frac{2}{2} = 1$$

ดังนั้น $A = 1$ และ $C = 1$

แทนค่า $A = 1, B = 1, C = 1$ ในสมการ (*) พร้อมหาปริพันธ์

$$\int \frac{2x^2}{(x-1)(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$\boxed{\text{ให้ } u = x-1, \quad d(x-1) = dx}$$

$$\boxed{\text{ให้ } u = x^2+1, \quad d(x^2+1) = 2x dx \\ \frac{1}{2} d(x^2+1) = x dx}$$

$$= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} (x dx) + \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$\boxed{\text{สูตร } \int \frac{dx}{x^2+a^2}}$$

$$= \int \frac{1}{x-1} d(x-1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} d(x^2+1) + \int \frac{1}{x^2+1^2} dx$$

$$= \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + \arctan x + c \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 6.38 จงหา $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{(x+1)(x^2+4)} dx$

วิธีทำ ให้ $\frac{x^2 - 3x + 1}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \quad \text{----(*)}$

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 3x + 1}{(x+1)(x^2+4)} &= \frac{A(x^2+4) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+4)} \\ \text{ดังนั้น} \quad x^2 - 3x + 1 &= A(x^2+4) + (Bx+C)(x+1) \\ &= Ax^2 + 4A + Bx^2 + Bx + Cx + C \\ &= (A+B)x^2 + (B+C)x + (4A+C) \quad \text{----}(**)\end{aligned}$$

เทียบสัมประสิทธิ์หน้า x ยกกำลัง ในสมการ (**),

$$1 = A + B \quad \text{----}(1)$$

$$-3 = B + C \quad \text{----}(2)$$

$$1 = 4A + C \quad \text{----}(3)$$

$$(1) - (2); \quad 4 = A - C \quad \text{----}(4)$$

$$(3) + (4); \quad 5 = 5A$$

$$A = \frac{5}{5} = 1$$

แทน $A = 1$ ใน (1); $1 = 1 + B$

$$B = 1 - 1 = 0$$

แทน $B = 0$ ใน (2); $-3 = 0 + C$

$$C = -3$$

แทนค่า $A = 1$, $B = 0$, $C = -3$ ในสมการ (*) พร้อมหาปริพันธ์

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 3x + 1}{(x+1)(x^2+4)} dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-3}{x^2+4} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x+1} dx - 3 \int \frac{1}{x^2+2^2} dx \\ \text{ให้ } u = x+1, \quad d(x+1) = dx &\quad \text{สูตร } \int \frac{dx}{x^2+a^2} \\ &= \int \frac{1}{x+1} d(x+1) - 3 \int \frac{1}{x^2+2^2} dx \\ \text{สูตร } \int \frac{1}{u} du &\quad \text{สูตร } \int \frac{dx}{x^2+a^2} \\ &= \ln|x+1| - \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + c \quad \blacksquare\end{aligned}$$

6.5 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตัวแปรใหม่ (Integration by substitution of a new variable)

ในการใช้เทคนิคการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตัวแปรใหม่ เหมาะกับการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $ax + b$ ที่มีเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วน โดยจะทำการแทนค่าตัวแปรใหม่ลงไป เพื่อให้อยู่ในรูปของตัวแปรที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก หลังจากนั้นจะสามารถทำการหาอนุพันธ์ได้โดยใช้วิธีการก่อนหน้านี้ที่ได้ศึกษามา โดยมีหลักการดังนี้

หลักการในการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตัวแปรใหม่

1. ให้ n เป็นตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น) ของตัวส่วนของเลขชี้กำลังทุกพจน์
2. สมมติให้ $z^n = ax + b$ จะได้ว่า $adx = d(ax + b) = nz^{n-1}dz$
3. เปลี่ยนตัวแปร x ให้อยู่ในรูปตัวแปร z
4. ทำการหาปริพันธ์
5. เปลี่ยนตัวแปรกลับ จากตัวแปร z ให้อยู่ในรูปตัวแปร x

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.39 จงหา $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$

วิธีทำ พิจารณา $\sqrt{x} = x^{1/2}$ และ $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ จะได้ว่า ค.ร.น ของ 2 และ 3 คือ 6

ให้ $x = z^6$ จะได้ว่า $dx = 6z^5 dz$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{6z^5 dz}{(z^6)^{1/2} + (z^6)^{1/3}} \\
 &= 6 \int \frac{z^5}{z^3 + z^2} dz \\
 &= 6 \int \frac{z^5}{z^2(z+1)} dz \\
 &= 6 \int \frac{z^3}{z+1} dz \\
 &= 6 \int \left(z^2 - z + 1 - \frac{1}{z+1} \right) dz
 \end{aligned}$$

หารพหุคูณ $\frac{z^3}{z+1}$

$$\begin{array}{r}
 z^3 \\
 z+1 \overline{) z^3 + z^2} \\
 \underline{z^3 + z^2} \\
 -z^2 - z \\
 \underline{-z^2 - z} \\
 z + 1 \\
 \underline{z + 1} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx &= 6 \int z^2 dz - 6 \int z dz + 6 \int dz - 6 \int \frac{1}{z+1} dz && \text{ให้ } u = z+1, \quad d(z+1) = dz \\
 &= 6 \int z^2 dz - 6 \int z dz + 6 \int dz - 6 \int \frac{1}{z+1} d(z+1) && \text{สูตร } \int \frac{1}{u} du \\
 &= 6 \cdot \frac{z^3}{3} - 6 \cdot \frac{z^2}{2} + 6z - 6 \ln|z+1| + c \\
 &= 2z^3 - 3z^2 + 6z - 6 \ln|z+1| + c && \text{แทน } z = x^{1/6} \\
 &= 2(x^{1/6})^3 - 3(x^{1/6})^2 + 6x^{1/6} - 6 \ln|x^{1/6} + 1| + c \\
 &= 2x^{1/2} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6} - 6 \ln|x^{1/6} + 1| + c \\
 &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + c \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.40 จงหา $\int \frac{x}{(x-1)^{4/3}} dx$

วิธีทำ พิจารณา $(x-1)^{1/3}$ ให้ $x-1 = z^3$ จะได้ว่า $x = z^3 - 1$ และ $dx = 3z^2 dz$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{(x-1)^{4/3}} dx &= \int \frac{z^3 - 1}{(z^3)^{4/3}} (3z^2 dz) \\
 &= 3 \int \frac{z^5 - z^2}{z^4} dz \\
 &= 3 \int \left(z - \frac{1}{z^2} \right) dz \\
 &= 3 \int z dz - 3 \int z^{-2} dz && \text{สูตร } \int x^n dx \\
 &= 3 \cdot \frac{z^2}{2} - 3 \cdot \frac{z^{-1}}{-1} + c \\
 &= \frac{3}{2} z^2 + \frac{3}{z} + c && \text{แทน } z = (x-1)^{1/3} \\
 &= \frac{3}{2} ((x-1)^{1/3})^2 + \frac{3}{(x-1)^{1/3}} + c \\
 &= \frac{3}{2} (x-1)^{2/3} + \frac{3}{(x-1)^{1/3}} + c \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

สรุปเนื้อหาในบทที่ 6

เทคนิคการหาปริพันธ์ คือเทคนิคที่ใช้ในการหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปแบบที่ซับซ้อน และไม่สามารถหาปริพันธ์โดยใช้สูตรพื้นฐานได้ โดยเทคนิคการหาปริพันธ์มีหลากหลายวิธี ซึ่งแต่ละวิธีจะมีความเหมาะสมกับฟังก์ชันในรูปแบบที่แตกต่างกันไป โดยสิ่งสำคัญคือการหาปริพันธ์ด้วยสูตรพื้นฐานที่ได้ศึกษามาก่อนหน้านี้

เทคนิคการหาปริพันธ์ที่ละส่วน ถือเป็นเทคนิคที่สำคัญอย่างยิ่ง เนื่องจากสูตรหลายสูตรได้มาจากการใช้เทคนิคนี้ โดยมีใจความสำคัญคือการเลือก u และ dv ให้สอดคล้องกับการใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ที่ละส่วน โดยที่ u ต้องหาอนุพันธ์ได้ และ dv จะต้องหาปริพันธ์ได้

ในกรณีที่ต้องการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในลักษณะผลคูณ หรืออยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ยกกำลัง จะใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง หรือการใช้สูตรลดทอน

ในกรณีที่ฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์อยู่ในรูปของรากที่ 2 ในบางครั้งไม่สามารถจัดรูปเพื่อใช้สูตรพื้นฐานได้ จะใช้เทคนิคการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งอาศัยคุณสมบัติของสามเหลี่ยมมุมฉากเข้ามาจัดรูป

ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน จะสังเกตได้ว่าไม่มีสูตรที่สอดคล้องกับการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ หรือฟังก์ชันที่อยู่ในรูปผลหาร เทคนิคที่ช่วยเหลือในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปผลหารของฟังก์ชันพหุนามนั้นคือเทคนิคการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย และอาศัยการเขียนรูปผลหารของพหุนามออกมาในรูปของเศษส่วนย่อย

ในการใช้เทคนิคการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตัวแปรใหม่ เหมาะกับการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $ax + b$ ที่มีเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วน โดยจะทำการแทนค่าตัวแปรใหม่ลงไป เพื่อให้อยู่ในรูปของตัวแปรที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\int x^3 \ln x \, dx$

1.2 $\int x \log x \, dx$

1.3 $\int \frac{\ln 3x}{x^2} \, dx$

1.4 $\int \arcsin 3x \, dx$

1.5 $\int \arccos x \, dx$

1.6 $\int \arctan x \, dx$

1.7 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$

1.8 $\int (x^3 - 5)e^{4x} \, dx$

1.9 $\int x^2 \sin(1-x) \, dx$

1.10 $\int e^{-2x} \cos 3x \, dx$

1.11 $\int e^x \sin x \, dx$

1.12 $\int e^{2x-3} \sin(1-x) \, dx$

2. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $\int \sin 7x \cos 3x \, dx$

2.2 $\int \cos(1-2x) \cos(2+x) \, dx$

2.3 $\int e^{3x} \sin(e^{3x}) \sin(2e^{3x}) \, dx$

2.4 $\int \sin^2 4x \cos^2 4x \, dx$

2.5 $\int \sin^4 4x \cos^3 4x \, dx$

2.6 $\int \sin^3 3x \cos^4 3x \, dx$

2.7 $\int \sin^6 3x \cos^5 3x \, dx$

2.8 $\int \sin^5 3x \cos^6 3x \, dx$

2.9 $\int \tan^3 3x \sec^2 3x \, dx$

2.10 $\int \cot^3 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

2.11 $\int \sin^4 2x \, dx$

2.12 $\int \cos^3 3x \, dx$

2.13 $\int \operatorname{cosec}^4 2x \, dx$

2.14 $\int \cot^5 3x \, dx$

3. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

3.1 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 25}}$

3.2 $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9 - 4x^2}}$

3.3 $\int \frac{x^2 \, dx}{7 - x^6}$

3.4 $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^2 - 16}}$

3.5 $\int \sqrt{4 - 9x^2} \, dx$

3.6 $\int \sqrt{x^2 + 4x} \, dx$

3.7 $\int \frac{6x \, dx}{9x^4 - 12x^2 - 12}$

3.8 $\int \frac{x \, dx}{7 + 12x^2 - 4x^4}$

4. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

$$4.1 \quad \int \frac{3x}{(x-1)(x+2)} dx$$

$$4.2 \quad \int \frac{5}{(x+2)(2x-1)} dx$$

$$4.3 \quad \int \frac{2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$$

$$4.4 \quad \int \frac{5x^2-3}{x(x+1)(x-1)} dx$$

$$4.5 \quad \int \frac{7x^2-5x+1}{x^2(x-1)} dx$$

$$4.6 \quad \int \frac{16x+11}{(3x-1)(x+2)^2} dx$$

$$4.7 \quad \int \frac{5x^2+4x+3}{(x+1)(x^2+1)} dx$$

$$4.8 \quad \int \frac{x^3+x+3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

5. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

$$5.1 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$$

$$5.2 \quad \int \frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$$

$$5.3 \quad \int \frac{dx}{x-x^{5/4}}$$

$$5.4 \quad \int \frac{x^2}{(x-1)^{4/3}} dx$$

$$5.5 \quad \int \frac{\sqrt{x^3-1}}{x} dx$$

$$5.6 \quad \int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

$$5.7 \quad \int x\sqrt{x-3} dx$$

$$5.8 \quad \int x^2\sqrt{2x+1} dx$$

เอกสารอ้างอิง

ธีระศักดิ์ อัจฉนนนท์. (2564). *แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ สกายบุ๊กส์.

นนุช สุขวารี, พัชร เลิศวิจิตรศิลป์, กนกรัตน์ เสวตเศรณี, พันทิพย์ โตแก้ว, กันตภณ คูหาพัฒนกุล และกันย์ สุ่นยี่ขัน. (2556). *คณิตศาสตร์วิศวกรรม 1*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ แสงสว่างเวิลด์เพรสจำกัด.

นนุช สุขวารี, พัชร เลิศวิจิตรศิลป์, สุขัย ตันยอชฌาวัณ, กนกรัตน์ เสวตเศรณี และมนตรี มาลีวงศ์. (2553). *เทคนิคอินทิเกรตและการประยุกต์*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ แสงสว่างเวิลด์เพรสจำกัด.

มนัส ประสงค์. (ม.ป.ป.). *แคลคูลัส 1*. กรุงเทพฯ: ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

มนัส ประสงค์. (2535). *แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 1*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). *ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน*. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สหมิตรพรินติ้ง.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus* (10th ed.). John Wiley & Sons. Ltd., New York, U.S.A.

Desmos. (n.d.). *Graphing Calculator*. <https://www.desmos.com/calculator>

James, S. (2008). *Calculus: Early transcendentals* (6th ed.). Thomson Brooks/Cole.

Thomas, G. B., Jr., Weir, M. D., & Hass, J. R. (2013). *Thomas' calculus: Early transcendentals* (13th ed.). Pearson.

บทที่ 7

ปริพันธ์จำกัดเขตและการประยุกต์

ในบทที่ 5 ได้กล่าวถึงปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน เป็นการหาค่าปริพันธ์ในช่วงหรือขอบเขตที่กำหนด โดยค่าของปริพันธ์จำกัดเขตจะเป็นตัวเลข ในบทนี้เราจะศึกษาถึงที่มาของปริพันธ์จำกัดเขต รวมถึงการนำปริพันธ์จำกัดเขตไปประยุกต์ใช้ในการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งและการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน

ก่อนที่จะนิยามปริพันธ์จำกัดเขต พิจารณาการแบ่งพื้นที่ใต้โค้งดังบทนิยาม 7.1

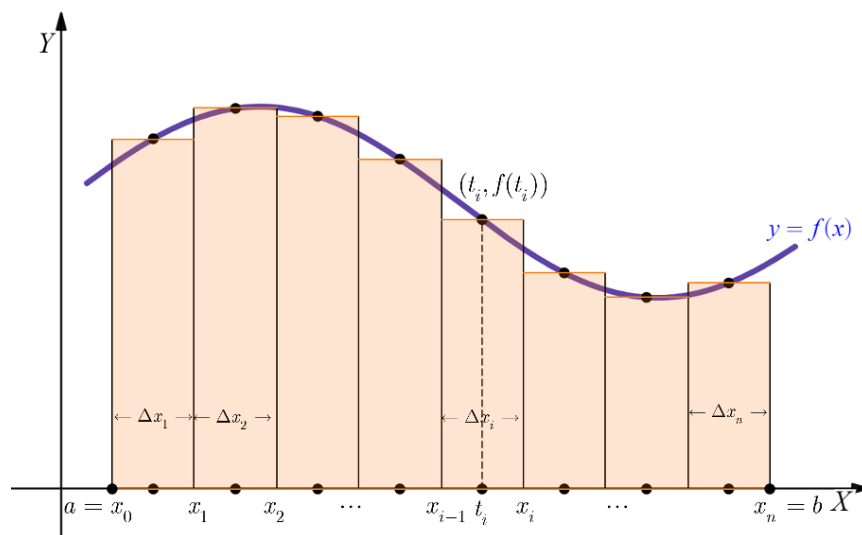
บทนิยาม 7.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[a, b]$ และให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกัน (partition) บนช่วงปิด $[a, b]$ โดยที่

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

ให้ Δx_i เป็นความยาวบนช่วงปิด $[x_{i-1}, x_i]$ และ t_i เป็นค่าที่อยู่ในช่วงปิด $[x_{i-1}, x_i]$ ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i = f(t_1) \Delta x_1 + f(t_2) \Delta x_2 + \dots + f(t_n) \Delta x_n$$

จะเรียกว่าผลบวกกริมันน์ (Riemann sums) ของฟังก์ชัน f บนช่วงปิด $[a, b]$ แสดงได้ดังรูป 7.1



รูป 7.1 กราฟแสดงผลแบ่งกันของบริเวณ R

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

พิจารณาการหาพื้นที่ของบริเวณ R ที่อยู่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ และอยู่เหนือแกน X ในช่วงปิด $[a, b]$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและ $f(x) \geq 0$ ทุก $x \in [a, b]$

จะทำการหาพื้นที่บริเวณ R โดยแบ่งบริเวณ R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า n ชั้น ให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นบนช่วงปิด $[a, b]$ ให้ Δx_i เป็นความยาวบนช่วงปิด $[x_{i-1}, x_i]$ และ t_i เป็นค่าที่อยู่ในช่วงปิด $[x_{i-1}, x_i]$ ดังรูป 7.1 ให้ A_i เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใด ๆ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A_i &= \text{สูง} \times \text{กว้าง} \\ &= f(t_i) \Delta x_i \end{aligned}$$

สามารถประมาณค่าพื้นที่บริเวณ R ด้วยผลรวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าใด ๆ n ชั้น คือ

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + \dots + A_n \\ &= f(t_1) \Delta x_1 + f(t_2) \Delta x_2 + \dots + f(t_n) \Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i \quad (\text{เรียกว่าผลบวกรีมันน์ของ } f \text{ บนช่วงปิด } [a, b]) \end{aligned}$$

ให้ $\Delta x^* = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ เมื่อเพิ่มจำนวนช่วงย่อย n จนเข้าสู่อันันต์ จะทำให้ $\Delta x^* \rightarrow 0$ จะได้ว่าผลบวกรีมันน์ข้างต้นลู่เข้าสู่ค่าที่แท้จริง นั่นคือ

$$A = \lim_{\Delta x^* \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x^* \right)$$

ถ้า $\lim_{\Delta x^* \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x^* \right)$ หาค่าได้ จะนิยามปริพันธ์จำกัดเขตดังบทนิยาม 7.2

บทนิยาม 7.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[a, b]$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้ (integrable) บนช่วงปิด $[a, b]$ ถ้า $\lim_{\Delta x^* \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x^* \right)$ หาค่าได้ สำหรับ $\Delta x^* = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว ปริพันธ์จำกัดเขต (definite integral) ของฟังก์ชัน f บนช่วงปิด $[a, b]$ นิยามโดย

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x^* \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x^* \right)$$

หมายเหตุ จากสัญลักษณ์ของปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x) dx$

$f(x)$ เรียกว่า ตัวถูกหาปริพันธ์ (integrand)

a เรียกว่า ลิมิตล่าง (lower limit) หรือขอบเขตล่างของการหาปริพันธ์

b เรียกว่า ลิมิตบน (upper limit) หรือขอบเขตบนของการหาปริพันธ์

7.1 การหาค่าปริพันธ์จำกัดเขต

ในการหาปริพันธ์จำกัดเขต สามารถใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (the fundamental theorem of calculus) มาช่วยในการหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.1 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส บทที่ 1

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b) และมีค่าอนุพันธ์คือ $f(x)$ จะได้ว่า

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$$

ทฤษฎีบท 7.2 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส บทที่ 2

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วงปิด $[a, b]$ ซึ่ง $F'(x) = f(x)$ แล้ว

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส เป็นทฤษฎีบทที่สำคัญอย่างยิ่งในการหาค่าปริพันธ์จำกัดเขต f บนช่วงปิด $[a, b]$ โดยมีหลักการดังนี้

1. หาปฏิยานุพันธ์ F ของฟังก์ชัน f
2. คำนวณค่า $F(b) - F(a)$

หมายเหตุ ในการหาค่า $F(b) - F(a)$ อาจจะใช้สัญลักษณ์ $F(x)\Big|_a^b$ หรือ $\left[F(x)\right]_a^b$ แทน
 สัญลักษณ์ $F(b) - F(a)$

สมบัติบางประการของปริพันธ์จำกัดเขต

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$3. \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad \text{เมื่อ } k \text{ เป็นค่าคงตัวใด ๆ}$$

$$4. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

5. ถ้า $a < c < b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

6. ถ้า $f(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in [a, b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

7. ถ้า $f(x) \leq g(x)$ ทุกค่า $x \in [a, b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

การหาปริพันธ์จำกัดเขต แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.1 จงหาค่าของ $\int_1^3 (x^2 + 2x - 3) dx$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \int_1^3 (x^2 + 2x - 3) dx &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right]_1^3 \\
 &= \left(\frac{3^3}{3} + 3^2 - 3(3) \right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1^2 - 3(1) \right) \\
 &= (9 + 9 - 27) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) \\
 &= -9 - \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \\
 &= -9 + \frac{5}{3} \\
 &= -\frac{22}{3}
 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 7.2 จงหาค่าของ $\int_0^2 (e^x + 3^x) dx$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \int_0^2 (e^x + 3^x) dx &= \left[e^x + \frac{3^x}{\ln 3} \right]_0^2 \\
 &= \left(e^2 + \frac{3^2}{\ln 3} \right) - \left(e^0 + \frac{3^0}{\ln 3} \right) \\
 &= \left(e^2 + \frac{9}{\ln 3} \right) - \left(1 + \frac{1}{\ln 3} \right) \\
 &= e^2 + \frac{9}{\ln 3} - 1 - \frac{1}{\ln 3} \\
 &= e^2 - 1 + \frac{8}{\ln 3}
 \end{aligned}$$

■

ในการหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x) dx$ โดยอาศัยวิธีการหาปริพันธ์โดยการแทนค่า ผู้เรียนสามารถทำได้ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 หาค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int f(x) dx$ โดยวิธีการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าก่อน แล้วจึงใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส หาค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ดังนั้น

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_a^b$$

วิธีที่ 2 หาค่าปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$ โดยวิธีการหาปริพันธ์โดยการแทนค่า โดยให้ $u = g(x)$ จะได้ $du = g'(x) dx$

เนื่องจากตัวแปรที่ใช้ในการหาปริพันธ์คือ u ดังนั้นจะต้อง “เปลี่ยนขอบเขตของการหาปริพันธ์” ด้วย

- ขอบเขตล่างของการหาปริพันธ์ คือ $x = a$ เปลี่ยนเป็น $u = g(a)$
- ขอบเขตบนของการหาปริพันธ์ คือ $x = b$ เปลี่ยนเป็น $u = g(b)$

ดังนั้น

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.3 จงหาค่าของ $\int_1^2 x(x^2 - 2)^5 dx$

วิธีที่ 1 ให้ $u = x^2 - 2$ จะได้ $d(x^2 - 2) = 2x dx$

$$\frac{1}{2} d(x^2 - 2) = x dx$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \int x(x^2 - 2)^5 dx &= \int (x^2 - 2)^5 (x dx) \\ &= \int (x^2 - 2)^5 \left(\frac{1}{2} d(x^2 - 2) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int x(x^2 - 2)^5 dx &= \frac{1}{2} \int (x^2 - 2)^5 d(x^2 - 2) \\
 \boxed{\text{สูตร } \int u^n du, u = x^2 - 2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 - 2)^6}{6} + c \\
 &= \frac{1}{12} (x^2 - 2)^6 + c \\
 \text{จะได้ว่า } \int_1^2 x(x^2 - 2)^5 dx &= \frac{1}{12} \left[(x^2 - 2)^6 \right]_1^2 \\
 &= \frac{1}{12} \left[(2^2 - 2)^6 - (1^2 - 2)^6 \right] \\
 &= \frac{1}{12} \left[(4 - 2)^6 - (1 - 2)^6 \right] \\
 &= \frac{1}{12} \left[2^6 - (-1)^6 \right] \\
 &= \frac{1}{12} (64 - 1) \\
 &= \frac{63}{12} \\
 &= \frac{21}{4}
 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 ให้ $u = x^2 - 2$ จะได้

$$du = 2x dx$$

$$\frac{1}{2} du = x dx$$

ขอบเขตล่างของการหาปริพันธ์ คือ $x = 1$ เปลี่ยนเป็น $u = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1$

ขอบเขตบนของการหาปริพันธ์ คือ $x = 2$ เปลี่ยนเป็น $u = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } \int_1^2 x(x^2 - 2)^5 dx &= \int_{-1}^2 (x^2 - 2)^5 (x dx) \\
 &= \int_{-1}^2 u^5 \left(\frac{1}{2} du \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 u^5 du \quad \boxed{\text{สูตร } \int u^n du} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \left[u^6 \right]_{-1}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 x(x^2 - 2)^5 dx &= \frac{1}{12} [2^6 - (-1)^6] \\
 &= \frac{1}{12} [64 - 1] \\
 &= \frac{63}{12} \\
 &= \frac{21}{4}
 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 7.4 จงหาค่าของ $\int_{\pi/2}^{\pi} (\sin 2\theta - \cos 2\theta) d\theta$

วิธีที่ 1 ให้ $u = 2\theta$ จะได้ $d(2\theta) = 2 d\theta$

$$\frac{1}{2} d(2\theta) = d\theta$$

ดังนั้น $\int (\sin 2\theta - \cos 2\theta) d\theta = \int (\sin 2\theta - \cos 2\theta) \left(\frac{1}{2} d(2\theta) \right)$

สูตร $\int \sin u du, \int \cos u du, u = 2\theta$ $= \frac{1}{2} \int (\sin 2\theta - \cos 2\theta) d(2\theta)$

$$= \frac{1}{2} [-\cos 2\theta - \sin 2\theta] + c$$

จะได้ว่า $\int_{\pi/2}^{\pi} (\sin 2\theta - \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2} [-\cos 2\theta - \sin 2\theta]_{\pi/2}^{\pi}$

$$= \frac{1}{2} [(-\cos 2\pi - \sin 2\pi) - (-\cos \pi - \sin \pi)]$$

$$= \frac{1}{2} [(-1 - 0) - (-(-1) - 0)]$$

$$= \frac{1}{2} (-1 - 1)$$

$$= \frac{-2}{2}$$

$$= -1$$

■

วิธีที่ 2 ให้ $u = 2\theta$ จะได้ $du = 2d\theta$

$$\frac{1}{2} du = d\theta$$

ขอบเขตล่างของการหาปริพันธ์ คือ $\theta = \frac{\pi}{2}$ เปลี่ยนเป็น $u = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ขอบเขตบนของการหาปริพันธ์ คือ $\theta = \pi$ เปลี่ยนเป็น $u = 2\pi$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin 2\theta - \cos 2\theta) d\theta &= \int_{\pi}^{2\pi} (\sin u - \cos u) \left(\frac{1}{2} du \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (\sin u - \cos u) du \quad \text{สูตร } \int \sin u du, \int \cos u du \\ &= \frac{1}{2} \left[-\cos u - \sin u \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left[(-\cos 2\pi - \sin 2\pi) - (-\cos \pi - \sin \pi) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(-1 - 0) - (-(-1) - 0) \right] \\ &= \frac{1}{2} (-1 - 1) \\ &= \frac{-2}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

■

นอกจากการหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยสูตรพื้นฐานแล้ว ผู้เรียนยังสามารถหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ได้เช่นเดียวกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.5 จงหาค่าของ $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2$ และ $dv = e^{2x} dx$ โดยการหาปริพันธ์ทีละส่วนโดยใช้ตาราง

D		I
x^2	+	e^{2x}
$2x$	-	$\frac{1}{2}e^{2x}$
2	-	$\frac{1}{4}e^{2x}$
0	+	$\frac{1}{8}e^{2x}$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int x^2 e^{2x} dx = x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - 2x \cdot \frac{1}{4} e^{2x} + 2 \cdot \frac{1}{8} e^{2x} + c$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า} \quad \int_0^1 x^2 e^{2x} dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2} (1)^2 e^{2(1)} - \frac{1}{2} (1) e^{2(1)} + \frac{1}{4} e^{2(1)} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} (0)^2 e^{2(0)} - \frac{1}{2} (0) e^{2(0)} + \frac{1}{4} e^{2(0)} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{4} e^2 \right) - \left(0 - 0 + \frac{1}{4} (1) \right) \\ &= \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 7.6 จงหาค่าของ $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sin x$ จะได้ $d(\sin x) = \cos x dx$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x (\cos x dx) \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) \\ &= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) d(\sin x) \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

สูตร $\int u^n du, u = \sin x$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ว่า } \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \left[\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} \right]_0^{\pi/2} \\
&= \left(\frac{\sin^3 \frac{\pi}{2}}{3} - \frac{\sin^5 \frac{\pi}{2}}{5} \right) - \left(\frac{\sin^3 0}{3} - \frac{\sin^5 0}{5} \right) \\
&= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5} \right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^5}{5} \right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\
&= \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

ในการประยุกต์ปริพันธ์ของฟังก์ชัน จะนำความรู้ที่ได้จากการหาปริพันธ์จำกัดเขต มาประยุกต์เพื่อหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง รวมถึงการประยุกต์เพื่อหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนบริเวณในระนาบที่กำหนด รอบเส้นตรงที่เป็นแกนหมุน

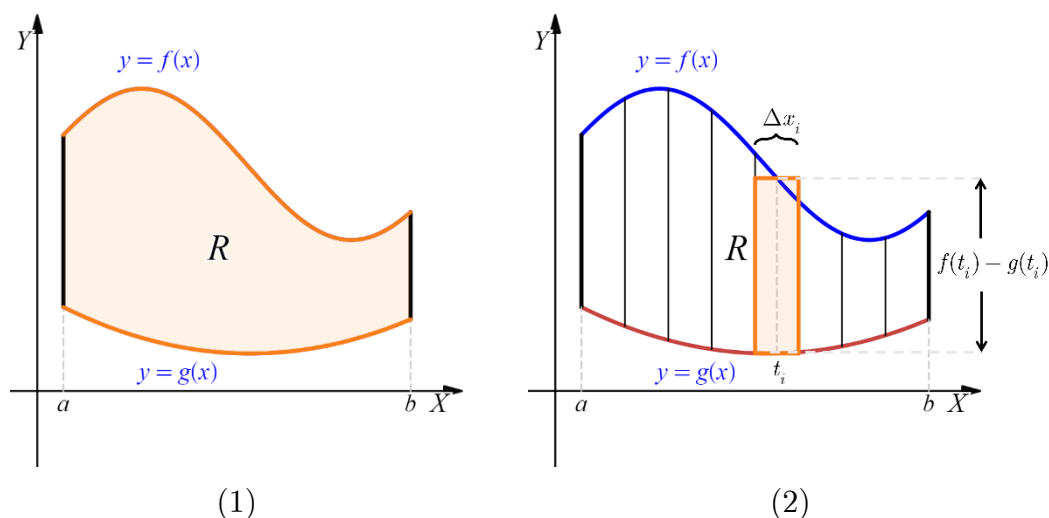
7.2 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง (Area of a region between curve)

จากหัวข้อที่ผ่านมา การหาค่าปริพันธ์ $\int_a^b f(x) \, dx$ สามารถกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่าเป็นการหา

พื้นที่ระหว่างฟังก์ชัน f กับแกน X ที่อยู่ในช่วง $x = a$ ถึง $x = b$ ในหัวข้อนี้จะศึกษาการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้น ดังนี้

7.2.1 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$

ในการหาพื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ จะพิจารณาฟังก์ชัน f และ g ที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ เมื่อ $f(x) \geq g(x)$ ทุก $a \leq x \leq b$ และให้ R เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อม ดังรูป 7.2(1)



รูป 7.2 กราฟแสดงการแบ่งบริเวณ R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนวตั้ง n ชิ้น

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จะทำการหาบริเวณ R โดยแบ่งบริเวณ R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า n ชิ้น ให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นบนช่วงปิด $[a, b]$ ให้ Δx_i เป็นความยาวบนช่วงปิด $[x_{i-1}, x_i]$ และ t_i เป็นค่าที่อยู่ในช่วงปิด $[x_{i-1}, x_i]$ ดังรูป 7.2(2) ให้ A_i เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใด ๆ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A_i &= \text{สูง} \times \text{กว้าง} \\ &= [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i \end{aligned}$$

สามารถประมาณค่าพื้นที่บริเวณ R ด้วยผลรวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าใด ๆ n ชิ้น

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1}^n A_i \\ &= \sum_{i=1}^n [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i \quad (\text{ผลบวกรีมันน์}) \end{aligned}$$

ให้ $\Delta x^* = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ เมื่อ $\Delta x^* \rightarrow 0$ จะได้ว่าผลบวกรีมันน์ข้างต้นลู่เข้าสู่ค่าที่แท้จริง นั่นคือ

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\Delta x^* \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x^* \right] \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \end{aligned}$$

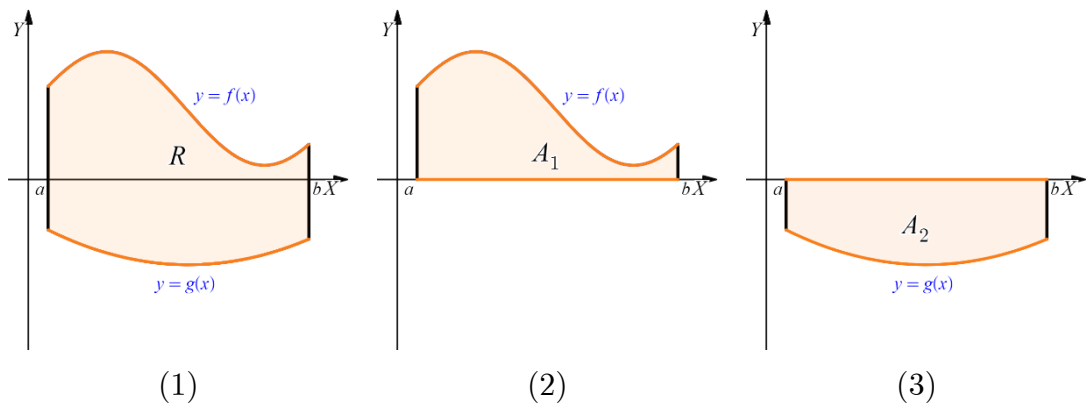
จะนิยามพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ ดังบทนิยาม 7.3

บทนิยาม 7.3 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ เมื่อ $f(x) \geq g(x)$ สำหรับ $a \leq x \leq b$ พื้นที่ (area) ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ จาก a ถึง b นิยามโดย

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

หมายเหตุ ให้ $f(x) \geq g(x)$ สำหรับ $a \leq x \leq b$

1. ถ้า $f(x) \geq 0$ แต่ $g(x) \leq 0$ สำหรับ $a \leq x \leq b$ แสดงได้ดังรูป 7.3



รูป 7.3 กราฟแสดงพื้นที่ เมื่อ $f(x) \geq 0$ แต่ $g(x) \leq 0$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

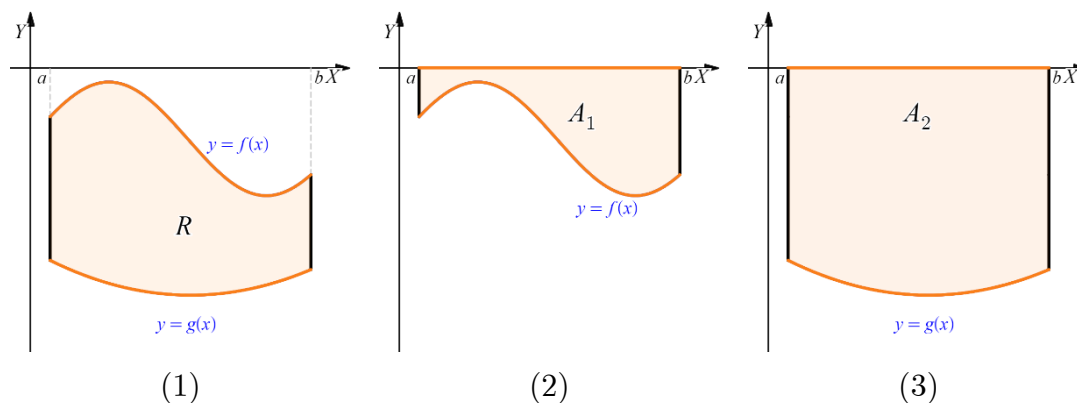
$$\text{จะได้ว่า } A = A_1 + A_2$$

$$= \int_a^b [f(x) - 0] dx + \int_a^b [0 - g(x)] dx$$

$$= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b [-g(x)] dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

2. ถ้า $f(x) \leq 0$ และ $g(x) \leq 0$ สำหรับ $a \leq x \leq b$ แสดงได้ดังรูป 7.4



รูป 7.4 กราฟแสดงพื้นที่เมื่อ $f(x) \leq 0$ และ $g(x) \leq 0$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

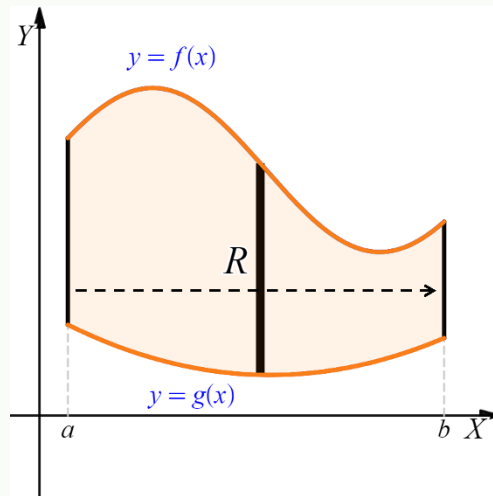
$$\text{จะได้ว่า } A = A_2 - A_1$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b [0 - g(x)] dx - \int_a^b [0 - f(x)] dx \\ &= \int_a^b [-g(x)] dx - \int_a^b [-f(x)] dx \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \end{aligned}$$

จากบทนิยาม 7.3 จะเห็นว่าในการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง สามารถใช้ได้กับทุกฟังก์ชันที่อยู่ในเงื่อนไข $f(x) \geq g(x)$ สำหรับ $a \leq x \leq b$

สรุปการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ สำหรับ $a \leq x \leq b$

1. วาดกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ เพื่อกำหนดขอบเขตของบริเวณ R
2. สร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า ตั้งฉากกับแกน X โดยมีความกว้างเท่ากับ dx ด้านบนของแท่งสี่เหลี่ยมคือเส้นโค้ง $y = f(x)$ และด้านล่างของแท่งสี่เหลี่ยมคือเส้นโค้ง $y = g(x)$ ดังนั้นจะได้ความสูงของแท่งสี่เหลี่ยมคือ $f(x) - g(x)$
3. หาขอบเขตของการหาปริพันธ์ โดยการเลื่อนแท่งสี่เหลี่ยมจากซ้ายไปขวา เมื่อขอบเขตด้านซ้ายสุดของการหาปริพันธ์ คือเส้นตรง $x = a$ และขอบเขตด้านขวาสุดของการหาปริพันธ์ คือเส้นตรง $x = b$ แสดงดังรูป 7.5



รูป 7.5 กราฟแสดงการกำหนดขอบเขตของการหาพื้นที่ระหว่าง

เส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณ R คือ $A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$

4. กรณีความสูงของแท่งสี่เหลี่ยมมีการเปลี่ยนจาก $f(x) - g(x)$ จะต้องทำการแบ่งพื้นที่ในการหาปริพันธ์ โดยทำซ้ำในขั้นตอนที่ 1 – 3

การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.7 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ เส้นตรง $x = 3$ และแกน X

วิธีทำ ให้ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2$ เส้นตรง $x = 3$ และแกน X

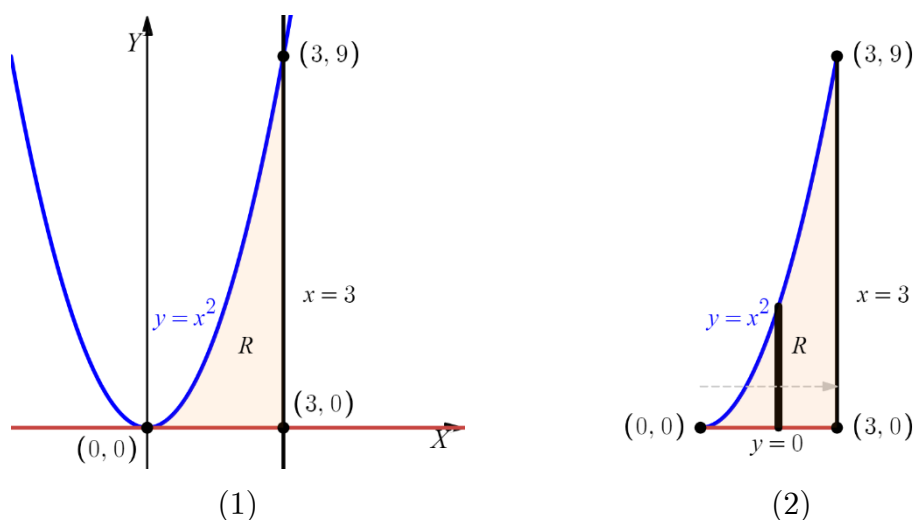
$y = x^2$ เป็นพาราโบลาลักษณะหงาย จุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$

$x = 3$ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X ที่จุด $x = 3$

หาจุดตัดกราฟ $y = x^2$ และ $x = 3$

ที่ $x = 3$ จะได้ $y = 9$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(3, 9)$

จะได้ว่าบริเวณ R สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป 7.6(1)



รูป 7.6 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ เส้นตรง $x = 3$ และแกน X

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ทำการสร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งฉากกับแกน X กำหนดขอบเขตการหาปริพันธ์ โดยขอบเขตด้านซ้ายคือ $x = 0$ และขอบเขตด้านขวาคือ $x = 3$ ดังรูป 7.6(2) ดังนั้น พื้นที่บริเวณ R คือ

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^3 [x^2 - 0] dx \\
 &= \int_0^3 x^2 dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 \\
 &= \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\
 &= \frac{27}{3} - 0 \\
 &= 9 \text{ ตารางหน่วย}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.8 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 1$ และเส้นตรง $y = x + 1$

วิธีทำ ให้ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2 - 1$ เส้นตรง $y = x + 1$

$y = x^2 - 1$ เป็นพาราโบลาลักษณะหงาย จุดยอดอยู่ที่ $(0, -1)$

$y = x + 1$ เป็นเส้นตรงที่ตัดแกน X ที่จุด $x = -1$ และแกน Y ที่จุด $y = 1$
หาจุดตัดกราฟ $y = x^2 - 1$ และ $y = x + 1$

$$x^2 - 1 = x + 1$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

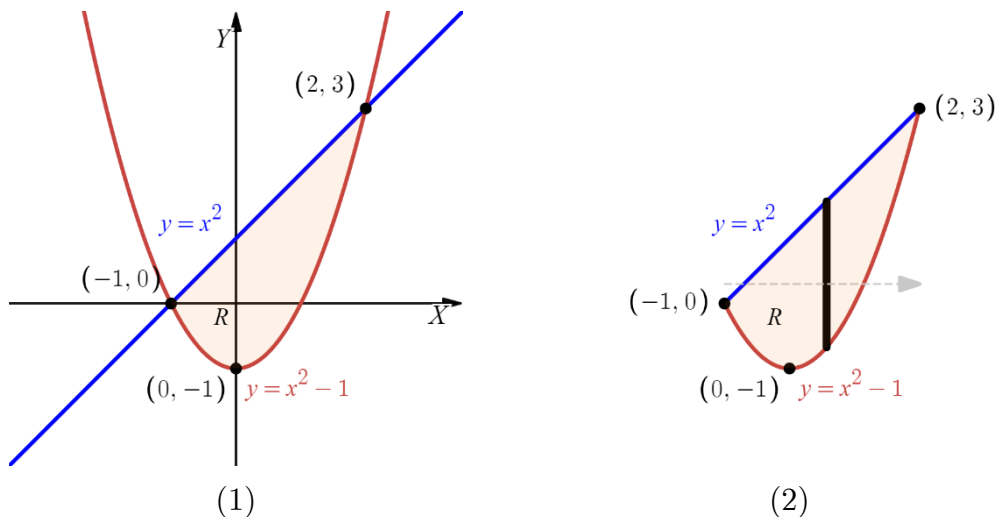
$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -1, 2$$

ที่ $x = -1$ จะได้ $y = 2$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(-1, 2)$

ที่ $x = 2$ จะได้ $y = 3$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(2, 3)$

จะได้ว่า บริเวณ R สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป 7.7(1)



รูป 7.7 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 1$ และเส้นตรง $y = x + 1$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ทำการสร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งฉากกับแกน X กำหนดขอบเขตการหาปริพันธ์ โดยขอบเขตด้านซ้ายคือ $x = -1$ และขอบเขตด้านขวาคือ $x = 2$ รูป 7.7(2) ดังนั้น พื้นที่บริเวณ R คือ

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 [(x + 1) - (x^2 - 1)] dx \\ &= \int_{-1}^2 [x + 1 - x^2 + 1] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^2 [x + 2 - x^2] dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 \\
&= \left(\frac{2^2}{2} + 2(2) - \frac{2^3}{3} \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) \\
&= \left(\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) \\
&= 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} \\
&= 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} \\
&= 8 - 3 - \frac{1}{2} \\
&= 5 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{9}{2} \text{ ตารางหน่วย}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.9 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ เส้นโค้ง $y = x^2 - 8x + 16$ และ แกน X

วิธีทำ ให้ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2$ เส้นโค้ง $y = x^2 - 8x + 16$ แกน X

$y = x^2$ เป็นพาราโบลาลักษณะหงาย จุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$

$y = x^2 - 8x + 16$ เป็นพาราโบลาลักษณะหงาย จุดยอดอยู่ที่ $(4,0)$

หาจุดตัดกราฟ $y = x^2$ และ $y = x^2 - 8x + 16$

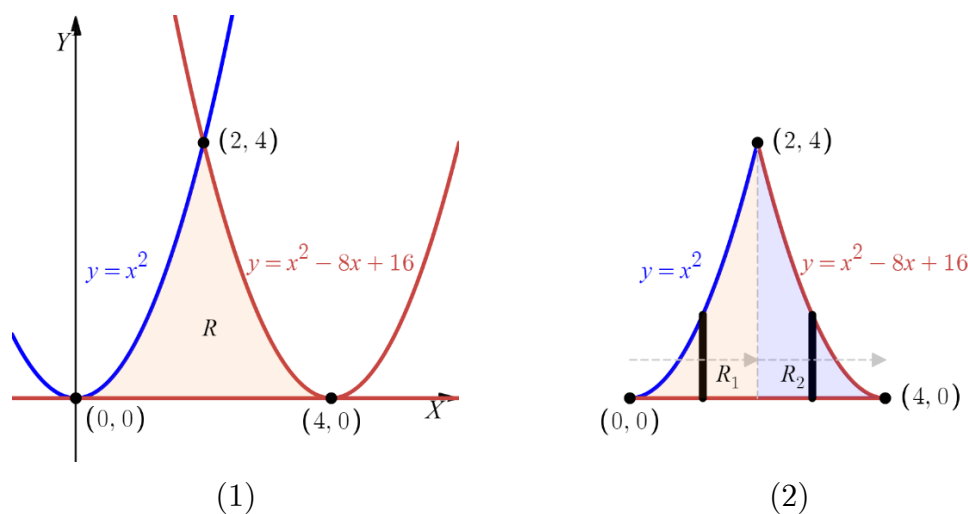
$$x^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$8x = 16$$

$$x = 2$$

ที่ $x = 2$ จะได้ $y = 4$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(2,4)$

จะได้ว่า บริเวณ R สามารถเขียนกราฟได้รูป 7.8(1)



รูป 7.8 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ เส้นโค้ง $y = x^2 - 8x + 16$

และแกน X

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

เนื่องจากบริเวณ R ไม่สามารถหาปริพันธ์ได้โดยตรง จะต้องทำการแบ่งพื้นที่ออกเป็น 2 ส่วน คือ R_1 และ R_2 โดยมีจุดแบ่งพื้นที่ คือเส้นตรง $x = 2$ ทำการสร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งฉากกับแกน X กำหนดขอบเขตการหาปริพันธ์

บริเวณ R_1 ขอบเขตด้านซ้ายคือ $x = 0$ และขอบเขตด้านขวาคือ $x = 2$

บริเวณ R_2 ขอบเขตด้านซ้ายคือ $x = 2$ และขอบเขตด้านขวาคือ $x = 4$

ดังรูป 7.8(2) ดังนั้น พื้นที่บริเวณ R คือ

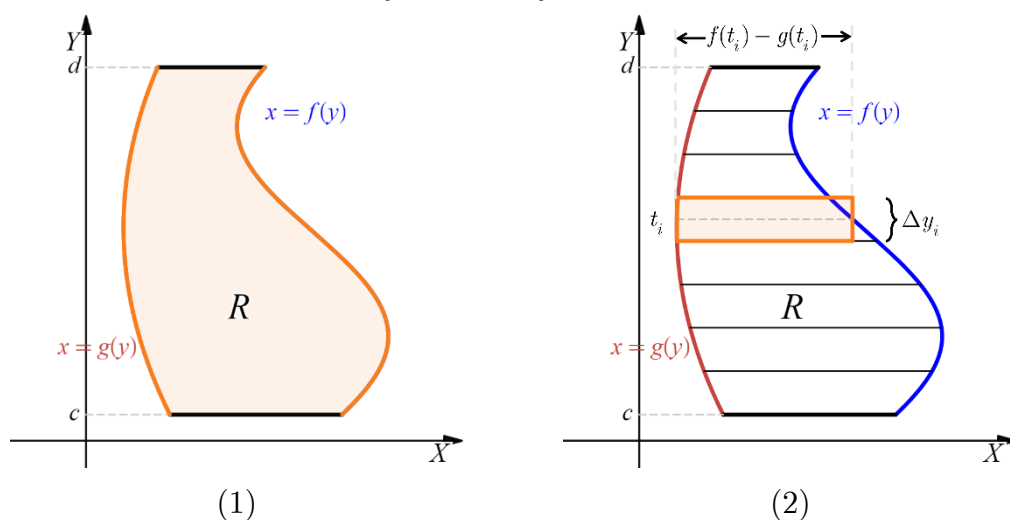
$$\begin{aligned}
 A &= \text{พื้นที่บริเวณ } R_1 + \text{พื้นที่บริเวณ } R_2 \\
 &= \int_0^2 (x^2 - 0) dx + \int_2^4 (x^2 - 8x + 16 - 0) dx \\
 &= \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 (x^2 - 8x + 16) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 16x \right]_2^4 \\
 &= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) + \left[\left(\frac{4^3}{3} - 4(4)^2 + 16(4) \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 4(2)^2 + 16(2) \right) \right] \\
 &= \frac{8}{3} + \left(\frac{64}{3} - 64 + 64 \right) - \left(\frac{8}{3} - 16 + 32 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{8}{3} + \frac{64}{3} - \left(\frac{8}{3} + 16 \right) \\
 &= \frac{8}{3} + \frac{64}{3} - \frac{8}{3} - 16 \\
 &= \frac{64}{3} - 16 \\
 &= \frac{16}{3} \text{ ตารางหน่วย}
 \end{aligned}$$

7.2.2 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $x = f(y)$ และ $x = g(y)$

ในบางกรณี การหาพื้นที่บริเวณ R โดยการหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x นั้นทำได้ยาก เนื่องจากมีความซับซ้อนของฟังก์ชัน หรือมีการแบ่งพื้นที่ในการหาปริพันธ์ออกเป็นหลายส่วน ดังนั้นจะทำการเปลี่ยนจากการหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x ให้อยู่ในรูปปริพันธ์เทียบกับตัวแปร y

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ เมื่อ $f(y) \geq g(y)$ สำหรับ $c \leq y \leq d$ และให้ R เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อม ดังรูป 7.9(1)



รูป 7.9 กราฟแสดงการแบ่งบริเวณ R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนวนอน n ชั้น

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จะทำการหาบริเวณ R โดยแบ่งบริเวณ R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า n ชั้น ให้ $P = \{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$ เป็นผลแบ่งกั้นบนช่วงปิด $[c, d]$ ให้ Δy_i เป็นความยาวบนช่วงปิด $[y_i, y_{i+1}]$ และ t_i เป็นค่าที่อยู่ในช่วงปิด $[y_i, y_{i+1}]$ ดังรูป 7.9(2) ให้ A_i เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใด ๆ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A_i &= \text{ยาว} \times \text{กว้าง} \\ &= [f(t_i) - g(t_i)] \Delta y_i \end{aligned}$$

สามารถประมาณค่าพื้นที่บริเวณ R ด้วยผลรวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าใด ๆ n ชิ้น

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1}^n A_i \\ &= \sum_{i=1}^n [f(t_i) - g(t_i)] \Delta y_i \quad (\text{ผลบวกรีมันน์}) \end{aligned}$$

ให้ $\Delta y^* = \max\{\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_n\}$ เมื่อ $\Delta y^* \rightarrow 0$ จะได้ว่าผลบวกรีมันน์ข้างต้นลู่เข้าสู่ค่าที่แท้จริง นั่นคือ

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\Delta y^* \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n [f(t_i) - g(t_i)] \Delta y^* \right] \\ &= \int_c^d [f(y) - g(y)] dy \end{aligned}$$

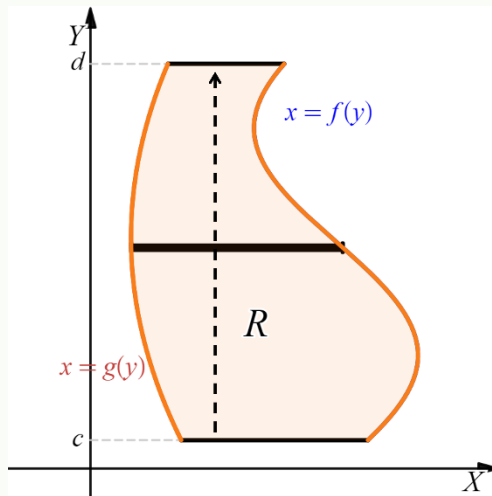
จะนิยามพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $x = f(y)$ และ $x = g(y)$ ดังบทนิยาม 7.4

บทนิยาม 7.4 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c, d]$ เมื่อ $f(y) \geq g(y)$ สำหรับ $c \leq y \leq d$ พื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = f(y)$ และ $x = g(y)$ จาก c ถึง d นิยามโดย

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$$

สรุปการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $x = f(y)$ และ $x = g(y)$ สำหรับ $c \leq x \leq d$

1. วาดกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ เพื่อกำหนดขอบเขตของบริเวณ R
2. สร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า ตั้งฉากกับแกน Y โดยมีความกว้างเท่ากับ dy ด้านขวาของแท่งสี่เหลี่ยมคือเส้นโค้ง $x = f(y)$ และด้านซ้ายของแท่งสี่เหลี่ยมคือเส้นโค้ง $x = g(y)$ ดังนั้นจะได้ความยาวของแท่งสี่เหลี่ยมคือ $f(y) - g(y)$
3. หาขอบเขตของการหาปริพันธ์ โดยการเลื่อนแท่งสี่เหลี่ยมจากล่างขึ้นบน เมื่อขอบเขตด้านล่างสุดของการหาปริพันธ์ คือเส้นตรง $y = c$ และขอบเขตด้านบนสุดของการหาปริพันธ์ คือเส้นตรง $y = d$ แสดงดังรูป 7.10



รูป 7.10 กราฟแสดงการกำหนดขอบเขตของการหาพื้นที่ระหว่าง

เส้นโค้ง $x = f(y)$ และ $x = g(y)$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณ R คือ $A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$

4. กรณีความยาวของแท่งสี่เหลี่ยมมีการเปลี่ยนจาก $f(y) - g(y)$ จะต้องทำการแบ่งพื้นที่ในการหาปริพันธ์ โดยทำซ้ำในขั้นตอนที่ 1 – 3

การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $x = f(y)$ และ $x = g(y)$ แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.10 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y^2 = x - 2$ เส้นตรง $y = -1$, $y = 2$ และแกน Y

วิธีทำ ให้ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y^2 = x - 2$ เส้นตรง $y = -1$, $y = 2$ แกน Y

$y^2 = x - 2$ เป็นพาราโบลาลักษณะเปิดขวา จุดยอดอยู่ที่ $(2, 0)$

$y = -1$ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากแกน Y และตัดแกน Y ที่จุด $y = -1$

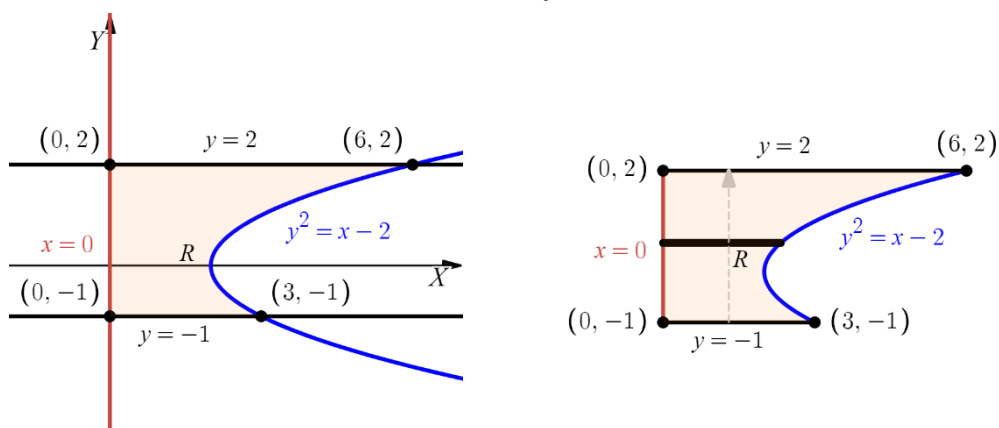
$y = 2$ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากแกน Y และตัดแกน Y ที่จุด $y = 2$

หาจุดตัดกราฟ $y^2 = x - 2$ และ $y = -1$, $y = 2$

ที่ $y = -1$ จะได้ $x = 3$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(3, -1)$

ที่ $y = 2$ จะได้ $x = 6$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(6, 2)$

จะได้ว่าบริเวณ R สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป 7.11(1)



รูป 7.11 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y^2 = x - 2$ เส้นตรง $y = -1$, $y = 2$

และแกน Y

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

เนื่องจากการหาพื้นที่บริเวณ R โดยการหาปริพันธ์เทียบกับแปร x นั้น จะต้องทำการแบ่งบริเวณ R เป็น 3 ส่วน ซึ่งยุ่งยากต่อการหา ดังนั้น จะหาพื้นที่บริเวณ R โดยการหาปริพันธ์เทียบกับแปร y แทน

ทำการสร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งฉากกับแกน Y กำหนดขอบเขตการหาปริพันธ์ โดยขอบเขตด้านล่างคือ $y = -1$ และขอบเขตด้านบนคือ $y = 2$ ดังรูป 7.11(2) ดังนั้น พื้นที่บริเวณ R คือ

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^2 [(y^2 + 2) - 0] dy \\
 &= \int_{-1}^2 (y^2 + 2) dy \\
 &= \left[\frac{y^3}{3} + 2y \right]_{-1}^2 \\
 &= \left(\frac{2^3}{3} + 2(2) \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2(-1) \right) \\
 &= \left(\frac{8}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 2 \right) \\
 &= \frac{8}{3} + 4 + \frac{1}{3} + 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{9}{3} + 6 \\
 &= 3 + 6 \\
 &= 9 \text{ ตารางหน่วย}
 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 7.11 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = y^2$ และ $x = 4 - 3y^2$

วิธีทำ ให้ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $x = y^2$ และ $x = 4 - 3y^2$

$x = y^2$ เป็นพาราโบลาลักษณะเปิดขวา จุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$

$x = 4 - 3y^2$ เป็นพาราโบลาลักษณะเปิดซ้าย จุดยอดอยู่ที่ $(4, 0)$

หาจุดตัดกราฟ $x = y^2$ และ $x = 4 - 3y^2$

$$y^2 = 4 - 3y^2$$

$$4y^2 = 4$$

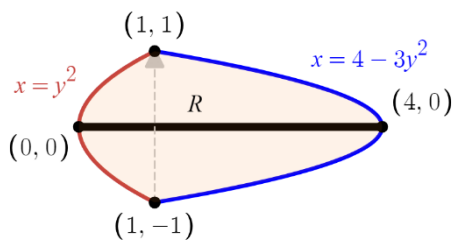
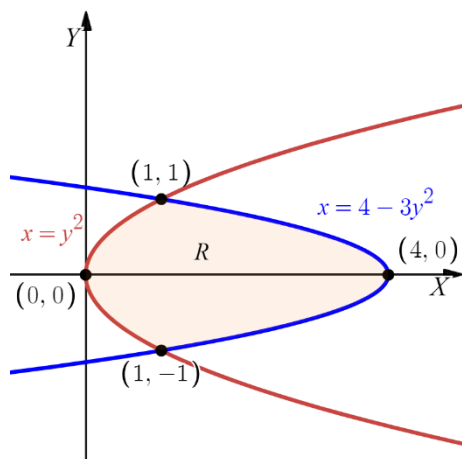
$$y^2 = 1$$

$$y = -1, 1$$

ที่ $y = -1$ จะได้ $x = 1$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(1, -1)$

ที่ $y = 1$ จะได้ $x = 1$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(1, 1)$

จะได้ว่าบริเวณ R สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป 7.12(1)



รูป 7.12 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = y^2$ และ $x = 4 - 3y^2$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

เนื่องจากการหาพื้นที่บริเวณ R โดยการหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x นั้น จะต้องทำการแบ่งบริเวณ R เป็น 2 ส่วน ซึ่งยุ่งยากต่อการหา ดังนั้น จะหาพื้นที่บริเวณ R โดยการหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร y แทน

ทำการสร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งฉากกับแกน Y กำหนดขอบเขตการหาปริพันธ์ โดยขอบเขตด้านล่างคือ $y = -1$ และขอบเขตด้านบนคือ $y = 1$ ดังรูป 7.12(2) ดังนั้น พื้นที่บริเวณ R คือ

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^1 \left[(4 - 3y^2) - y^2 \right] dy \\
 &= \int_{-1}^1 (4 - 4y^2) dy \\
 &= \left[4y - \frac{4y^3}{3} \right]_{-1}^1 \\
 &= \left(4(1) - \frac{4(1)^3}{3} \right) - \left(4(-1) - \frac{4(-1)^3}{3} \right) \\
 &= \left(4 - \frac{4}{3} \right) - \left(-4 + \frac{4}{3} \right) \\
 &= 4 - \frac{4}{3} + 4 - \frac{4}{3} \\
 &= 8 - \frac{8}{3} \\
 &= \frac{16}{3} \text{ ตารางหน่วย}
 \end{aligned}$$



7.3 การหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุน (Volume of solid of revolution)

ให้ R เป็นบริเวณในระนาบ เมื่อทำการหมุนบริเวณ R รอบเส้นตรงที่ขนานแกน X หรือรอบเส้นตรงที่ขนานแกน Y ในที่นี้จะเรียกเส้นตรงนี้ว่าแกนหมุน (axis of revolution) จะทำให้เกิดรูปทรงสามมิติ

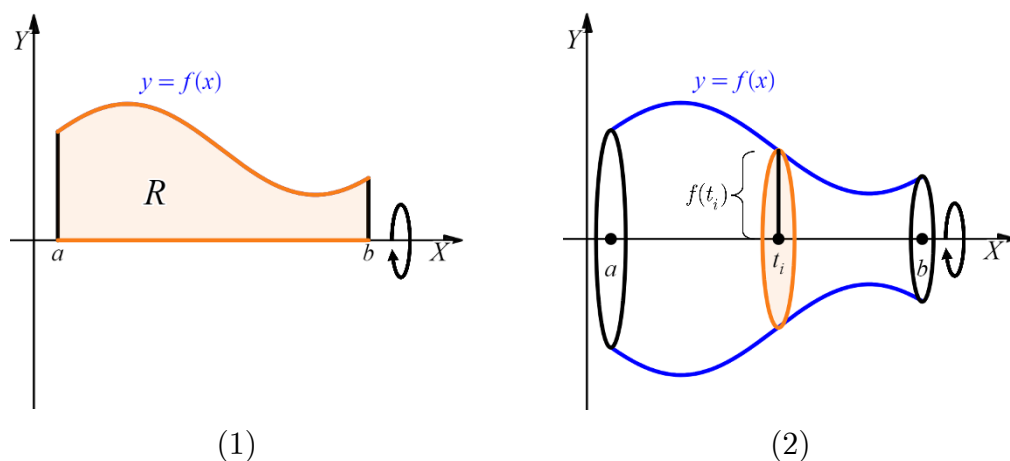
ในการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนดังข้างต้น จะมีวิธีในการหา 2 วิธี คือ

1. วิธีแบบจาน (disk method)
2. วิธีแบบเปลือกทรงกระบอก (cylindrical shell method)

7.3.1 การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีแบบจาน

ในการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีแบบจาน จะเป็นการแบ่งรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนออกเป็นหลาย ๆ ส่วน โดยในแต่ละส่วนจะอยู่ในรูปจานย่อย ๆ เมื่อนำจานย่อย ๆ มารวมกันจะได้ปริมาตรของรูปทรงสามมิติ

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ เมื่อ $f(x) \geq 0$ สำหรับ $a \leq x \leq b$ และให้ R เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และแกน X สำหรับ $a \leq x \leq b$ ดังรูป 7.13(1) ทำการหมุนบริเวณ R รอบแกน X จะได้รูปทรงสามมิติดังรูป 7.13(2)

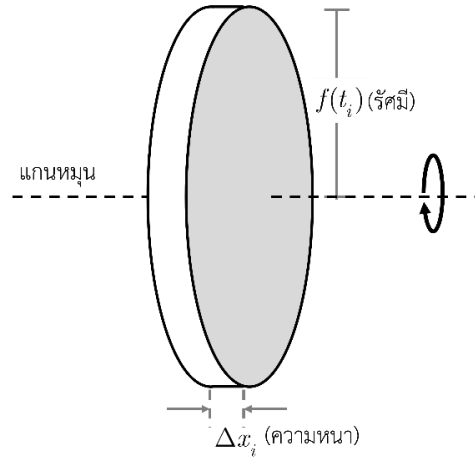


รูป 7.13 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R รอบแกน X โดยวิธีแบบจาน

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จะทำการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R ทำได้โดยเริ่มต้นแบ่งบริเวณ R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า n ชิ้น ให้ $P = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ เป็นผลแบ่งกันบนช่วงปิด $[a, b]$ ให้ Δx_i เป็นความยาวบนช่วงปิด $[x_i, x_{i+1}]$ และ t_i เป็นค่าที่อยู่ในช่วงปิด $[x_i, x_{i+1}]$ จะได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใด ๆ จะมีความกว้างคือ Δx_i และความสูงคือ $f(t_i)$

เมื่อทำการหมุนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใด ๆ รอบแกน X จะได้แผ่นงานที่มีรัศมีคือ $f(t_i)$ และมีความหนา คือ Δx_i ดังรูป 7.14



รูป 7.14 กราฟแสดงแผ่นงานที่มีรัศมี $f(t_i)$ และมีความหนา Δx_i

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ให้ V_i เป็นปริมาตรของงานใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V_i &= \pi \times (\text{รัศมี})^2 \times (\text{ความหนา}) \\ &= \pi [f(t_i)]^2 \Delta x_i \end{aligned}$$

สามารถประมาณค่าปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R ด้วยผลรวมของปริมาตรงานใด ๆ n ชิ้น

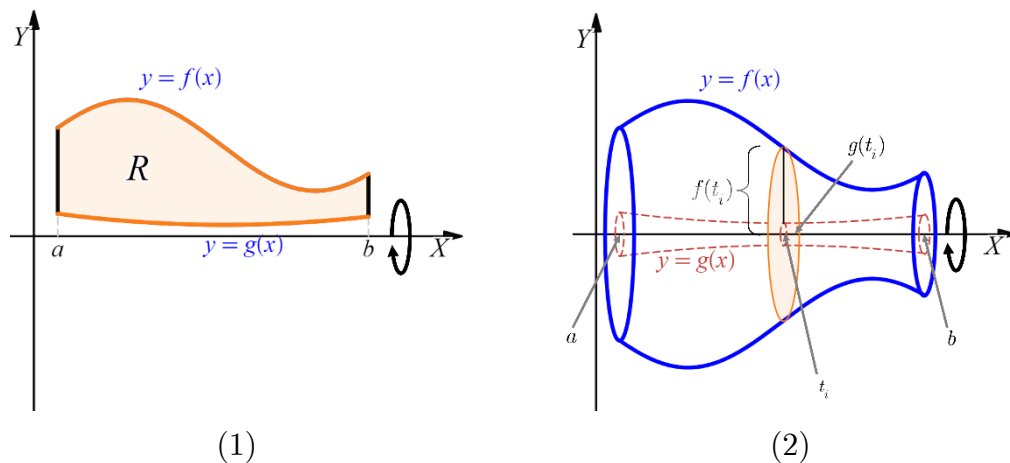
$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^n V_i \\ &= \sum_{i=1}^n \pi [f(t_i)]^2 \Delta x_i \end{aligned}$$

ให้ $\Delta x^* = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ เมื่อ $\Delta x^* \rightarrow 0$ จะได้ว่าปริมาตรข้างต้นลู่เข้าสู่ค่าที่แท้จริง นั่นคือ

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\Delta x^* \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n \pi [f(t_i)]^2 \Delta x^* \right] \\ &= \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx \\ &= \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \end{aligned}$$

เนื่องจากปริมาตรที่ได้ เกิดจากผลรวมของปริมาตรของแผ่นจานย่อย ๆ จึงเรียกวิธีนี้ว่าวิธีแบบจาน (disk method)

ในกรณีที่ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ $f(x) \geq g(x) \geq 0$ สำหรับ $a \leq x \leq b$ ดังรูป 7.15(1)

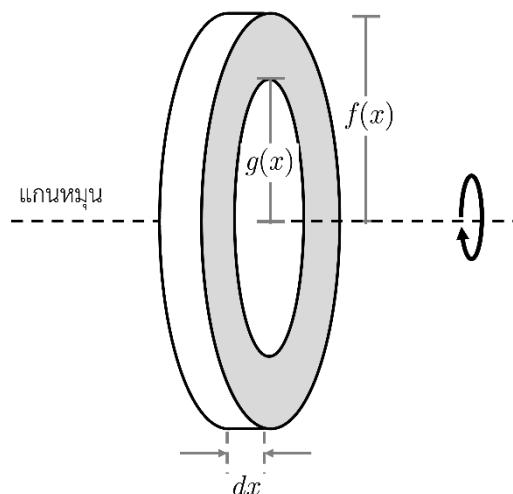


รูป 7.15 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$

รอบแกน X โดยวิธีแบบจาน

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

เนื่องจากปริมาตรที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R เป็นรูปทรงสามมิติที่มีช่องว่างตรงกลาง หรือ กลวงตรงกลาง ดังรูป 7.15(2) ซึ่งรูปทรงที่หมุนจะเป็นลักษณะคล้ายวงแหวน ดังรูป 7.16



รูป 7.16 กราฟแสดงแผ่นวงแหวนที่มีรัศมี $f(x) - g(x)$ และมีความหนา dx

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

สามารถหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน X ได้ดังนี้

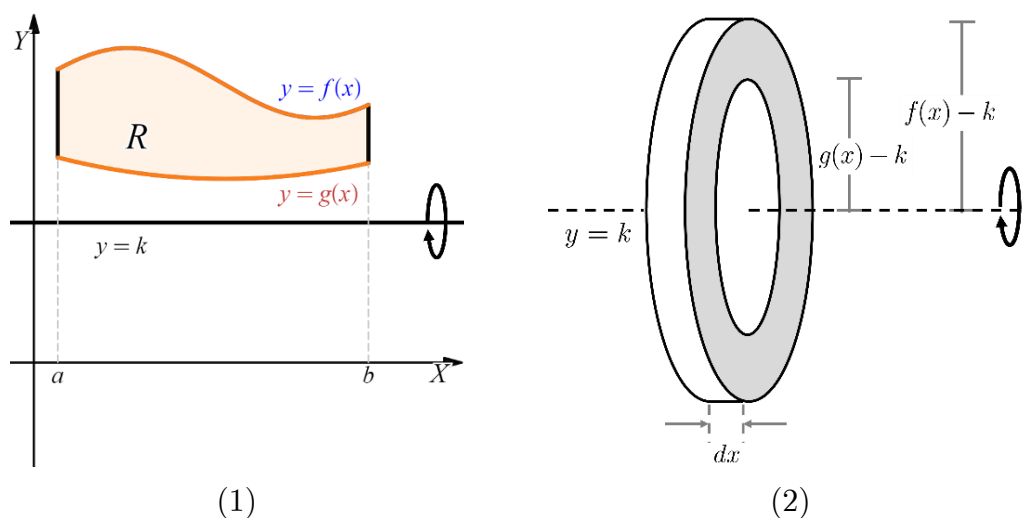
$$\begin{aligned} V &= V_f - V_g \\ &= \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx \\ &= \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx \end{aligned}$$

จะเห็นว่าปริมาตรที่ได้ เกิดจากผลรวมของปริมาตรของวงแหวนย่อย ๆ จึงเรียกวิธีนี้ว่า **วิธีแบบวงแหวน** (washers method)

ข้อสังเกต ในการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน X โดยวิธีแบบจานนั้น ในบางครั้งรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนอาจจะมีช่องว่างตรงกลาง หรือกลวงตรงกลาง ซึ่งเป็นวงแหวน ดังนั้นจะพิจารณารัศมีของแผ่นจานที่เกิดจากการหมุน โดยจุดศูนย์กลางของแผ่นจานก็คือแกนหมุนและความหนาของแผ่นจาน บนช่วงปิด $[a, b]$ ดังนั้นปริมาตรที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน X โดยวิธีแบบจาน คือ

$$V = \pi \int_a^b \left[(\text{รัศมีวงนอก})^2 - (\text{รัศมีวงใน})^2 \right] \times \text{ความหนา}$$

ในกรณีที่แกนหมุนเป็นเส้นตรง $y = k$ ที่ขนานกับแกน X จะได้ว่าจุดศูนย์กลางของแผ่นจานจะเปลี่ยนไปจากแกน X เป็นเส้นตรง $y = k$ ดังนั้นรัศมีวงนอกของแผ่นจานคือ $f(x) - k$ และรัศมีวงในของแผ่นจานคือ $g(x) - k$ โดยมีความหนา คือ dx ดังรูป 7.17



รูป 7.17 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$

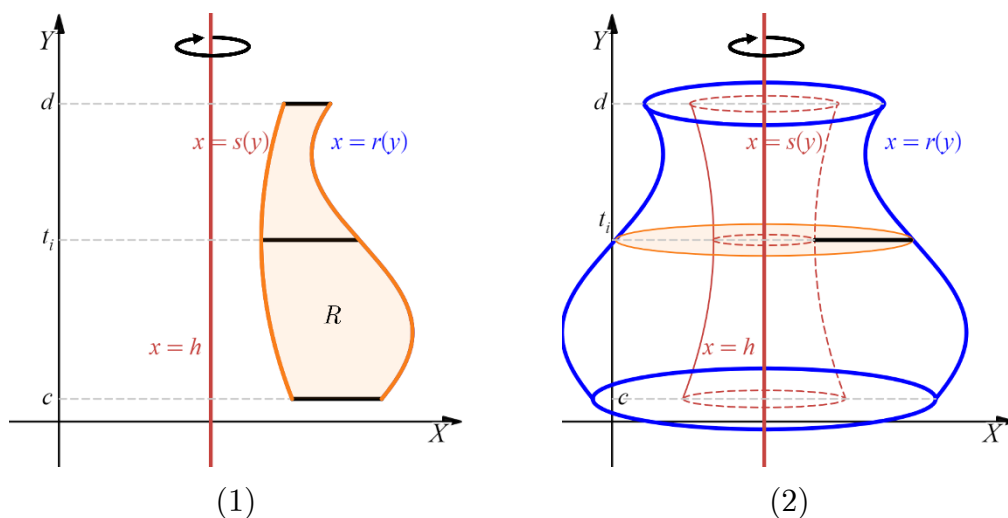
รอบเส้นตรง $y = k$ โดยวิธีแบบจาน

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จะได้ว่าปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบเส้นตรง $y = k$ เมื่อ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ $f(x) \geq g(x) \geq 0$ สำหรับ $a \leq x \leq b$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b \left[(\text{รัศมีวงนอก})^2 - (\text{รัศมีวงใน})^2 \right] \times \text{ความหนา} \\
 &= \pi \int_a^b \left[[f(x) - k]^2 - [g(x) - k]^2 \right] dx
 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน ในกรณีที่ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $x = r(y)$ และ $x = s(y)$ เมื่อ r และ s เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c, d]$ และ $r(y) \geq s(y) \geq 0$ สำหรับ $c \leq y \leq d$ ดังรูป 7.18(1)

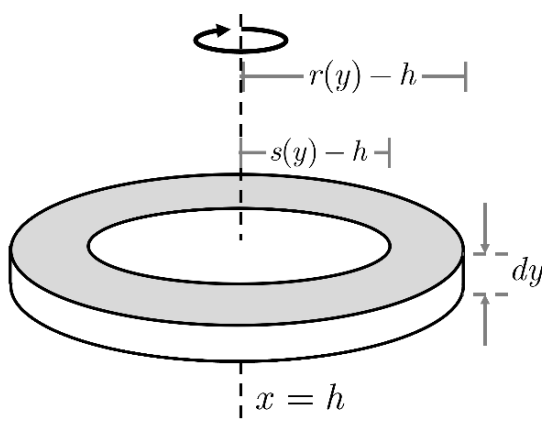


รูป 7.18 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $x = r(y)$ และ $x = s(y)$

รอบเส้นตรง $x = h$ โดยวิธีแบบจาน

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

พิจารณาการหมุนบริเวณ R รอบเส้นตรง $x = h$ ที่ขนานแกน Y ดังรูป 7.18(2) จะได้ว่ารัศมีวงนอกคือ $x = r(y) - h$ และรัศมีวงในคือ $x = s(y) - h$ โดยมีความหนาคือ dy ดังรูป 7.19



รูป 7.19 กราฟแสดงแผ่นวงแหวนรัศมีวงนอก $x = r(y) - h$ และรัศมีวงใน $x = s(y) - h$

และมีความหนา dy

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

สามารถหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบเส้นตรง $x = h$ ที่ขนานแกน Y โดยวิธีแบบจานได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 V &= V_r - V_s \\
 &= \pi \int_c^d [r(y) - h]^2 dy - \pi \int_a^b [s(y) - h]^2 dy \\
 &= \pi \int_c^d [r(y) - h]^2 - [s(y) - h]^2 dy
 \end{aligned}$$

สรุปการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกนหมุน โดยวิธีแบบจาน

1. บริเวณ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ สำหรับ $a \leq x \leq b$ หมุนรอบเส้นตรง $y = k$ ที่ขนานแกน X โดยมีรัศมีวงนอกคือ $y = f(x) - k$ รัศมีวงในคือ $y = g(x) - k$ และความหนา คือ dx

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b [(\text{รัศมีวงนอก})^2 - (\text{รัศมีวงใน})^2] \times \text{ความหนา} \\
 &= \pi \int_a^b [f(x) - k]^2 - [g(x) - k]^2 dx
 \end{aligned}$$

2. บริเวณ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $x = r(y)$ และ $x = s(y)$ สำหรับ $c \leq y \leq d$ หมุนรอบเส้นตรง $x = h$ ที่ขนานแกน Y โดยมีรัศมีวงนอกคือ $x = r(y) - h$ รัศมีวงในคือ $x = s(y) - h$ และความหนา คือ dy

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_c^d [(\text{รัศมีวงนอก})^2 - (\text{รัศมีวงใน})^2] \times \text{ความหนา} \\
 &= \pi \int_c^d [r(y) - h]^2 - [s(y) - h]^2 dy
 \end{aligned}$$

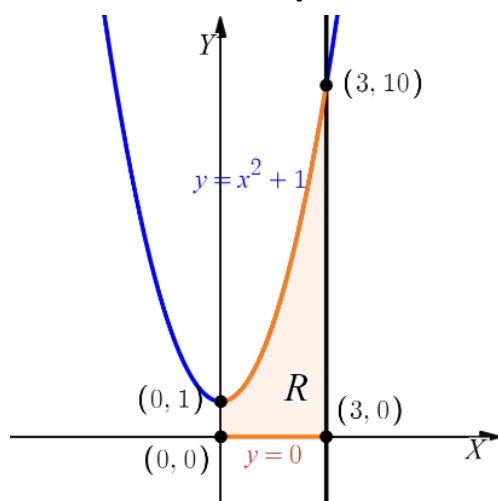
แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.12 จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ เส้นตรง $x = 3$ แกน X, Y โดยหมุนรอบแกน X

วิธีทำ ให้ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ เส้นตรง $x = 1$ แกน X, Y

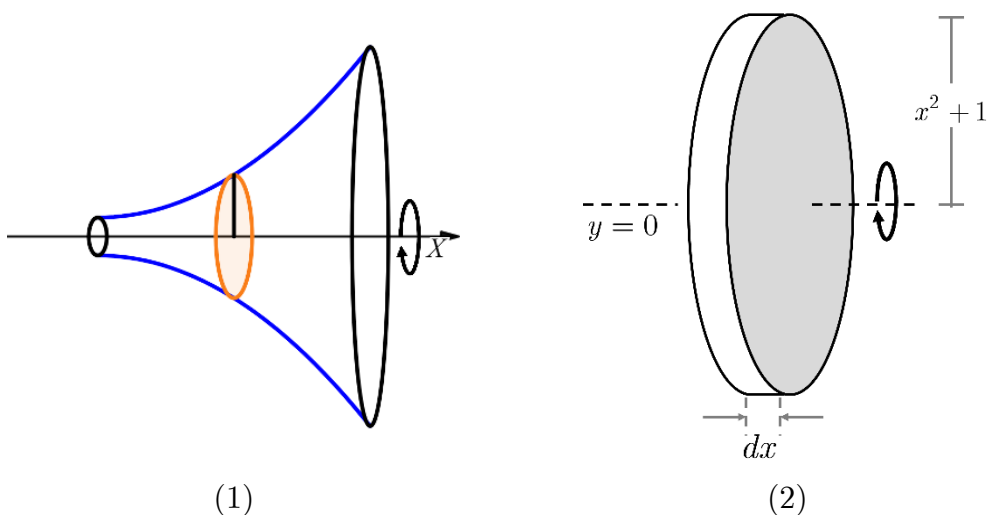
$y = x^2 + 1$ เป็นพาราโบลาลักษณะหงาย จุดยอดอยู่ที่ $(0, 1)$

$x = 3$ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X และตัดแกน X ที่จุด $x = 3$
 หาจุดตัดกราฟ $y = x^2 + 1$ และ $x = 3$
 ที่ $x = 3$ จะได้ $y = 10$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(3, 10)$
 จะได้ว่า บริเวณ R สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป 7.20



รูป 7.20 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ เส้นตรง $x = 3$ แกน X, Y
 ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

สร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งฉากกับแกน X โดยหมุนรอบแกน X ดังรูป 7.21(1) ในที่นี้
 รัศมีวงนอกคือ $y = x^2 + 1$ รัศมีวงในคือ 0 และความหนาคือ dx ดังรูป 7.21(2)



รูป 7.21 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย

เส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ เส้นตรง $x = 3$ แกน X, Y รอบแกน X

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากบริเวณ R รอบแกน X คือ

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^3 \left[(x^2 + 1)^2 - 0^2 \right] dx \\
 &= \pi \int_0^3 (x^2 + 1)^2 dx \\
 &= \pi \int_0^3 (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_0^3 \\
 &= \pi \left[\left(\frac{3^5}{5} + \frac{2(3)^3}{3} + 3 \right) - \left(\frac{0^5}{5} + \frac{2(0)^3}{3} + 0 \right) \right] \\
 &= \pi \left(\frac{243}{5} + \frac{54}{3} + 3 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{243}{5} + 18 + 3 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{243}{5} + 21 \right) \\
 &= \frac{348\pi}{5} \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.13 จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง

$x = \frac{1}{3}y^2$ เส้นตรง $y = -3$ และแกน Y โดยหมุนรอบแกน Y

วิธีทำ ให้ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $x = \frac{1}{3}y^2$ เส้นตรง $y = -3$ และแกน Y

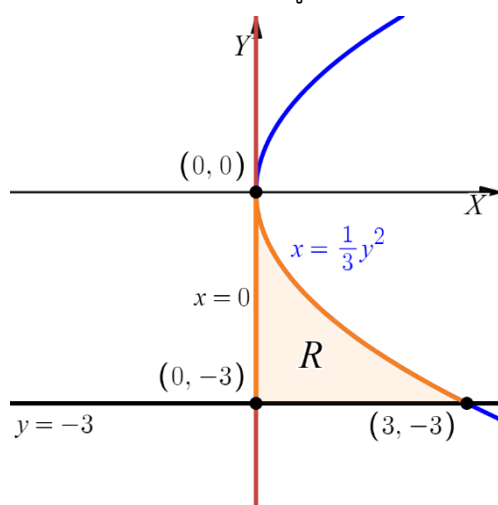
$x = \frac{1}{3}y^2$ เป็นพาราโบลาลักษณะเปิดขวา จุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$

$y = -3$ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน Y และตัดแกน Y ที่จุด $y = -3$

หาจุดตัดกราฟ $x = \frac{1}{3}y^2$ และ $y = -3$

ที่ $y = -3$ จะได้ $x = 3$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(3, -3)$

จะได้ว่า บริเวณ R สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป 7.22

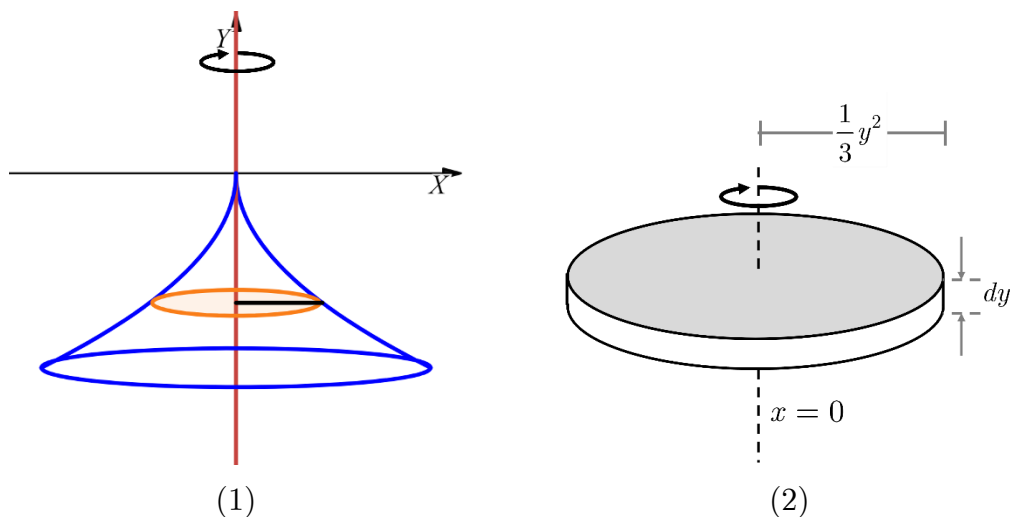


รูป 7.22 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = 3y^2$ เส้นตรง $y = -2$ และแกน Y

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

สร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งฉากกับแกน Y โดยหมุนรอบแกน Y ดังรูป 7.23(1) ในที่นี้

รัศมีวงนอกคือ $x = \frac{1}{3}y^2$ รัศมีวงในคือ 0 และความหนาคือ dy ดังรูป 7.23(2)



รูป 7.23 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย

เส้นโค้ง $x = 3y^2$ เส้นตรง $y = -2$ และแกน Y รอบแกน Y

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากบริเวณ R รอบแกน Y คือ

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-3}^0 \left[\left(\frac{1}{3} y^2 \right)^2 - 0^2 \right] dy \\
&= \pi \int_{-3}^0 \frac{1}{9} y^4 dy \\
&= \pi \left[\frac{y^5}{45} \right]_{-3}^0 \\
&= \frac{\pi}{45} \left[y^5 \right]_{-3}^0 \\
&= \frac{\pi}{45} \left(0^5 - (-3)^5 \right) \\
&= \frac{\pi}{45} (243) \\
&= \frac{27\pi}{5} \text{ ลูกบาศก์หน่วย}
\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 7.14 จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$ โดยหมุนรอบแกน X และหมุนรอบแกน Y

วิธีทำ ให้ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$

$y = x^2$ เป็นพาราโบลาลักษณะหงาย จุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$

$x = y^2$ เป็นพาราโบลาลักษณะเปิดขวา จุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$

หาจุดตัดกราฟ $y = x^2$ และ $x = y^2$ หรือ $y = \sqrt{x}$

$$x^2 = \sqrt{x}$$

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

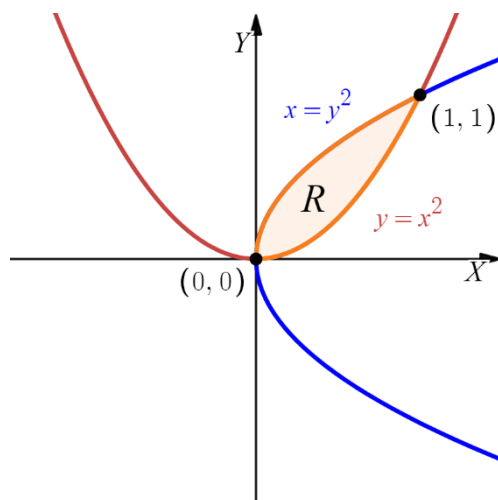
$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0, 1$$

ที่ $x = 0$ จะได้ $y = 0$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(0,0)$

ที่ $x = 1$ จะได้ $y = 1$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(1,1)$

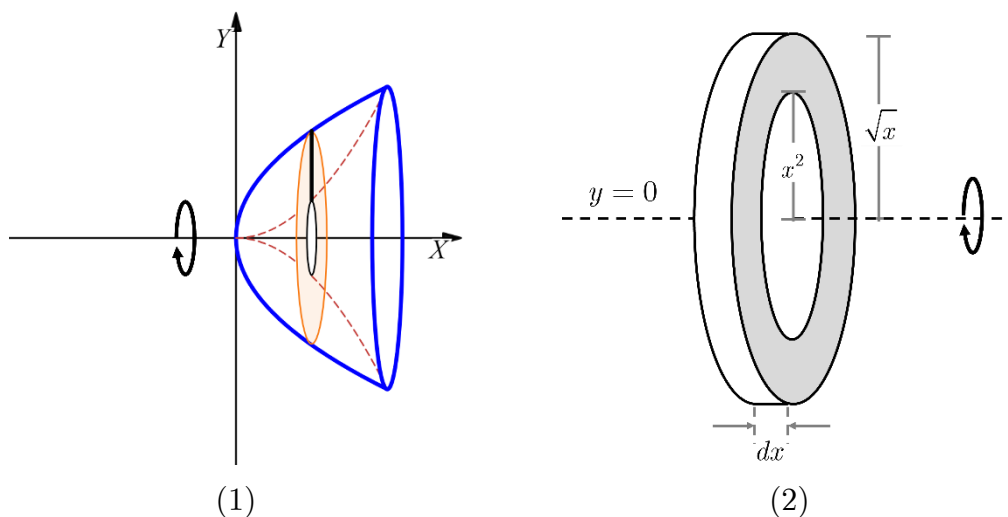
บริเวณ R สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป 7.24



รูป 7.24 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

กรณีรอบแกน X สร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งฉากกับแกน X โดยหมุนรอบแกน X ดังรูป 7.25(1) ในที่นี้ รัศมีวงนอกคือ $y = \sqrt{x}$ รัศมีวงในคือ $y = x^2$ และความหนาคือ dx ดังรูป 7.25(2)



รูป 7.25 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย

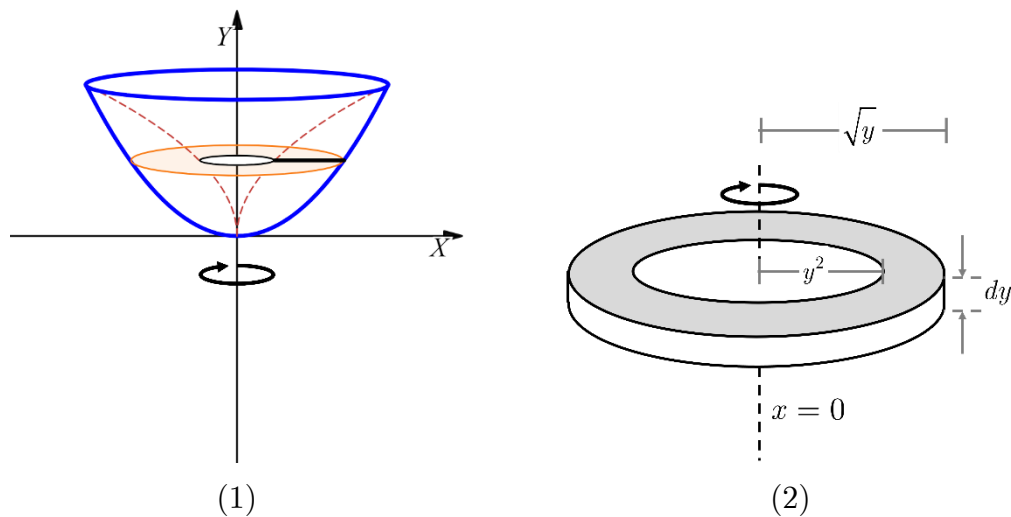
เส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$ รอบแกน X

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากบริเวณ R รอบแกน X คือ

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 \left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \right] dx \\
 &= \pi \int_0^1 \left[x - x^4 \right] dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\
 &= \pi \left[\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^5}{5} \right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^5}{5} \right) \right] \\
 &= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \\
 &= \frac{3\pi}{10} \text{ ลูกบาศก์หน่วย}
 \end{aligned}$$

กรณีรอบแกน Y สร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งฉากกับแกน Y โดยหมุนรอบแกน Y ดังรูป 7.26(1) ในที่นี้ รัศมีวงนอกคือ $x = \sqrt{y}$ รัศมีวงในคือ $x = y^2$ และความหนาคือ dy ดังรูป 7.26(2)



รูป 7.26 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย

เส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$ รอบแกน Y

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากบริเวณ R รอบแกน Y คือ

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 \left[(\sqrt{y})^2 - (y^2)^2 \right] dy \\
 &= \pi \int_0^1 \left[y - y^4 \right] dy \\
 &= \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 \\
 &= \pi \left[\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^5}{5} \right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^5}{5} \right) \right] \\
 &= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \\
 &= \frac{3\pi}{10} \text{ ลูกบาศก์หน่วย}
 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 7.15 จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 3$ เส้นตรง $y = x + 2$, $x = 0$ และ $x = 1$ โดยหมุนรอบเส้นตรง $y = 1$

วิธีทำ ให้ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ เส้นตรง $y = x + 2$, $x = 0$ และ $x = 1$

$y = x^2 + 3$ เป็นพาราโบลาลักษณะหงาย จุดยอดอยู่ที่ $(0, 3)$

$y = x + 2$ เป็นเส้นตรงที่ตัดแกน X ที่จุด $x = -2$ และตัดแกน Y ที่จุด $y = 2$

$x = 0$ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X และตัดแกน X ที่จุด $x = 0$

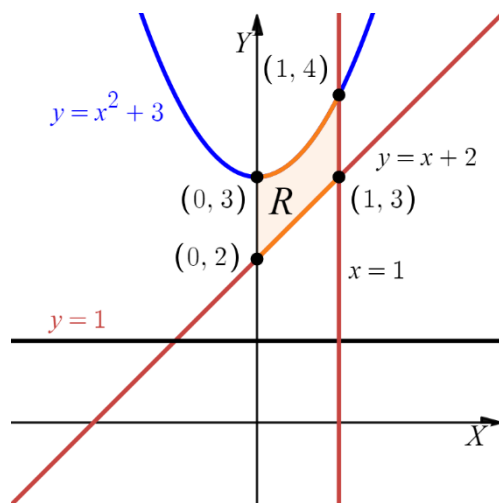
$x = 1$ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X และตัดแกน X ที่จุด $x = 1$

หาจุดตัดกราฟ $y = x^2 + 3$ และ $x = 0$, $x = 1$

ที่ $x = 0$ จะได้ $y = 2$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(0, 2)$

ที่ $x = 1$ จะได้ $y = 3$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(1, 3)$

จะได้ว่า บริเวณ R สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป 7.27



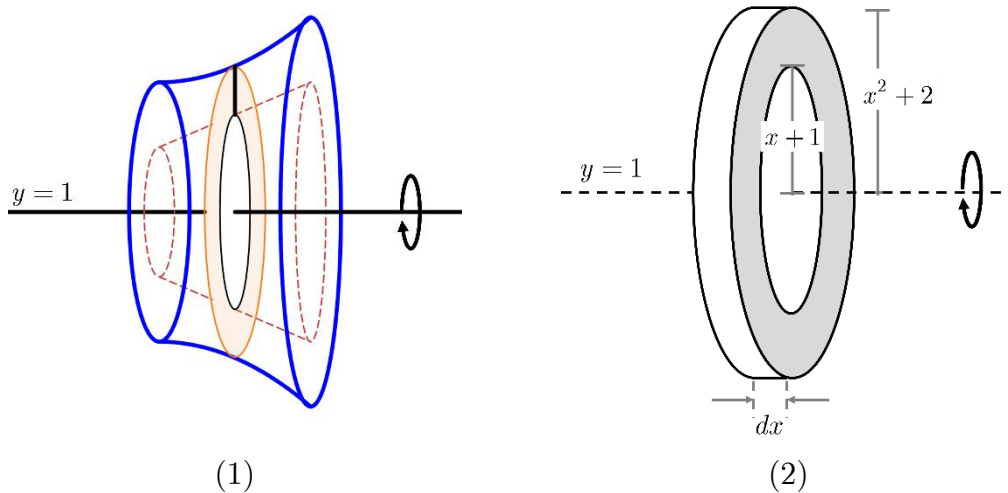
รูป 7.27 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย

เส้นโค้ง $y = x^2 + 3$ เส้นตรง $y = x + 2$, $x = 0$ และ $x = 1$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

สร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งฉากกับแกน X โดยหมุนรอบเส้นตรง $y = 1$ ดังรูป 7.28(1)

ในที่นี้ รัศมีวงนอกคือ $y = x^2 + 2$ รัศมีวงในคือ $y = x + 1$ และความหนาคือ dx ดังรูป 7.28(2)



รูป 7.28 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย

เส้นโค้ง $y = x^2 + 3$ เส้นตรง $y = x + 2$, $x = 0$ และ $x = 1$ รอบเส้นตรง $y = 1$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากบริเวณ R รอบเส้นตรง $y = 1$ คือ

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 \left[(x^2 + 2)^2 - (x + 1)^2 \right] dx \\
&= \pi \int_0^1 \left[(x^4 + 4x^2 + 4) - (x^2 + 2x + 1) \right] dx \\
&= \pi \int_0^1 \left[x^4 + 4x^2 + 4 - x^2 - 2x - 1 \right] dx \\
&= \pi \int_0^1 (x^4 + 3x^2 - 2x + 3) dx \\
&= \pi \left[\frac{x^5}{5} + x^3 - x^2 + 3x \right]_0^1 \\
&= \pi \left[\left(\frac{1^5}{5} + 1^3 - 1^2 + 3(1) \right) - \left(\frac{0^5}{5} + 0^3 - 0^2 + 3(0) \right) \right] \\
&= \pi \left(\frac{1}{5} + 1 - 1 + 3 \right) \\
&= \pi \left(\frac{1}{5} + 3 \right) \\
&= \frac{16\pi}{5} \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.16 จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = y^2$ เส้นตรง $y = 2$ และ $x = 0$ โดยหมุนรอบเส้นตรง $x = -1$

วิธีทำ ให้ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $x = y^2$ เส้นตรง $y = 2$ และ $x = 0$

$x = y^2$ เป็นพาราโบลาลักษณะเปิดขวา จุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$

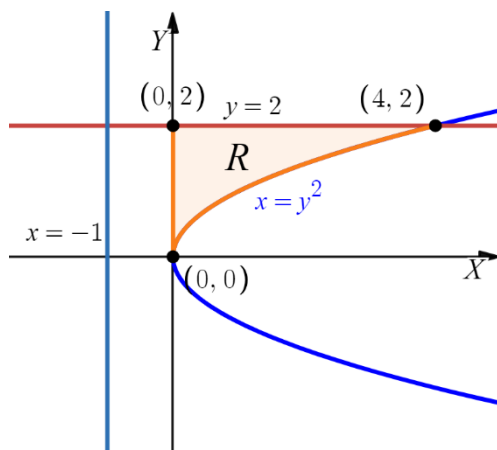
$y = 2$ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน Y และตัดแกน Y ที่จุด $y = 2$

$x = 0$ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X และตัดแกน X ที่จุด $x = 0$

หาจุดตัดกราฟ $x = y^2$ และ $y = 2$

ที่ $y = 2$ จะได้ $x = 4$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(4, 2)$

จะได้ว่า บริเวณ R สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป 7.29

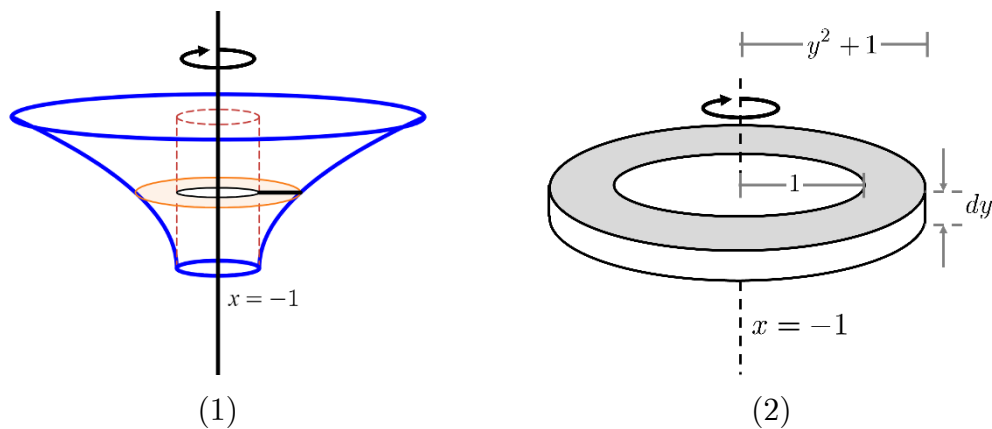


รูป 7.29 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = y^2$ เส้นตรง $y = 2$ และ $x = 0$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

สร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งฉากกับแกน Y โดยหมุนรอบเส้นตรง $x = -1$ ดังรูป 7.30(1)

ในที่นี้ รัศมีวงนอกคือ $x = y^2 + 1$ รัศมีวงในคือ $x = 1$ และความหนาคือ dy ดังรูป 7.30(2)



รูป 7.30 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย

เส้นโค้ง $x = y^2$ เส้นตรง $y = 2$ และ $x = 0$ รอบเส้นตรง $x = -1$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากบริเวณ R รอบเส้นตรง $x = -1$ คือ

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left[(y^2 + 1)^2 - 1^2 \right] dy \\ &= \pi \int_0^2 (y^4 + 2y^2 + 1 - 1) dy \end{aligned}$$

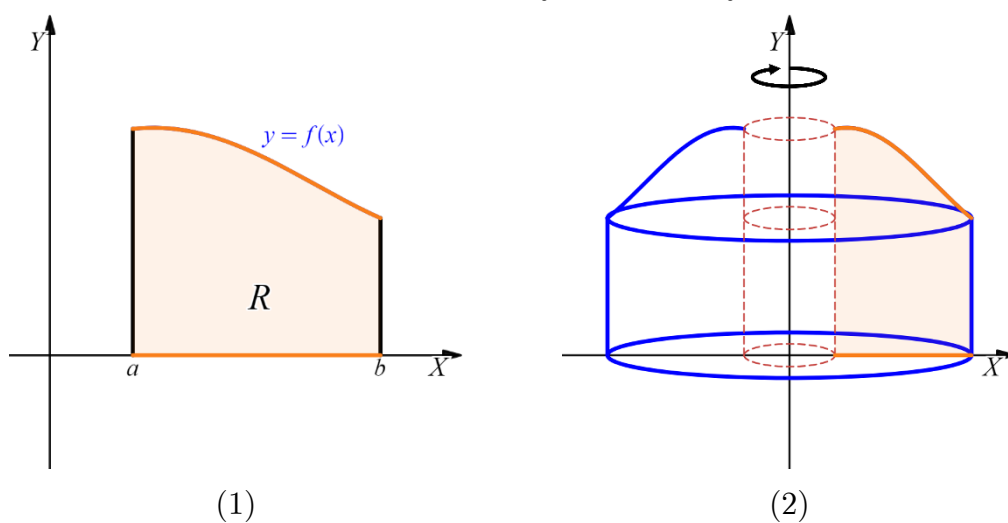
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^2 (y^4 + 2y^2) dx \\
 &= \pi \left[\frac{y^5}{5} + \frac{2y^3}{3} \right]_0^2 \\
 &= \pi \left[\left(\frac{2^5}{5} + \frac{2(2)^3}{3} \right) - \left(\frac{(0)^5}{5} + \frac{2(0)^3}{3} \right) \right] \\
 &= \pi \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} \right) \\
 &= \frac{176\pi}{5} \text{ ลูกบาศก์หน่วย}
 \end{aligned}$$

■

7.3.2 การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีเปลือกทรงกระบอก

ในการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีเปลือกทรงกระบอก จะเป็นการแบ่งรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนออกเป็นหลาย ๆ ส่วน โดยในแต่ละส่วนจะอยู่ในรูปเปลือกทรงกระบอกย่อย ๆ ซ้อนกัน เมื่อนำเปลือกทรงกระบอกย่อย ๆ มารวมกันจะได้ปริมาตรของรูปทรงสามมิติ

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ เมื่อ $f(x) \geq 0$ สำหรับ $a \leq x \leq b$ และให้ R เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และแกน X สำหรับ $a \leq x \leq b$ ดังรูป 7.31(1) ทำการหมุนบริเวณ R รอบแกน Y จะได้รูปทรงสามมิติดังรูป 7.31(2)

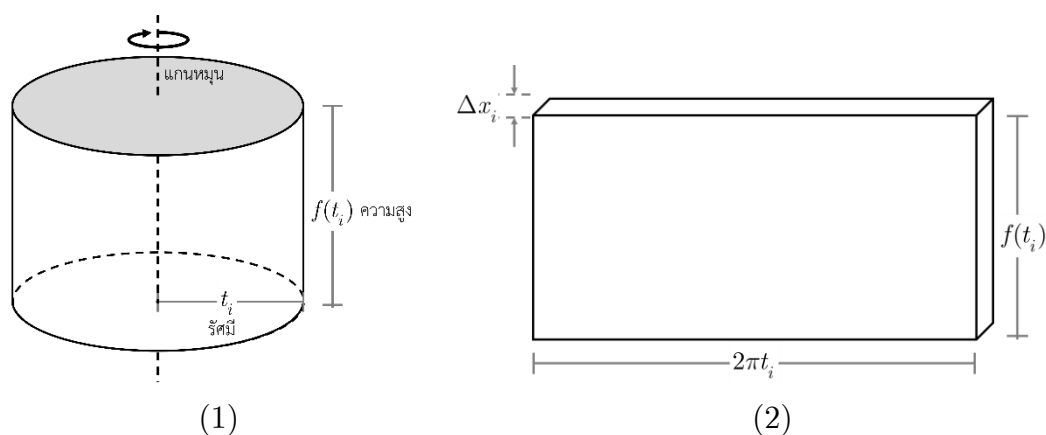


รูป 7.31 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R รอบแกน Y โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จะทำการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R ทำได้โดยเริ่มต้นจะแบ่งบริเวณ R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า n ชิ้น ให้ $P = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ เป็นผลแบ่งกั้นบนช่วงปิด $[a, b]$ ให้ Δx_i เป็นความยาวบนช่วงปิด $[x_i, x_{i+1}]$ และ t_i เป็นค่าที่อยู่ในช่วงปิด $[x_i, x_{i+1}]$ จะได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใด ๆ จะมีความกว้างคือ Δx_i และความสูงคือ $f(t_i)$

เมื่อทำการหมุนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใด ๆ รอบแกน Y จะได้เปลือกทรงกระบอกที่มีรัศมีทรงกระบอกคือ t_i ความสูงคือ $f(t_i)$ และมีความหนาคือ Δx_i ดังรูป 7.32



รูป 7.32 กราฟแสดงเปลือกทรงกระบอกที่มีรัศมี t_i ความสูง $f(t_i)$ และความหนา Δx_i
ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ให้ V_i เป็นปริมาตรของเปลือกทรงกระบอกใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V_i &= 2\pi \times (\text{รัศมี}) \times (\text{ความสูง}) \times (\text{ความหนา}) \\ &= 2\pi t_i f(t_i) \Delta x_i \end{aligned}$$

สามารถประมาณค่าปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R ด้วยผลรวมของปริมาตรเปลือกทรงกระบอกใด ๆ n ชิ้น

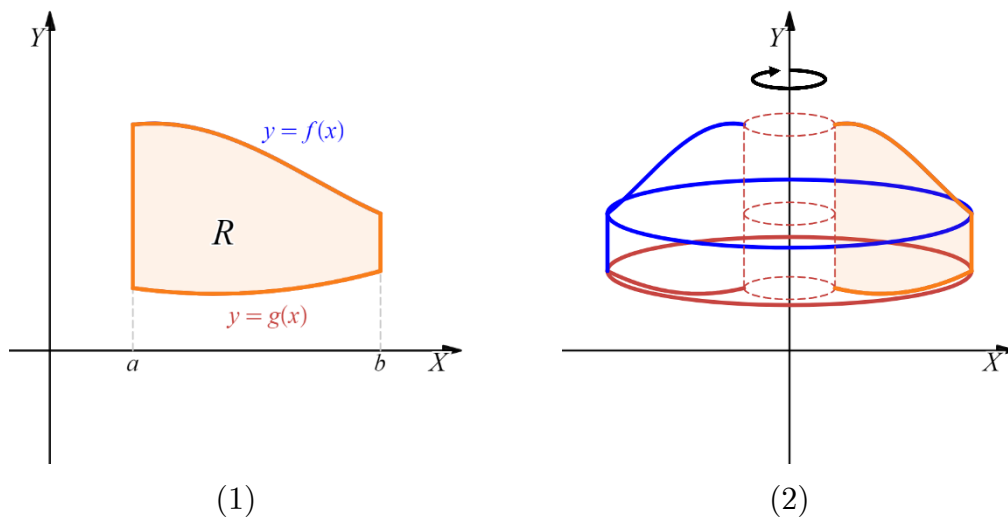
$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^n V_i \\ &= \sum_{i=1}^n 2\pi t_i f(t_i) \Delta x_i \end{aligned}$$

ให้ $\Delta x^* = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ เมื่อ $\Delta x^* \rightarrow 0$ จะได้ว่าปริมาตรข้างต้นลู่เข้าสู่ค่าที่แท้จริง นั่นคือ

$$\begin{aligned}
 V &= \lim_{\Delta x^* \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n 2\pi t_i f(t_i) \Delta x^* \right] \\
 &= \int_a^b 2\pi x f(x) dx \\
 &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx
 \end{aligned}$$

เนื่องจากปริมาตรที่ได้ เกิดจากผลรวมของปริมาตรของเปลือกทรงกระบอกย่อย ๆ จึงเรียกวิธีนี้ว่าวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก (cylindrical shell method)

ในกรณีที่ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ $f(x) \geq g(x) \geq 0$ สำหรับ $a \leq x \leq b$ ดังรูป 7.33(1) ทำการหมุนบริเวณ R รอบแกน Y จะได้รูปทรงสามมิติ ดังรูป 7.33(2)



รูป 7.33 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$

รอบแกน Y โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

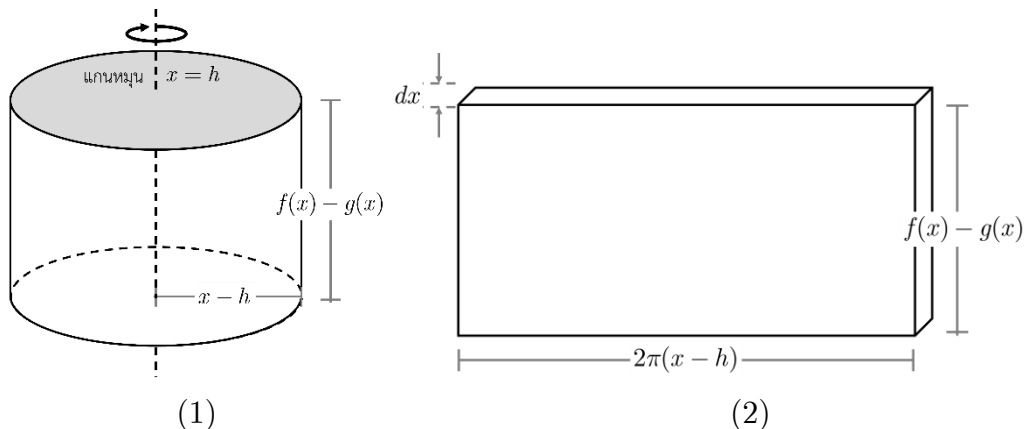
เนื่องจากปริมาตรที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R เป็นรูปทรงสามมิติ เกิดจากปริมาตรที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X (V_f) ลบด้วยปริมาตรที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = g(x)$ กับแกน X (V_g) ดังนั้น ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R คือ

$$\begin{aligned}
 V &= \text{ปริมาตรของ } V_f - \text{ปริมาตรของ } V_g \\
 &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx - 2\pi \int_a^b x g(x) dx \\
 &= 2\pi \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx
 \end{aligned}$$

ข้อสังเกต ในการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน Y โดยวิธีเปลือกทรงกระบอกนั้น จะพิจารณารัศมีของเปลือกทรงกระบอกที่เกิดจากการหมุน โดยจุดศูนย์กลางของเปลือกทรงกระบอกก็คือแกนหมุน ความสูงของเปลือกทรงกระบอกและความหนาของเปลือกทรงกระบอก บนช่วงปิด $[a, b]$

$$V = 2\pi \int_a^b (\text{รัศมี}) \times (\text{ความสูง}) \times (\text{ความหนา})$$

ในกรณีที่แกนหมุนเป็นเส้นตรง $x = h$ ที่ขนานกับแกน Y จะได้ว่าจุดศูนย์กลางของแผ่นงานจะเปลี่ยนไปจากแกน X เป็นเส้นตรง $x = h$ ดังนั้นรัศมีเปลือกทรงกระบอกคือ $x - h$ ความสูงของเปลือกทรงกระบอกคือ $f(x) - g(x)$ โดยมีความหนาคือ dx ดังรูป 7.34



รูป 7.34 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$

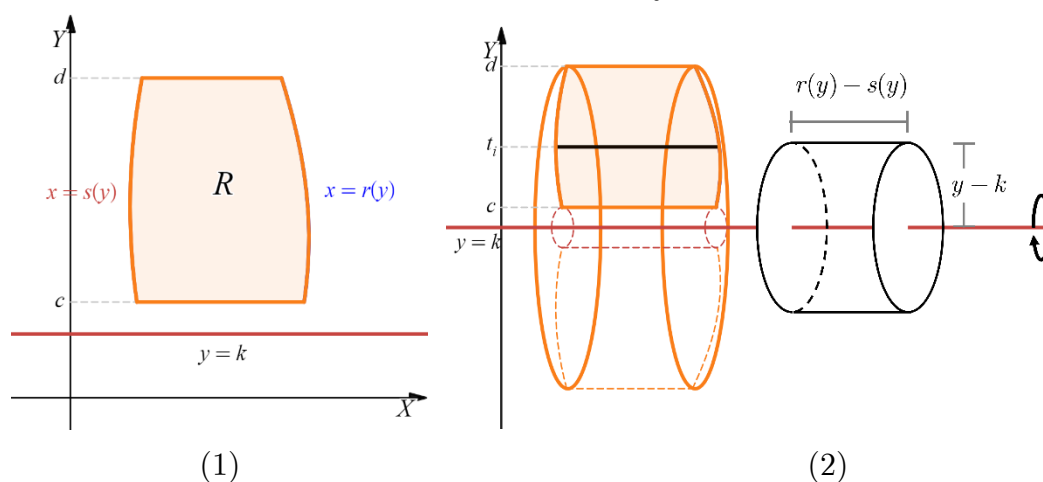
รอบเส้นตรง $x = h$ โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จะได้ว่าปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบเส้นตรง $x = h$ เมื่อ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ $f(x) \geq g(x) \geq 0$ สำหรับ $a \leq x \leq b$

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_a^b (\text{รัศมี}) \times (\text{ความสูง}) \times (\text{ความหนา}) \\
 &= 2\pi \int_a^b (x-h) [f(x) - g(x)] dx
 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน ในกรณีที่ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $x = r(y)$ และ $x = s(y)$ เมื่อ r และ s เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c, d]$ และ $r(y) \geq s(y) \geq 0$ สำหรับ $c \leq y \leq d$ โดยหมุนรอบเส้นตรง $y = k$ ที่ขนานแกน X ดังรูป 7.35(1)



รูป 7.35 กราฟแสดงการหมุนบริเวณ R ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $x = r(y)$ และ $x = s(y)$

รอบเส้นตรง $y = k$ โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

พิจารณาการหมุนบริเวณ R รอบเส้นตรง $y = k$ ที่ขนานแกน X ดังรูป 7.35(2) จะได้ว่ารัศมีคือ $y - k$ โดยมีความสูงคือ $r(y) - s(y)$ และความหนาคือ dy สามารถหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบเส้นตรง $y = k$ ที่ขนานแกน X โดยวิธีเปลือกทรงกระบอกได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_c^d (\text{รัศมี}) \times (\text{ความสูง}) \times (\text{ความหนา}) \\
 &= 2\pi \int_c^d (y-k) [r(y) - s(y)] dy
 \end{aligned}$$

สรุปการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกนหมุน โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก

1. บริเวณ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ สำหรับ $a \leq x \leq b$ หมุนรอบเส้นตรง $x = h$ ที่ขนานแกน Y โดยมีรัศมีคือ $x - h$ ความสูงคือ $f(x) - g(x)$ และความหนาคือ dx

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b (\text{รัศมี}) \times (\text{ความสูง}) \times (\text{ความหนา}) \\ &= 2\pi \int_a^b (x - h) [f(x) - g(x)] dx \end{aligned}$$

2. บริเวณ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $x = r(y)$ และ $x = s(y)$ สำหรับ $c \leq y \leq d$ หมุนรอบเส้นตรง $y = k$ ที่ขนานแกน X โดยมีรัศมีคือ $y - k$ ความสูงคือ $r(y) - s(y)$ และความหนาคือ dy

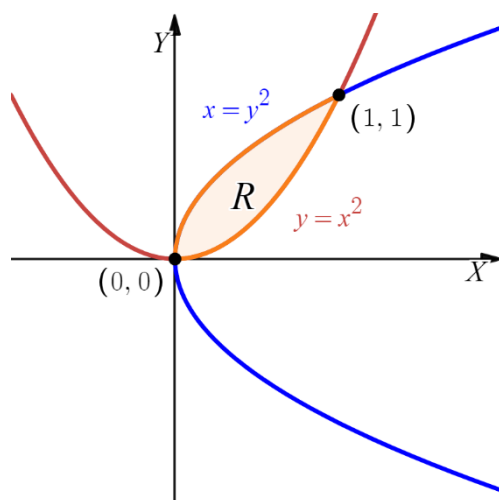
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_c^d (\text{รัศมี}) \times (\text{ความสูง}) \times (\text{ความหนา}) \\ &= 2\pi \int_c^d (y - k) [r(y) - s(y)] dy \end{aligned}$$

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.17 จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$ โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก โดยหมุนรอบแกน X และแกน Y

วิธีทำ ให้ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$

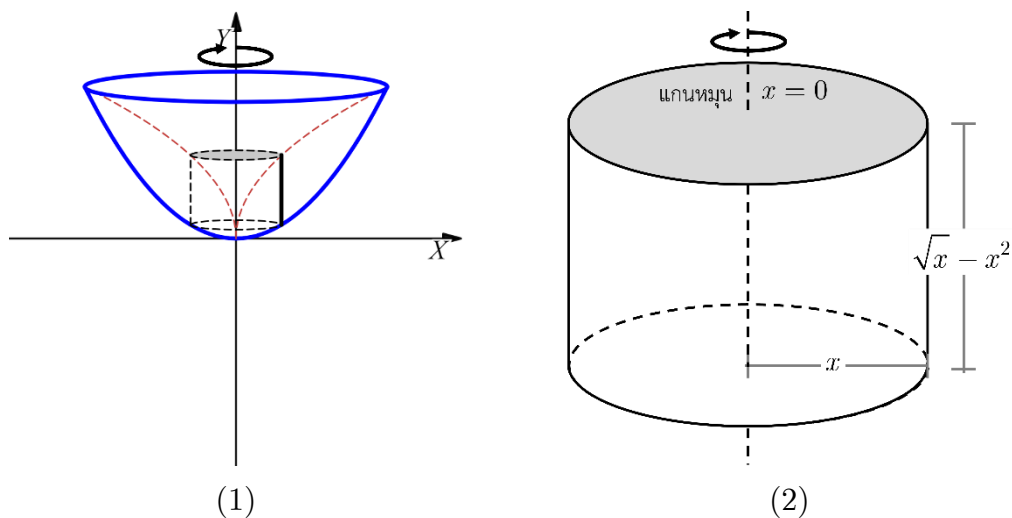
จากตัวอย่าง 7.14 บริเวณ R สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป 7.36



รูป 7.36 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

กรณีรอบแกน Y สร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งฉากกับแกน X ดังรูป 7.37(1) ในที่นี้ รัศมีคือ x ความสูงคือ $\sqrt{x} - x^2$ และความหนาคือ dx ดังรูป 7.37(2)



รูป 7.37 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย

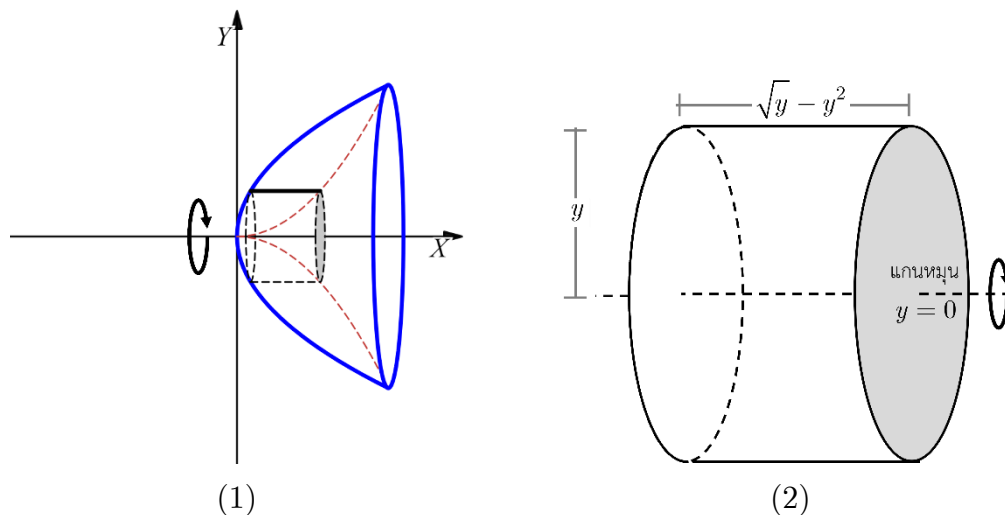
เส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$ รอบแกน Y

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน Y คือ

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2) dx \\
 &= 2\pi \int_0^1 (x^{3/2} - x^3) dx \\
 &= 2\pi \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= 2\pi \left[\left(\frac{2(1)^{5/2}}{5} - \frac{1^4}{4} \right) - \left(\frac{2(0)^{5/2}}{5} - \frac{0^4}{4} \right) \right] \\
 &= 2\pi \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) \\
 &= 2\pi \left(\frac{3}{20} \right) \\
 &= \frac{3\pi}{10} \text{ ลูกบาศก์หน่วย}
 \end{aligned}$$

กรณีรอบแกน X สร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งฉากกับแกน Y โดยหมุนรอบแกน X ดังรูป 7.38(1) ในที่นี้ รัศมีคือ y ความสูงคือ $\sqrt{y} - y^2$ และความหนาคือ dy ดังรูป 7.38(2)



รูป 7.38 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย

เส้นโค้ง $y = x^2$ และ $x = y^2$ รอบแกน X

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน X คือ

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^1 y(\sqrt{y} - y^2) dy \\
&= 2\pi \int_0^1 (y^{3/2} - y^3) dy \\
&= 2\pi \left[\frac{y^{5/2}}{5/2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 \\
&= 2\pi \left[\left(\frac{2(1)^{5/2}}{5} - \frac{1^4}{4} \right) - \left(\frac{2(0)^{5/2}}{5} - \frac{0^4}{4} \right) \right] \\
&= 2\pi \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{3}{20} \right) \\
&= \frac{3\pi}{10} \text{ ลูกบาศก์หน่วย} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.18 จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ เส้นตรง $x = 1$, แกน X และแกน Y โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก โดยหมุนรอบเส้นตรง $x = 1$

วิธีทำ ให้ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ เส้นตรง $x = 1$, แกน X และแกน Y

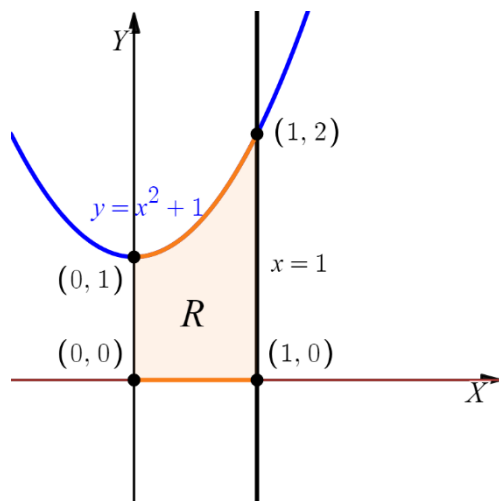
$y = x^2 + 1$ เป็นพาราโบลาลักษณะหงาย จุดยอดอยู่ที่ $(0,1)$

$x = 1$ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X และตัดแกน X ที่จุด $x = 1$

หาจุดตัดกราฟ $y = x^2 + 1$ และ $x = 1$

ที่ $x = 1$ จะได้ $y = 2$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(1,2)$

จะได้ว่า บริเวณ R สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป 7.39(1)



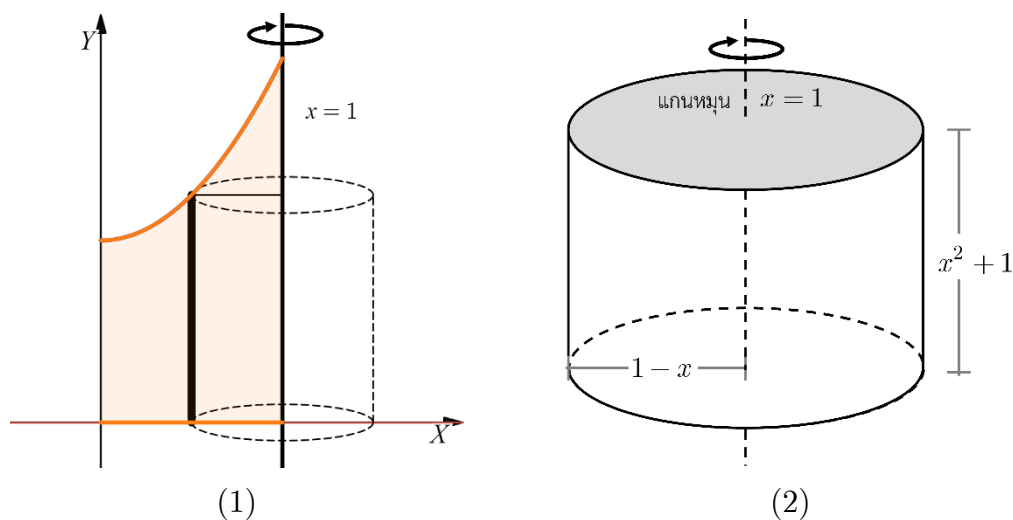
รูป 7.39 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ เส้นตรง $x = 1$

แกน X และแกน Y

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

สร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งฉากกับแกน X โดยหมุนรอบเส้นตรง $x = 1$ ดังรูป 7.40(1)

ในที่นี้ รัศมีคือ $1 - x$ ความสูงคือ $x^2 + 1$ และความหนาคือ dx ดังรูป 7.40(2)



รูป 7.40 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย

เส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ เส้นตรง $x = 1$, แกน X และแกน Y รอบเส้นตรง $x = 1$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบเส้นตรง $x = 1$ คือ

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^1 (1-x)(x^2+1) dx \\
&= 2\pi \int_0^1 (-x^3 - x + x^2 + 1) dx \\
&= 2\pi \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 \\
&= 2\pi \left[\left(-\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1 \right) - \left(-\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} + 0 \right) \right] \\
&= 2\pi \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{7}{12} \right) \\
&= \frac{7\pi}{6} \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.19 จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = y^2 - 2y$ และแกน Y โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก โดยหมุนรอบเส้นตรง $y = -1$

วิธีทำ ให้ R เป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $x = y^2 - 2y$ และแกน Y

$x = y^2 - 2y$ เป็นพาราโบลาลักษณะเปิดขวา จุดยอดอยู่ที่ $(-1, 1)$

หาจุดตัดกราฟ $x = y^2 - 2y$ และแกน Y ($x = 0$)

$$y^2 - 2y = 0$$

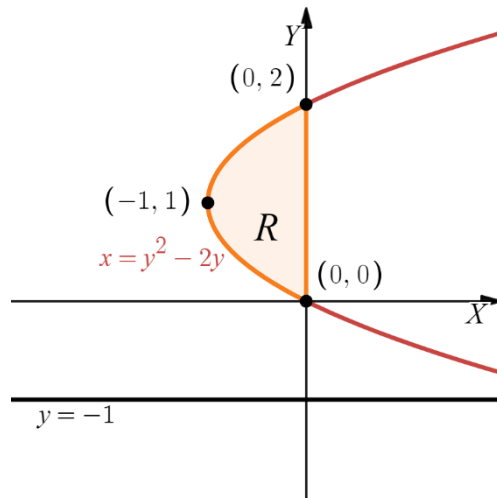
$$y(y - 2) = 0$$

$$y = 0, 2$$

ที่ $y = 0$ จะได้ $x = 0$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(0, 0)$

ที่ $y = 2$ จะได้ $x = 0$ ดังนั้นจุดตัดกราฟคือ $(0, 2)$

จะได้ว่า บริเวณ R สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป 7.41

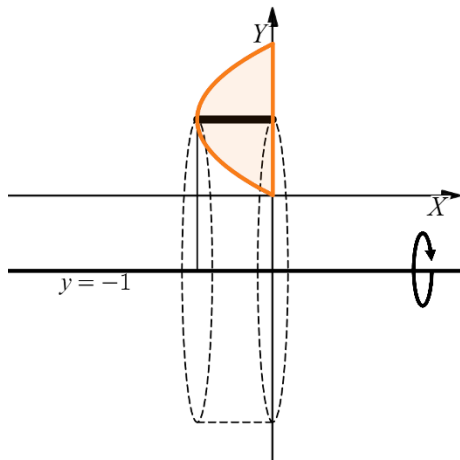


รูป 7.41 กราฟแสดงพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = y^2 - 2y$ และแกน Y

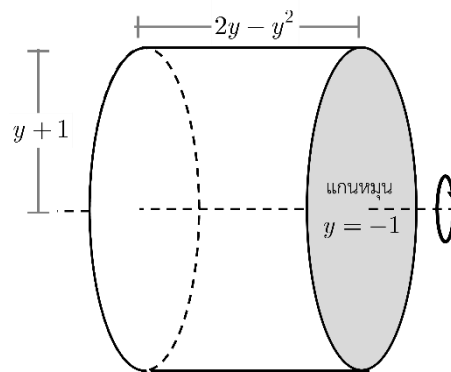
ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

สร้างแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งฉากกับแกน Y โดยหมุนรอบเส้นตรง $y = -1$ ดังรูป 7.42(1)

ในที่นี้ รัศมีคือ $y + 1$ ความสูงคือ $2y - y^2$ และความหนาคือ dy ดังรูป 7.42(2)



(1)



(2)

รูป 7.42 กราฟแสดงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย

เส้นโค้ง $x = y^2 - 2y$ และแกน Y รอบเส้นตรง $y = -1$

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบเส้นตรง $y = -1$ คือ

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 (y+1)(2y-y^2) dy \\ &= 2\pi \int_0^2 (2y^2 - y^3 + 2y - y^2) dy \\ &= 2\pi \int_0^2 (-y^3 + y^2 + 2y) dy \\ &= 2\pi \left[-\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + y^2 \right]_0^2 \\ &= 2\pi \left[\left(-\frac{2^4}{4} + \frac{2^3}{3} + 2^2 \right) - \left(-\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} + 0^2 \right) \right] \\ &= 2\pi \left(-\frac{16}{4} + \frac{8}{3} + 4 \right) \\ &= 2\pi \left(-4 + \frac{8}{3} + 4 \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{8}{3} \right) \\ &= \frac{16\pi}{3} \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

สรุปเนื้อหาในบทที่ 7

ปริพันธ์จำกัดเขตอาจกล่าวได้ว่าเป็นการหาพื้นที่ระหว่างกราฟของฟังก์ชันกับแกนพิกัดในช่วงที่กำหนด โดยมีแนวคิดมาจากการแบ่งพื้นที่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดเล็ก ๆ จำนวนอนันต์ชิ้น แล้วนำพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจำนวนอนันต์ชิ้นมารวมกัน

ในการหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x) dx$ โดยอาศัยวิธีการหาปริพันธ์โดยการแทนค่า สามารถ

ทำได้ 2 วิธี โดยวิธีแรกคือหาค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขตโดยการแทนค่าก่อน แล้วจึงใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส หาค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขต และวิธีที่สองคือวิธีการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตัวแปร u และทำการเปลี่ยนขอบเขตการหาปริพันธ์ แล้วจึงใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส หาค่าปริพันธ์

ในการประยุกต์ปริพันธ์จำกัดเขต จะกล่าวถึงการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง และปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน

การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้น จะใช้หลักการเดียวกันกับการหาปริพันธ์จำกัดเขต โดยการสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดเล็ก ๆ จำนวนอนันต์ชิ้น แล้วนำพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจำนวนอนันต์ชิ้นมารวมกัน โดยสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะอยู่ในรูปแนวตั้งหรือแนวนอนขึ้นอยู่กับฟังก์ชันที่พิจารณา

ในการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนจะมีวิธีการหา 2 วิธีหลัก ๆ คือวิธีแบบจาน โดยมีหลักการคือการแบ่งรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนให้เป็นจานกลมขนาดเล็ก ๆ จำนวนอนันต์ชิ้น แล้วนำปริมาตรของจานจำนวนอนันต์ชิ้นมารวมกัน ในขณะที่อีกวิธีคือวิธีเปลือกทรงกระบอก จะเป็นการแบ่งรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนให้อยู่ในรูปเปลือกของทรงกระบอกจำนวนอนันต์ชิ้น แล้วนำปริมาตรของเปลือกของทรงกระบอกจำนวนอนันต์ชิ้นมารวมกัน

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

1. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \quad \int_{-1}^2 x(1+x^2) dx$$

$$1.2 \quad \int_{-1}^0 15x^2(x^3+1)^4 dx$$

$$1.3 \quad \int_0^1 (e^{2x} - 4x^3) dx$$

$$1.4 \quad \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 3x) dx$$

$$1.5 \quad \int_0^{\pi/2} x \sin 3x dx$$

$$1.6 \quad \int_{-1}^1 x^2 e^x dx$$

2. จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$2.1 \quad \text{เส้นโค้ง } y = x^2 \text{ เส้นตรง } x = 4 \text{ และแกน } X$$

$$2.2 \quad \text{เส้นโค้ง } y^2 = x - 1 \text{ เส้นตรง } y = -1, y = 2 \text{ และแกน } Y$$

$$2.3 \quad \text{เส้นโค้ง } y^2 = x \text{ และเส้นตรง } x + y = 2$$

$$2.4 \quad \text{เส้นโค้ง } y = x^2 + 1 \text{ เส้นตรง } y = 2x - 2, x = -1 \text{ และ } x = 2$$

3. จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$3.1 \quad \text{เส้นโค้ง } y = x^2 + 1 \text{ เส้นตรง } x = 2 \text{ แกน } X, Y \text{ รอบแกน } X$$

$$3.2 \quad \text{เส้นโค้ง } x = y^2 \text{ เส้นตรง } y = 2 \text{ แกน } Y \text{ รอบแกน } Y$$

$$3.3 \quad \text{เส้นโค้ง } x = y^2 \text{ เส้นตรง } y = 2 \text{ แกน } Y \text{ รอบเส้นตรง } y = 2$$

$$3.4 \quad \text{เส้นโค้ง } y = x^2 + 1 \text{ เส้นตรง } x = 1, y = 1, y = 2 \text{ รอบเส้นตรง } x = 1$$

$$3.5 \quad \text{เส้นโค้ง } x = y^2 \text{ เส้นตรง } x = -1, y = -1 \text{ และ } y = 2 \text{ รอบเส้นตรง } x = -1$$

4. จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$4.1 \quad \text{เส้นโค้ง } x = y^2 \text{ เส้นตรง } y = x \text{ รอบแกน } X$$

$$4.2 \quad \text{เส้นโค้ง } y = x^2 + 1 \text{ เส้นตรง } x = 1 \text{ แกน } X \text{ แกน } Y \text{ รอบแกน } Y$$

$$4.3 \quad \text{เส้นโค้ง } y = x^2 + 1 \text{ เส้นตรง } x = 1 \text{ แกน } X \text{ แกน } Y \text{ รอบเส้นตรง } x = 1$$

เอกสารอ้างอิง

นงนุช สุขวารี, พัทรี เลิศวิจิตรศิลป์, กนกรัตน์ เสวตเศรณี, พันทิพย์ โตแก้ว, กันตภณ คูหาพัฒนกุล และกันย์ สุนัยขึ้น. (2556). *คณิตศาสตร์วิศวกรรม 1*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แสงสว่างเวิลด์เพรสจำกัด.

นงนุช สุขวารี, พัทรี เลิศวิจิตรศิลป์, สุขชัย ตันยัชฌมาวุฒิ, กนกรัตน์ เสวตเศรณี และมนตรี มาลีวงศ์. (2553). *เทคนิคอินทิเกรตและการประยุกต์*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แสงสว่างเวิลด์เพรสจำกัด.

มนัส ประสงค์. (ม.ป.ป.). *แคลคูลัส 1*. กรุงเทพฯ: ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

มนัส ประสงค์. (2535). *แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 1*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). *ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน*. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สหมิตรพรินติ้ง.

วิริยะ ศิริขานนท์. (มปป). *แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร*. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus* (10th ed.). John Wiley & Sons. Ltd., New York, U.S.A.

Desmos. (n.d.). *Graphing Calculator*. <https://www.desmos.com/calculator>

Thomas, G. B., Jr., Weir, M. D., & Hass, J. R. (2013). *Thomas' calculus: Early transcendentals* (13th ed.). Pearson.

William L. Briggs, Denver L. Cochran and Eric L. Schulz. (2013). *Calculus for Scientists and Engineers*. (1st ed.). Pearson Education, Inc., USA

ภาคผนวก ก
การลงจุดกราฟโดยใช้เว็บแอปพลิเคชัน

1. การเข้าสู่เว็บไซต์



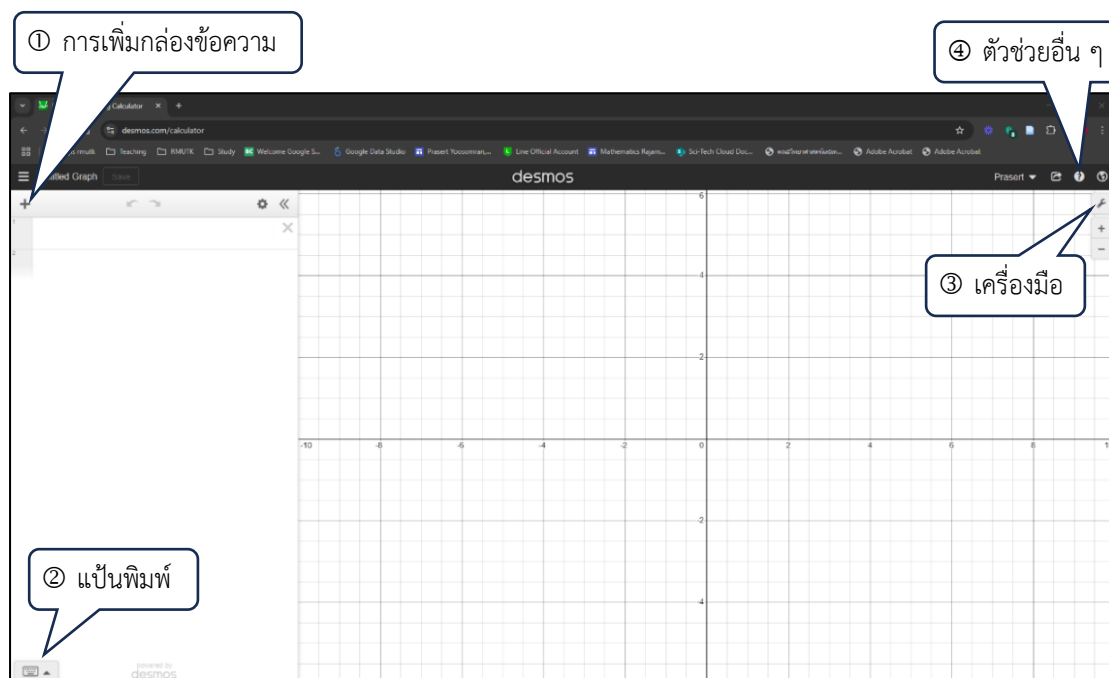
รูป ก.1 แสดงหน้าเว็บไซต์ www.desmos.com

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

1. เปิดเว็บเบราว์เซอร์ ในส่วนของช่อง url ให้พิมพ์เว็บไซต์ www.desmos.com
2. กดปุ่มการลงทะเบียน (Sign Up) เพื่อใช้งานผ่านอีเมล (แนะนำ Gmail) ในส่วนนี้หากทำการลงทะเบียนใช้งานแล้ว ผู้เรียนสามารถที่จะบันทึกข้อมูลในการสร้างกราฟเก็บเอาไว้ และสามารถเรียกกราฟที่สร้างมาใช้งานภายหลังได้
3. ในส่วนการใช้งาน กราฟ 2 มิติ สามารถเข้าใช้ผ่านทางหัวข้อ Math Tools หลังจากนั้นเลือกหัวข้อ Graphing Calculator หรือสามารถเข้าใช้งานผ่านการกดที่ไอคอน Graphing ได้เช่นเดียวกัน

2. ส่วนประกอบของหน้าจอ

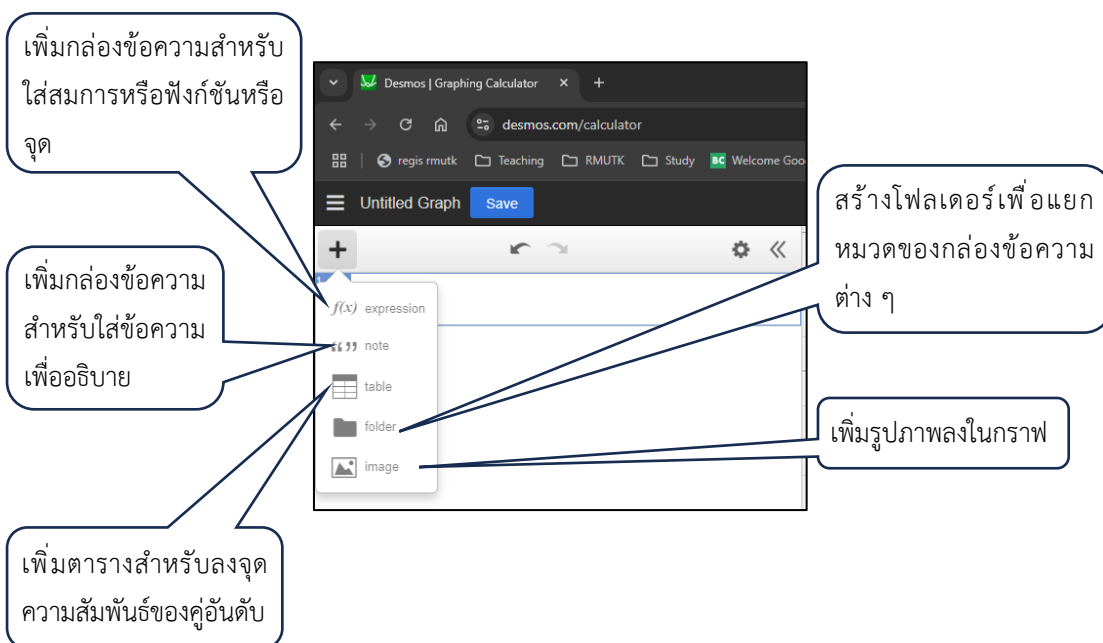
เมื่อเข้ามาในส่วนหน้าจอกการใช้งาน Graphing Calculator จะแสดงได้ดังรูป ก.2



รูป ก.2 แสดงหน้าเว็บไซต์การใช้งาน Graphing Calculator

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

1. การเพิ่มกล่องข้อความเพื่อใส่ข้อมูล เมื่อกดที่ปุ่ม + จะได้ดังรูป ก.3



รูป ก.3 แสดงการเพิ่มกล่องข้อความเพื่อใส่ข้อมูลใน Graphing Calculator

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

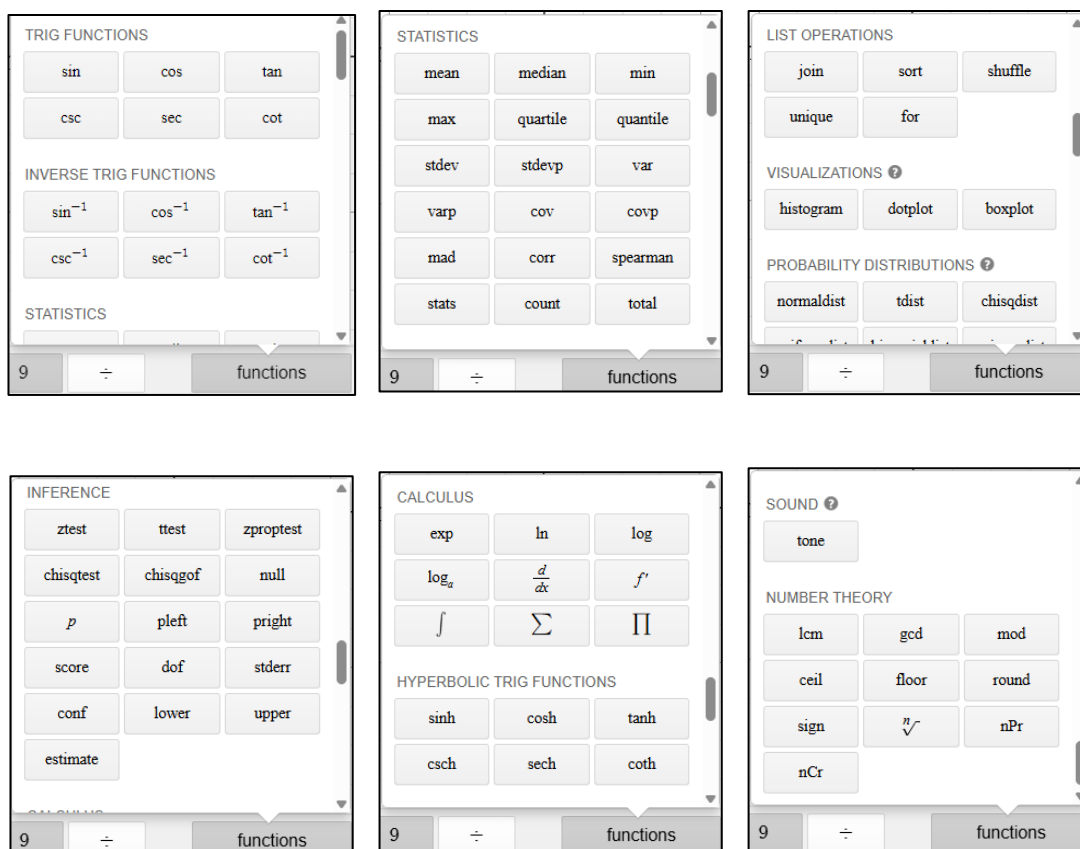
2. แป้นพิมพ์ เมื่อกดปุ่มแป้นพิมพ์จะได้ดังรูป ก.4



รูป ก.4 แสดงแป้นพิมพ์ข้อมูลใน Graphing Calculator

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

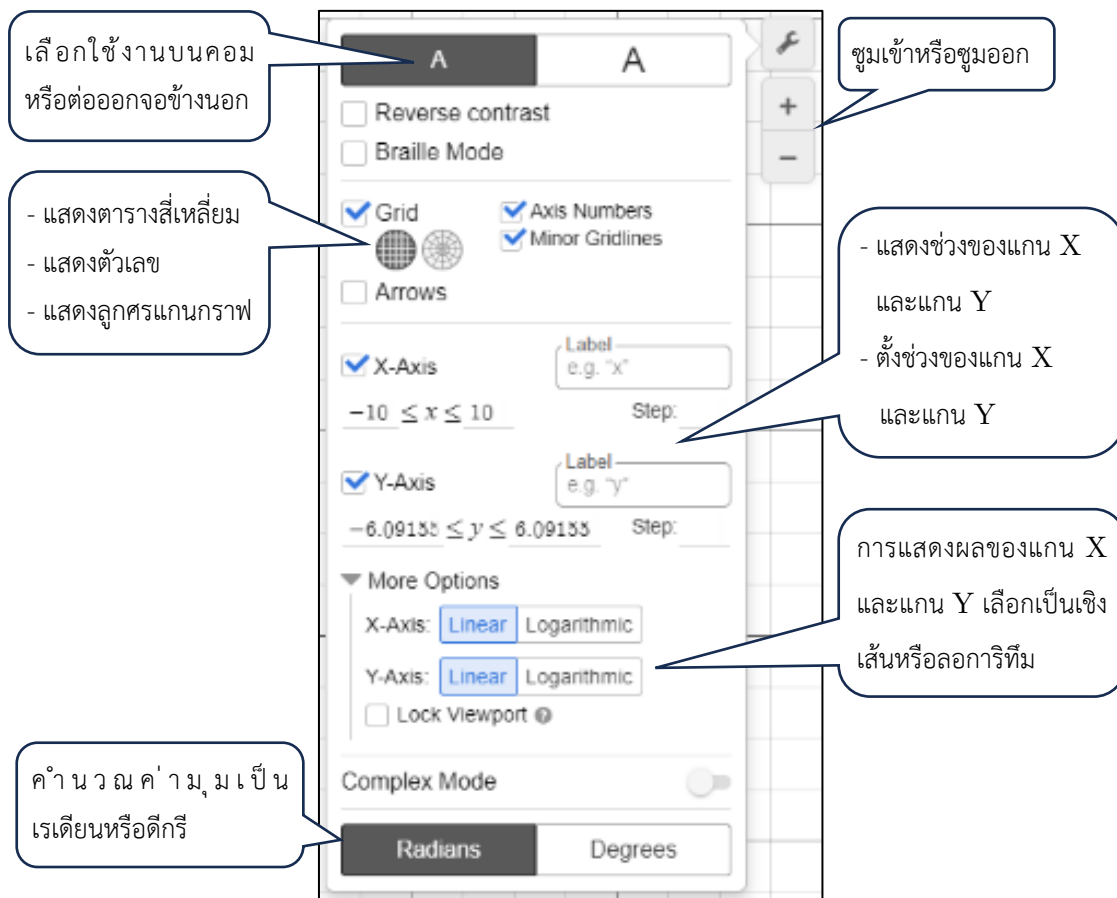
- สามารถใช้แป้นพิมพ์ในเว็บไซต์ หรือแป้นพิมพ์ปกติจากคอมพิวเตอร์ เพื่อพิมพ์ข้อความหรือสมการ หรือฟังก์ชันต่าง ๆ ได้
- ในหมวด function จะมีฟังก์ชันต่าง ๆ สามารถเลือกใช้งานได้ตามความต้องการ แสดงดังรูป ก.5



รูป ก.5 แสดงฟังก์ชันต่าง ๆ ใน Graphing Calculator

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

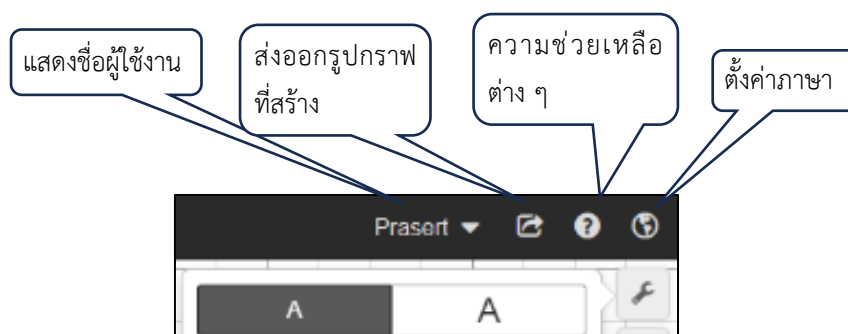
3. ปุ่มเครื่องมือ เมื่อกดปุ่มจะได้ดังรูป ก.6



รูป ก.6 แสดงเครื่องมือต่าง ๆ ใน Graphing Calculator

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

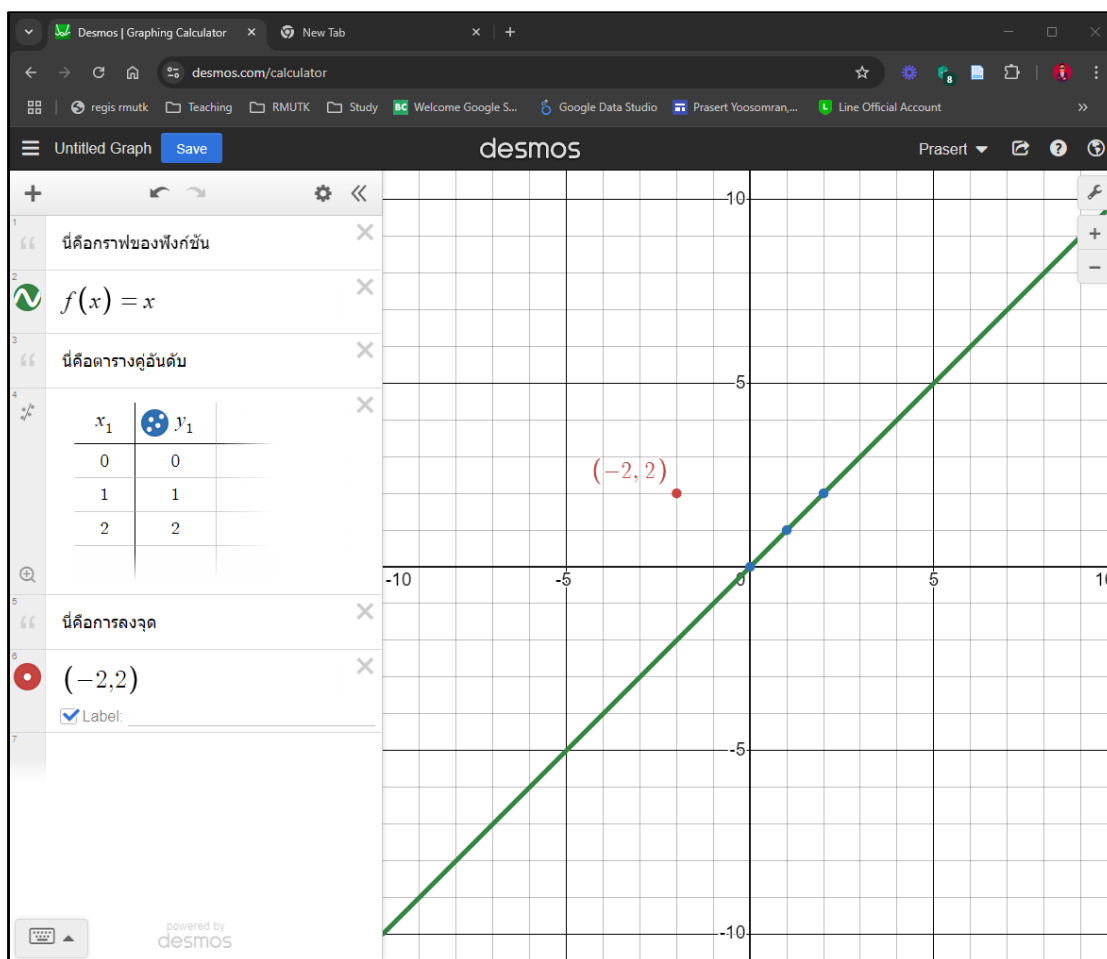
4. ปุ่มช่วยเหลือต่าง ๆ แสดงได้ดังรูป ก.7



รูป ก.7 แสดงปุ่มช่วยเหลือต่าง ๆ ใน Graphing Calculator

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

3. การวาดกราฟฟังก์ชันและการลงจุด



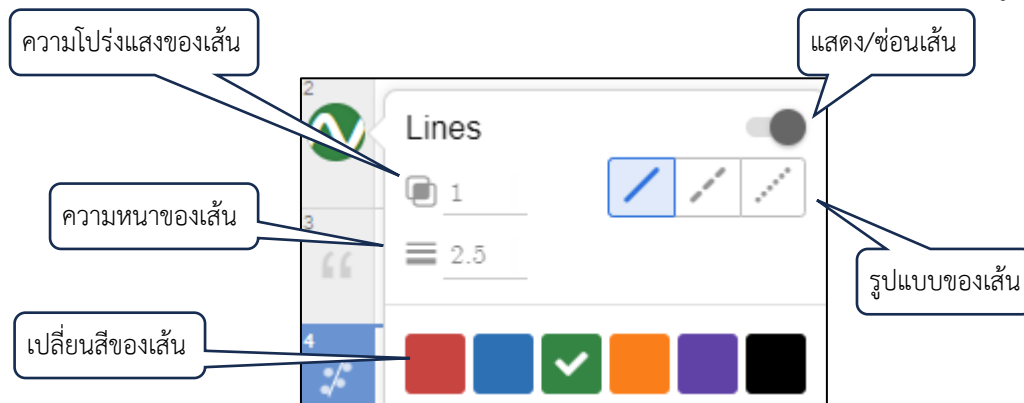
รูป ก.8 แสดงการวาดกราฟฟังก์ชันและการลงจุดใน Graphing Calculator

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

- เมื่อทำการใส่สมการหรือฟังก์ชันลงไป กราฟจะแสดงผลตามที่เรใส่ สามารถปรับเปลี่ยนรูปแบบการแสดงผลกราฟ โดยกด  ค้างเอาไว้
- ตารางคู่อันดับ เป็นการสร้างจุดคู่อันดับลงไป สามารถเปลี่ยน y_1 เป็น $f(x_1)$ เพื่อสร้างจุดให้สอดคล้องกับฟังก์ชันได้
- การลงจุดใด ๆ เช่นจุด $(-2, 2)$ สามารถที่จะใส่ข้อความลงไปตรงจุดนั้น ๆ หรือจะกำหนดรูปแบบของจุดนั้น ๆ เพิ่มเติมได้ โดยกด  ค้างเอาไว้

4. การตั้งค่าการแสดงผลของกราฟและจุด

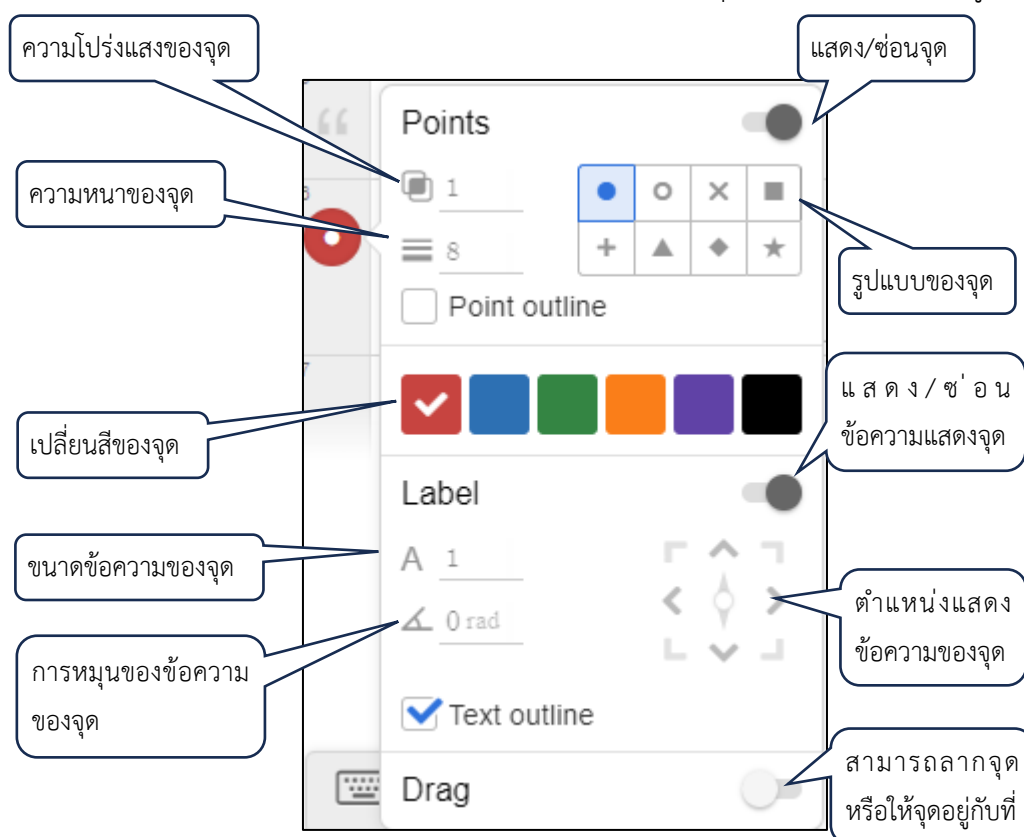
1. เมื่อกด  ค้างเอาไว้ จะเป็นการตั้งค่าการแสดงผลของกราฟในลักษณะต่าง ๆ ดังรูป ก.9



รูป ก.9 แสดงการตั้งค่าแสดงผลของกราฟใน Graphing Calculator

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

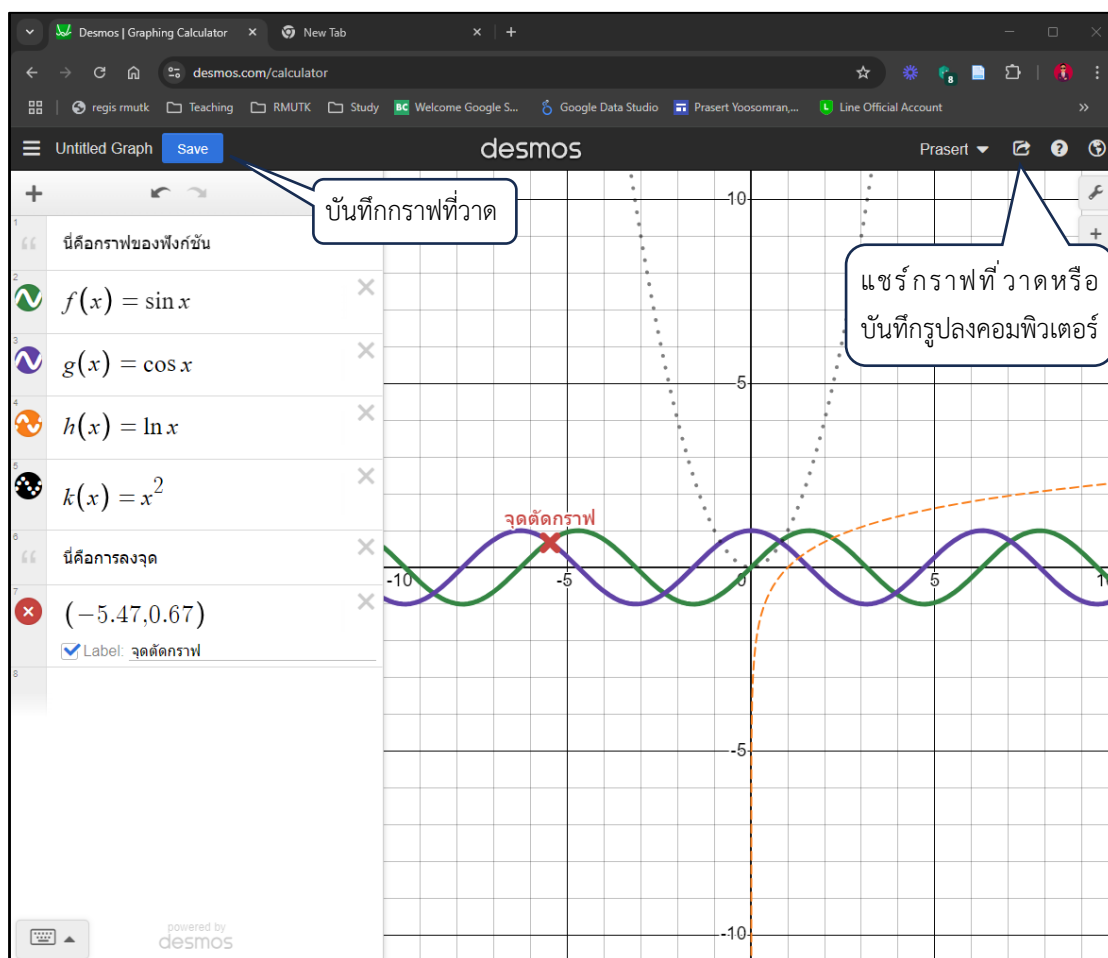
2. เมื่อกด  ค้างเอาไว้ จะเป็นการตั้งค่าการแสดงผลของจุดในลักษณะต่าง ๆ ดังรูป ก.10



รูป ก.10 แสดงการตั้งค่าแสดงผลของจุด Graphing Calculator

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

เมื่อทำการตั้งค่าเรียบร้อยแล้ว จะได้กราฟดังรูป ก.11



รูป ก.11 แสดงการตั้งค่าของกราฟและจุดใน Graphing Calculator

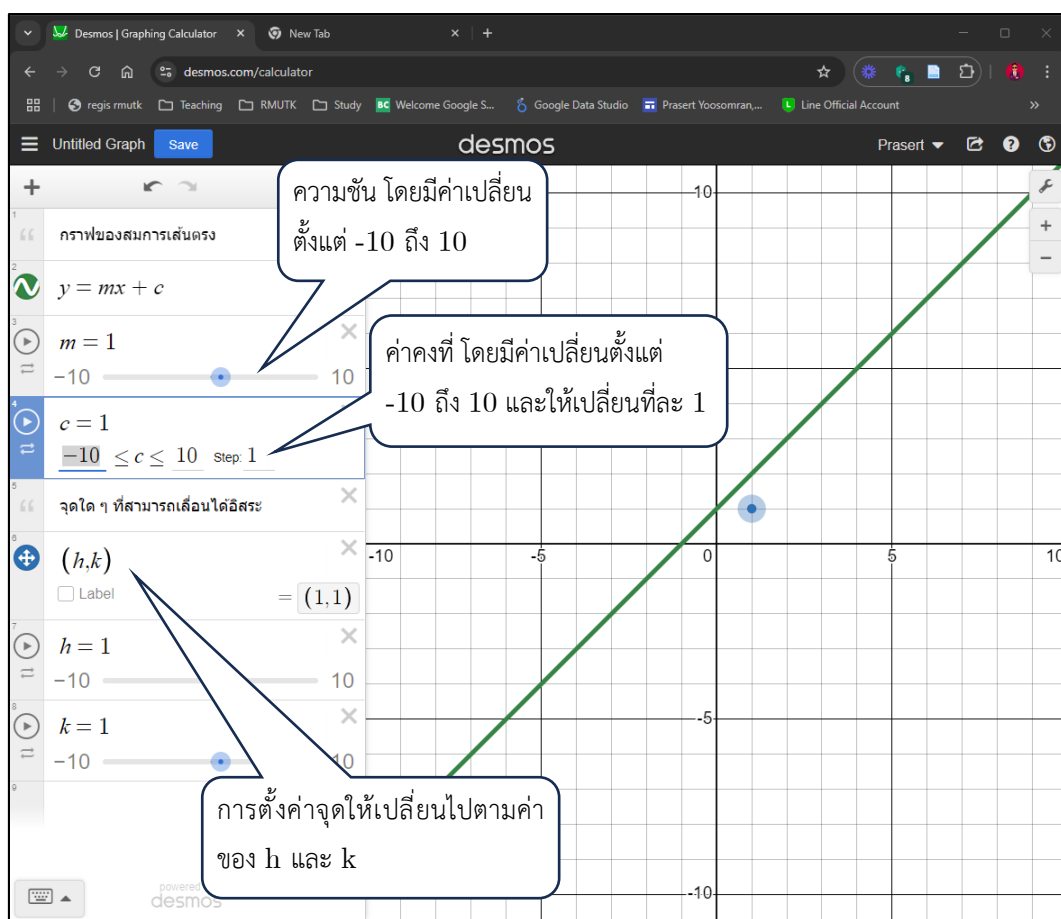
ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จากรูป ก.11 ผู้เรียนสามารถบันทึกกราฟที่วาดหรือตั้งชื่อกราฟได้ที่มุมด้านซ้ายบน นอกจากนี้ผู้เรียนสามารถแชร์กราฟที่วาดเรียบร้อยแล้วโดยกดที่ปุ่ม  เพื่อแชร์ลิงค์ของกราฟผ่านทางเว็บไซต์ ซึ่งผู้ที่เปิดกราฟผ่านลิงค์ทางสามารถที่จะปรับเปลี่ยนรายละเอียดของกราฟได้ โดยไม่กระทบกับกราฟต้นฉบับของผู้ที่สร้างกราฟ หรือสามารถพิมพ์ออกมา หรือบันทึกเป็นรูปภาพลงคอมพิวเตอร์ได้

5. การวาดกราฟเคลื่อนไหวที่อิงกับตัวแปร

ในการวาดกราฟที่เคลื่อนไหวโดยกำหนดตัวแปรที่สามารถเปลี่ยนได้ จะทำให้ได้กราฟออกมาในรูปแบบที่แตกต่างกัน เช่น การวาดกราฟของเส้นตรง ที่มีสมการคือ $y = mx + c$ โดยที่ m คือ ความชันของเส้นตรง และ c คือค่าคงตัว เมื่อต้องการให้กราฟเคลื่อนไหว ให้กดปุ่ม  เพื่อให้กราฟเคลื่อนไหว

ในทำนองเดียวกัน นอกจากจะสร้างกราฟเคลื่อนไหวได้แล้ว ผู้เรียนสามารถสร้างจุดที่เคลื่อนไหวได้อย่างอิสระไปตามตัวแปร เช่น การสร้างจุด (h, k) โดยสามารถเลื่อนไปตามค่าของตัวแปร h และ k ได้ ซึ่งแสดงการวาดกราฟและจุดที่เคลื่อนไหวดังรูป ก.12



รูป ก.12 แสดงการวาดกราฟและจุดที่เคลื่อนไหวได้ใน Graphing Calculator

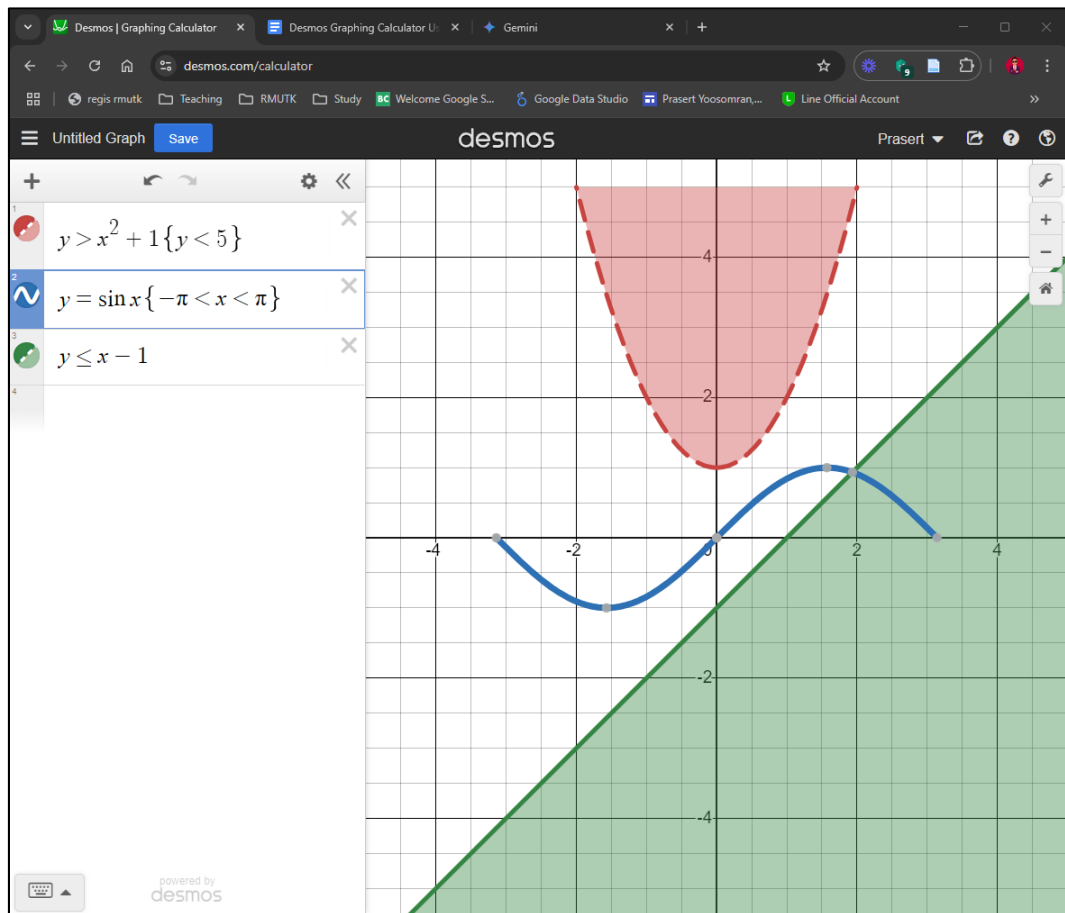
ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

นอกจากนี้ ผู้เรียนยังสามารถปรับเปลี่ยนการเคลื่อนไหวของกราฟให้มีการวนซ้ำหรือปรับความเร็วของการเคลื่อนไหวได้จากปุ่ม 

6. การกำหนดขอบเขตของกราฟและการแรเงา

ในการกำหนดขอบเขตของกราฟ สามารถกำหนดขอบเขตของ x หรือขอบเขตของ y ได้โดยใส่สมการในเครื่องหมาย $\{ \}$

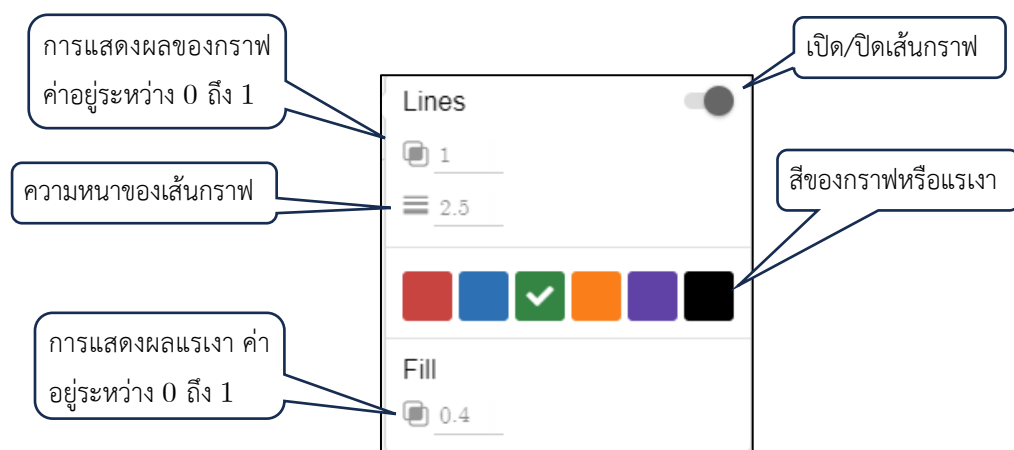
ในส่วนของการแรเงา เมื่อกำหนดสมการ โดยใช้เครื่องหมายน้อยกว่า ($<$) เครื่องหมายมากกว่า ($>$) เครื่องหมายน้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\leq$) และเครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับ ($\geq$) แสดงการกำหนดขอบเขตและการแรเงาได้ดังรูป ก.13



รูป ก.13 แสดงการกำหนดขอบเขตและการแรเงาใน Graphing Calculator

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ในส่วนที่แรเงา สามารถปรับสีและระดับความเข้มของการแรเงาได้ โดยการกดปุ่ม  ค้างไว้ แสดงได้ดังรูป ก.14



รูป ก.14 แสดงการปรับสีและระดับความเข้มของการแรเงาใน Graphing Calculator

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ภาคผนวก ข
พื้นฐานที่ใช้ในการศึกษาแคลคูลัส

สมบัติของพหุนามยกกำลัง

สำหรับจำนวนจริง m และ n

$$1. \quad x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$2. \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

$$3. \quad (x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$$

$$4. \quad \left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$$

$$5. \quad (x^m)^n = x^{mn}$$

$$6. \quad x^0 = 1 \quad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

$$7. \quad x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

หมายเหตุ $x^1 = x$ และ $x^{-1} = \frac{1}{x}$

สูตรการแยกตัวประกอบพหุนาม

$$1. \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$2. \quad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$3. \quad x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$4. \quad x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$5. \quad x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$6. \quad (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

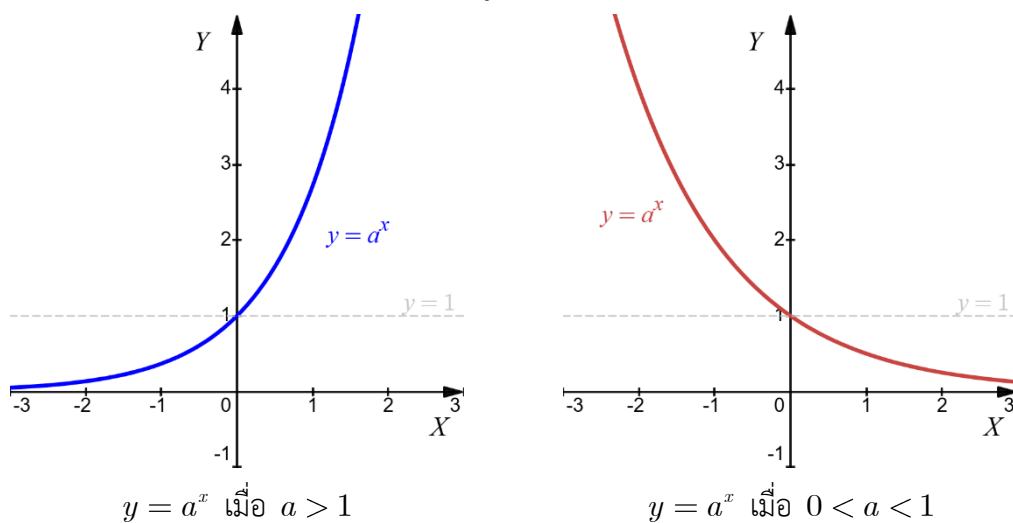
$$7. \quad (x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential function)

ฟังก์ชันเลขชี้กำลังฐาน a (exponential function with base a) เขียนอยู่ในรูป $y = a^x$ โดยที่ a เป็นค่าคงที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ เมื่อ x เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรตาม โดยที่โดเมนของฟังก์ชันคือ $(-\infty, \infty)$ และเรนจ์ของฟังก์ชันคือ $(0, \infty)$

ให้ e เป็นค่าคงที่เฉพาะ โดยที่ $e \approx 2.71828\dots$ ดังนั้นฟังก์ชันเลขชี้กำลังฐาน e (exponential function with base e) เขียนอยู่ในรูป $y = e^x$

กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลังแสดงได้ดังรูป ข.1



รูป ข.1 กราฟแสดงฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

สมบัติของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ให้ $a > 0$ และ $b > 0$ สมบัติต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับจำนวนจริง x และ y

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
5. $(a^x)^y = a^{xy}$

หมายเหตุ $a^1 = a$ และ $a^{-1} = \frac{1}{a}$

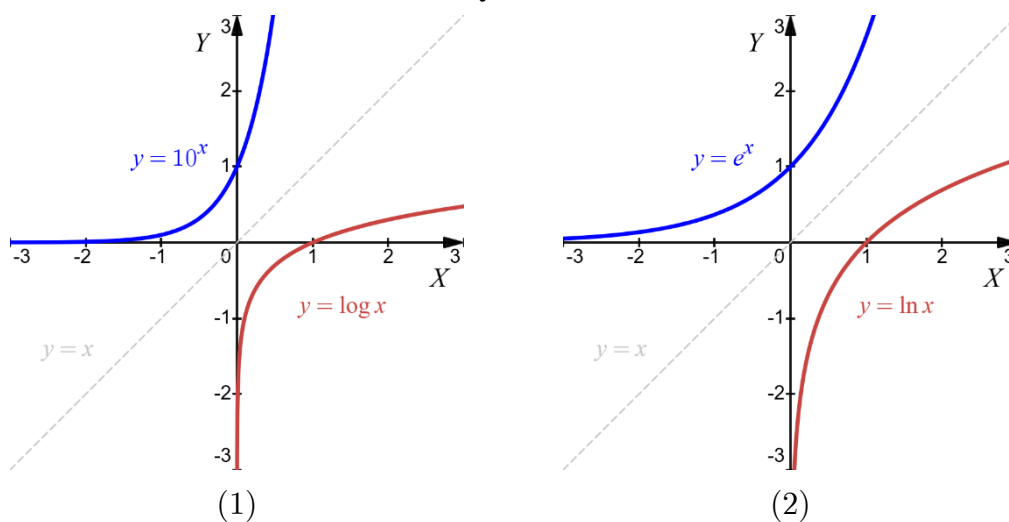
ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm function)

ฟังก์ชันลอการิทึมฐาน a (logarithm function with base a) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $y = \log_a x$ คือฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y = a^x$ โดยที่ a เป็นค่าคงที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$

พิจารณาฐานของฟังก์ชันลอการิทึม

- ถ้า $a = 10$ แล้ว $\log_{10} x$ เขียนแทนด้วย $\log x$ เรียกว่า ลอการิทึมฐานสามัญ (common logarithm)
- ถ้า $a = e$ แล้ว $\log_e x$ เขียนแทนด้วย $\ln x$ เรียกว่า ลอการิทึมฐานธรรมชาติ (natural logarithm)

กราฟของฟังก์ชันลอการิทึมแสดงได้ดังรูป ข.2



รูป ข.2 กราฟแสดงฟังก์ชันลอการิทึมเทียบกับฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

หมายเหตุ จาก $y = \log_a x$ จะได้ว่า $x = a^y$ ในทำนองเดียวกัน จาก $y = \ln x$ จะได้ $x = e^y$

สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม

ให้ u, v เป็นจำนวนจริงบวก, n เป็นจำนวนจริงใด ๆ, a เป็นจำนวนจริงบวก และ $a \neq 1$

$$1. \quad \log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$$

$$2. \quad \log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$$

$$3. \quad \log_a(u^n) = n \log_a u$$

$$4. \quad \log_a a = 1$$

$$5. \quad \log_a 1 = 0$$

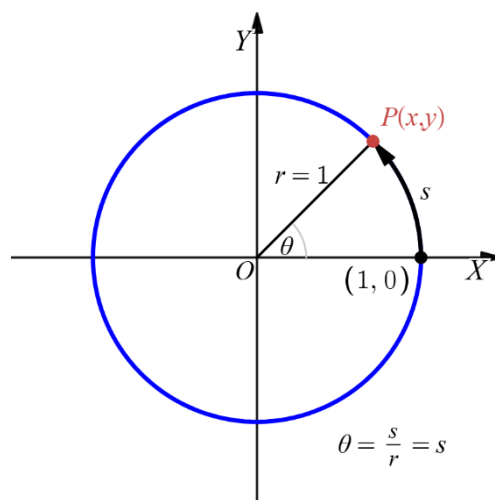
$$6. \quad \log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

หมายเหตุ 1. $a^{\log_a x} = x$ และ $\log_a a^x = x$ เมื่อ $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$

2. $e^{\ln x} = x$ และ $\ln e^x = x$ เมื่อ $x > 0$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric function)

กำหนดให้สมการวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ และ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวง นิยามการวัดมุมเป็นเรเดียน (radian measure) แทนด้วยสัญลักษณ์ θ คืออัตราส่วนระหว่างเส้นรอบวง s กับรัศมี r โดยวัดจากจุด $(1, 0)$ ไปยังจุด $P(x, y)$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังรูป ข.3



รูป ข.3 กราฟแสดงการวัดมุมเป็นเรเดียนในวงกลม 1 หน่วย

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

เนื่องจากความยาวเส้นรอบวงกลม 1 หน่วย คือ 2π และมุมภายในของวงกลมคือ 360° ดังนั้น π เรเดียน (radian) $= 180^\circ$ โดยที่

$$1 \text{ เรเดียน} = \frac{180}{\pi} \text{ (ประมาณ } 57.3^\circ \text{)}$$

$$\text{หรือ } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน (ประมาณ 0.017)}$$

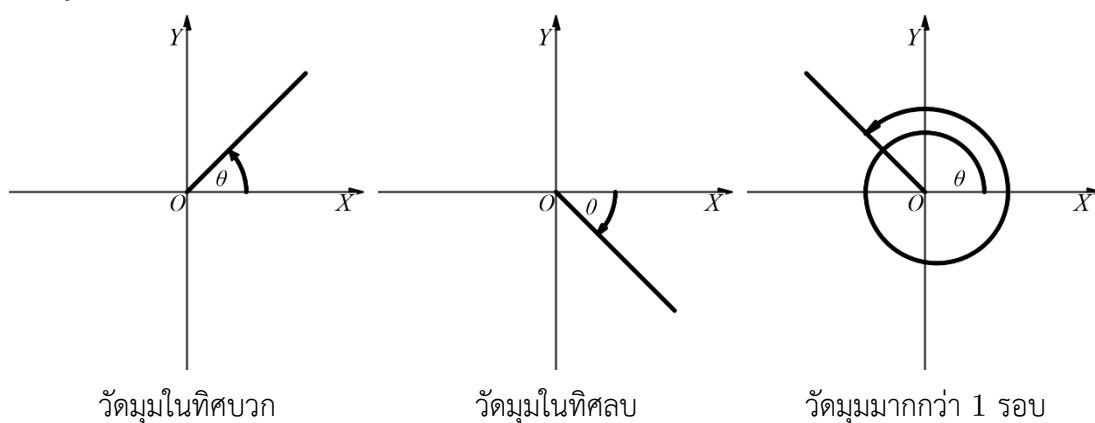
ความสัมพันธ์ระหว่างมุมในรูปองศาและเรเดียนแสดงได้ดังตาราง ข.1

ตาราง ข.1 แสดงความสัมพันธ์ของมุมในรูปองศาและเรเดียน

องศา	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
เรเดียน	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ในการวัดมุมเป็นเรเดียนนั้น จะทำการวัดมุมในทิศทวนเข็มนาฬิกา (มุมในทิศบวก) การวัดมุมทิศตามเข็มนาฬิกา (มุมในทิศลบ) และการวัดมุมในกรณีที่วัดเกิน 1 รอบ (วัดมุมมากกว่า 2π) แสดงได้ดังรูป ข.4

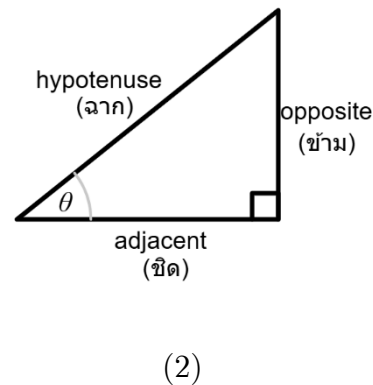
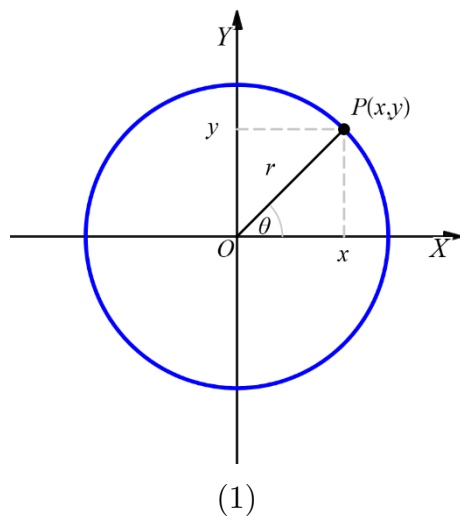


รูป ข.4 กราฟแสดงการวัดมุมเป็นเรเดียนในทิศต่าง ๆ

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

จะเห็นว่า ถึงแม้จะวัดมุมมากกว่า 2π แต่เวลาที่พิจารณามุม จะพิจารณาเฉพาะมุมที่อยู่ในช่วง 0 ถึง 2π เป็นหลัก

พิจารณาวงกลมรัศมี r หน่วยดังรูป ข.5



รูป ข.5 กราฟแสดงความสัมพันธ์สามเหลี่ยมมุมฉากกับวงกลม

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

นิยามตรีโกณมิติ (trigonometric) จากอัตราส่วนของสามเหลี่ยมมุมฉากที่วัดมุม θ ในทิศทางบวกดังนี้

ไซน์ (sine): $\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{y}{r}$

โคเซแคนต์ (cosecant): $\text{cosec } \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{r}{y}$

โคไซน์ (cosine): $\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{x}{r}$

เซแคนต์ (secant): $\sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{r}{x}$

แทนเจนต์ (tangent): $\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{y}{x}$

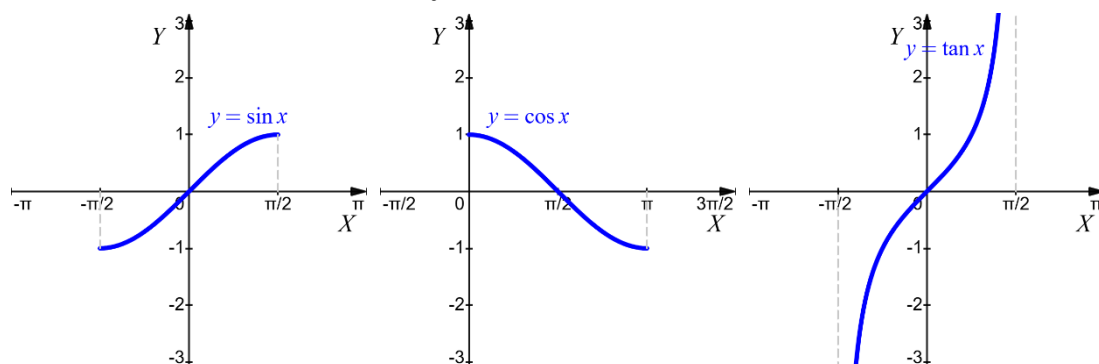
โคแทนเจนต์ (cotangent): $\cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{x}{y}$

กรณี $r = 1$ จะได้วงกลม 1 หน่วย ดังนั้น

$$\sin \theta = y, \quad \text{cosec } \theta = \frac{1}{y}, \quad \cos \theta = x \quad \text{และ} \quad \sec \theta = \frac{1}{x}$$

หมายเหตุ $\text{cosec } \theta$ ในบางหนังสือจะใช้ตัวย่อคือ $\csc \theta$

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติแสดงได้ดังรูป ข.6



$$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

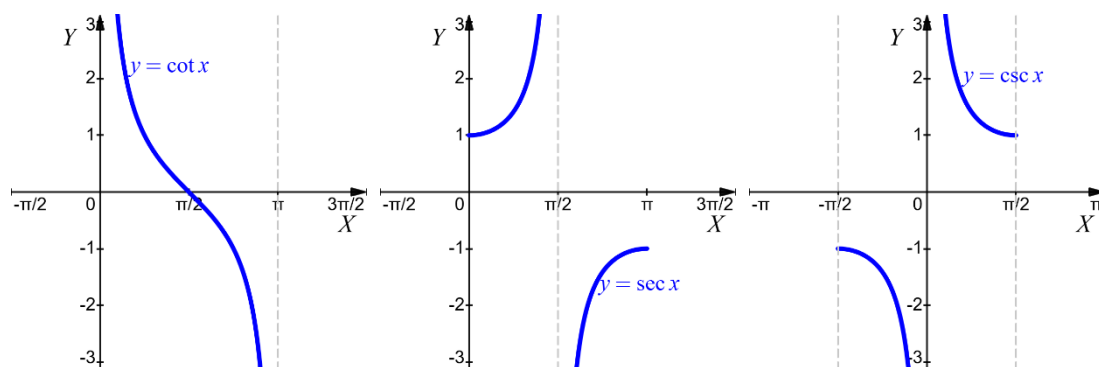
$$R = [-1, 1]$$

$$D = [0, \pi]$$

$$R = [-1, 1]$$

$$D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$R = (-\infty, \infty)$$



$$D = (0, \pi)$$

$$R = (-\infty, \infty)$$

$$D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$R = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$D = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$R = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

รูป ข.6 กราฟแสดงฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การหาค่าตรีโกณมิติ จะพิจารณาพิกัด (x, y) จากวงกลม 1 หน่วย โดยที่ $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$ ค่าของตรีโกณมิติแสดงได้ดังตาราง ข.2

ตาราง ข.2 แสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในมุมต่าง ๆ

θ ฟังก์ชัน	0 (0°)	$\pi/6$ (30°)	$\pi/4$ (45°)	$\pi/3$ (60°)	$\pi/2$ (90°)	π (180°)	$3\pi/2$ (270°)	2π (360°)
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\cot \theta$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0	—
$\sec \theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	—	-1	—	1
$\operatorname{cosec} \theta$	—	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	—	-1	—

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

สูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติเบื้องต้นที่ควรรู้

$$1. \quad \sin \theta \operatorname{cosec} \theta = 1$$

$$\text{ดังนั้น } \sin \theta = \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} \text{ หรือ } \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$2. \quad \cos x \sec x = 1$$

$$\text{ดังนั้น } \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} \text{ หรือ } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$3. \quad \tan x \cot x = 1$$

$$\text{ดังนั้น } \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \text{ หรือ } \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$4. \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$5. \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$6. \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{ดังนั้น } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \text{ หรือ } \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$7. \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$\text{ดังนั้น } \sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \text{ หรือ } \tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1}$$

$$8. \quad 1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\text{ดังนั้น } \operatorname{cosec} \theta = \sqrt{1 + \cot^2 \theta} \text{ หรือ } \cot \theta = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1}$$

$$9. \quad \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$10. \quad \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$12. \quad \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$13. \quad \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$14. \quad \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$15. \quad \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$16. \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$17. \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$18. \quad \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$19. \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$20. \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$21. \quad \sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$$

$$22. \quad \sin A \sin B = -\frac{1}{2}[\cos(A + B) - \cos(A - B)]$$

$$23. \quad \cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

24.	$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$	$\operatorname{cosec}(\pi - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$
	$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$	$\operatorname{cosec}(\pi + \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$
	$\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$	$\operatorname{cosec}(2\pi - \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$
	$\sin(2\pi + \theta) = \sin \theta$	$\operatorname{cosec}(2\pi + \theta) = \operatorname{cosec} \theta$
25.	$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$	$\sec(\pi - \theta) = -\sec \theta$
	$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$	$\sec(\pi + \theta) = -\sec \theta$
	$\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$	$\sec(2\pi - \theta) = \sec \theta$
	$\cos(2\pi + \theta) = \cos \theta$	$\sec(2\pi + \theta) = \sec \theta$
26.	$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$	$\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$
	$\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$	$\cot(\pi + \theta) = \cot \theta$
	$\tan(2\pi - \theta) = -\tan \theta$	$\cot(2\pi - \theta) = -\cot \theta$
	$\tan(2\pi + \theta) = \tan \theta$	$\cot(2\pi + \theta) = \cot \theta$
27.	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta$
	$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\sec(-\theta) = \sec \theta$
	$\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\cot(-\theta) = -\cot \theta$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Inverse trigonometric function)

ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน คือฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งมีทั้งหมด 6 ฟังก์ชัน ได้แก่

ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ (inverse sine function) $y = \sin x$ เขียนแทนด้วย

$$y = \sin^{-1} x \text{ หรือ } y = \arcsin x$$

เมื่อ $D = [-1, 1]$, $R = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์ (inverse cosine function) $y = \cos x$ เขียนแทนด้วย

$$y = \cos^{-1} x \text{ หรือ } y = \arccos x$$

เมื่อ $D = [-1, 1]$, $R = [0, \pi]$

ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์ (inverse tangent function) $y = \tan x$ เขียนแทนด้วย

$$y = \tan^{-1} x \text{ หรือ } y = \arctan x$$

เมื่อ $D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (inverse cotangent function) $y = \cot x$ เขียนแทนด้วย

$$y = \cot^{-1} x \text{ หรือ } y = \operatorname{arccot} x$$

เมื่อ $D = (-\infty, \infty)$, $R = (0, \pi)$

ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเซแคนต์ (inverse secant function) $y = \sec x$ เขียนแทนด้วย

$$y = \sec^{-1} x \text{ หรือ } y = \operatorname{arcsec} x$$

เมื่อ $D = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, $R = [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$

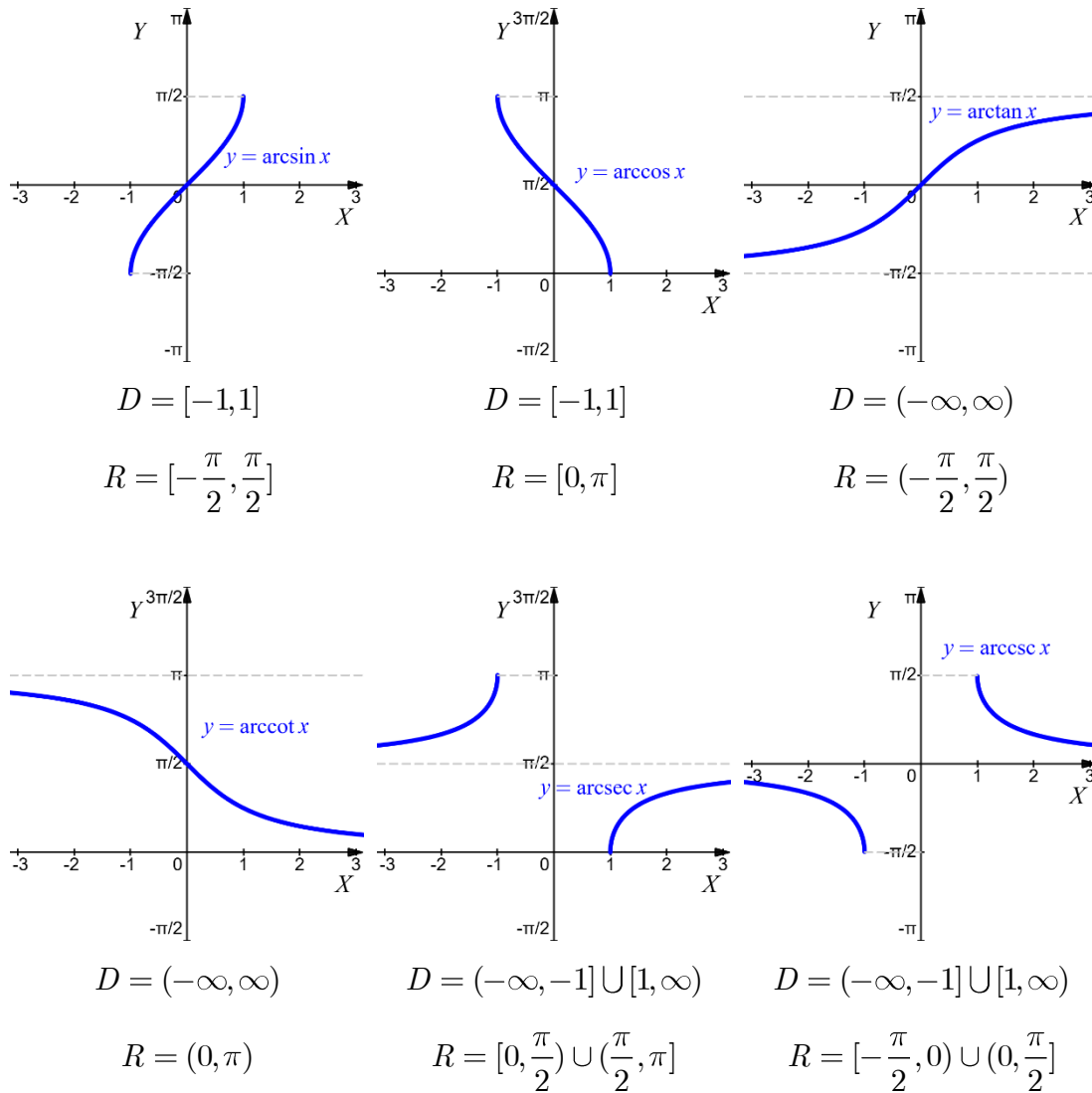
ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคเซแคนต์ (inverse cosecant function) $y = \operatorname{cosec} x$ เขียนแทนด้วย

$$y = \operatorname{cosec}^{-1} x \text{ หรือ } y = \operatorname{arccosec} x$$

เมื่อ $D = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, $R = [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

หมายเหตุ $\operatorname{arccosec} \theta$ ในบางหนังสือจะใช้ตัวย่อคือ $\operatorname{arccsc} \theta$

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน แสดงได้ดังรูป ข.7



รูป ข.7 กราฟแสดงฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

ที่มา: ประเสริฐ อยู่สำราญ (2565)

ภาคผนวก ค

พิสูจน์สูตร

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a) = c_n (a^n) + c_{n-1} (a^{n-1}) + \dots + c_2 (a^2) + c_1 (a) + c_0$$

$$\begin{aligned} \text{พิสูจน์} \quad \lim_{x \rightarrow a} P(x) &= \lim_{x \rightarrow a} [c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (c_n x^n) + \lim_{x \rightarrow a} (c_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} (c_2 x^2) \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow a} (c_1 x) + \lim_{x \rightarrow a} c_0 \\ &= c_n \left[\lim_{x \rightarrow a} x^n \right] + c_{n-1} \left[\lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} \right] + \dots + c_2 \left[\lim_{x \rightarrow a} x^2 \right] \\ &\quad + c_1 \left[\lim_{x \rightarrow a} x \right] + \lim_{x \rightarrow a} c_0 \\ &= c_n (a^n) + c_{n-1} (a^{n-1}) + \dots + c_2 (a^2) + c_1 (a) + c_0 \\ &= P(a) \end{aligned}$$

■

สูตรการหาอนุพันธ์

$$\text{สูตร} \quad \frac{d}{dx}(c) = 0$$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = c$ ดังนั้น $f(x+h) = c$

$$\begin{aligned} \text{จากนิยาม} \quad \frac{d}{dx} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{d}{dx}(c) = 0$$

■

$$\text{สูตร} \quad \frac{d}{dx}(x) = 1$$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = x$ ดังนั้น $f(x+h) = x+h$

$$\begin{aligned} \text{จากนิยาม } \frac{d}{dx}f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{d}{dx}(x) = 1 \quad \blacksquare$$

$$\text{สูตร} \quad \frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = cu(x)$ ดังนั้น $f(x+h) = cu(x+h)$

$$\begin{aligned} \text{จากนิยาม } \frac{d}{dx}f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} c \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right] \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\ &= c \frac{d}{dx}u(x) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx} \quad \blacksquare$$

$$\text{สูตร} \quad \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = u(x) + v(x)$ ดังนั้น $f(x+h) = u(x+h) + v(x+h)$

$$\begin{aligned}
\text{จากนิยาม } \frac{d}{dx} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) - u(x)] + [v(x+h) - v(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
&= \frac{d}{dx} u(x) + \frac{d}{dx} v(x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ ■

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

$$\begin{aligned}
\text{พิสูจน์ } \frac{d}{dx}(u-v) &= \frac{d}{dx}[u + (-v)] \\
&= \frac{du}{dx} + (-1) \frac{dv}{dx} \\
&= \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}
\end{aligned}$$

■

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = u(x)v(x)$ ดังนั้น $f(x+h) = u(x+h)v(x+h)$

$$\begin{aligned}
\text{จากนิยาม } \frac{d}{dx} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} u(x+h) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0} v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} u(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0} v(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\
&= u(x) \frac{d}{dx} v(x) + v(x) \frac{d}{dx} u(x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ ■

สูตร $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, $v(x) \neq 0$ ดังนั้น $f(x+h) = \frac{u(x+h)}{v(x+h)}$, $v(x+h) \neq 0$

$$\begin{aligned}
\text{จากนิยาม } \frac{d}{dx} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{เพิ่ม } -v(x)u(x) + v(x)u(x) \end{array} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)[u(x+h) - u(x)] - u(x)[v(x+h) - v(x)]}{hv(x+h)v(x)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} f(x) \\
&= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} v(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} v(x+h)v(x)} \\
&= \frac{v(x) \frac{d}{dx} u(x) - u(x) \frac{d}{dx} v(x)}{v(x) \cdot v(x)} \\
\text{ดังนั้น} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) &= \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

สูตร $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = x^n$ ดังนั้น $f(x+h) = (x+h)^n$

กรณี $n > 0$ เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\begin{aligned}
\text{จากนิยาม} \quad \frac{d}{dx} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \quad \text{จาก } a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x) \left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1} \right]}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h) \left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1} \right]}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1} \right] \\
&= x^{n-1} + x^{n-2}x + \dots + x \cdot x^{n-2} + x^{n-1} \\
&= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1}}_{n \text{ term}} \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

กรณี $n < 0$ เป็นจำนวนเต็มลบ

ให้ $n = -k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $f(x) = x^n = x^{-k} = \frac{1}{x^k}$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^k} \right) \\
 &= \frac{x^k \frac{d}{dx} (1) - (1) \frac{d}{dx} (x^k)}{(x^k)^2} \\
 &= \frac{x^k (0) - kx^{k-1}}{x^{2k}} \\
 &= -\frac{kx^{k-1}}{x^{2k}} \\
 &= -kx^{k-1-2k} \\
 &= -kx^{-k-1} \\
 &= nx^{n-1}
 \end{aligned}$$

กรณี n เป็นจำนวนตรรกยะ

ให้ $n = \frac{h}{k}$ เมื่อ h และ k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $f(x) = x^n = x^{h/k}$

หาลอการิทึมฐาน e จะได้ $\ln f(x) = \ln x^{h/k} = \frac{h}{k} \ln x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (\ln f(x)) &= \frac{h}{k} \frac{d}{dx} (\ln x) \\
 \frac{1}{f(x)} \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{h}{k} \cdot \frac{1}{x} \\
 \frac{d}{dx} f(x) &= f(x) \cdot \frac{h}{k} \cdot \frac{1}{x} \\
 &= x^{h/k} \cdot \frac{h}{k} \cdot \frac{1}{x} \\
 &= \frac{h}{k} x^{\frac{h}{k}-1} \quad \text{แทน } n = \frac{h}{k} \\
 &= nx^{n-1}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$



$$\text{สูตร} \quad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = \log_a x$ ดังนั้น $f(x+h) = \log_a(x+h)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\log_a x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(\frac{x+h}{x} \right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{1/h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h} \cdot \frac{x}{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \log_a e \end{aligned}$$

จาก $\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} = e$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e$ ■

$$\text{สูตร} \quad \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

พิสูจน์ ให้ $a = e$ ดังนั้น $\log_e x = \ln x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\ln x) &= \frac{d}{dx}(\log_e x) \\ &= \frac{1}{x} \log_e e \\ &= \frac{1}{x} (1) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

■

$$\text{สูตร} \quad \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

พิสูจน์ ให้ $y = a^x$ หาลอการิทึมฐาน e จะได้ $\ln y = \ln a^x = x \ln a$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \ln a$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln a$$

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

■

$$\text{สูตร} \quad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

พิสูจน์ ให้ $a = e$ ดังนั้น $a^x = e^x$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \ln e$$

$$= e^x$$

■

$$\text{สูตร} \quad \frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $y = u^v$ หาลอการิทึมฐาน e จะได้ $\ln y = \ln u^v = v \ln u$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(v \ln u)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = v \frac{d}{dx}(\ln u) + \ln u \frac{dv}{dx}$$

$$= v \cdot \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = y \left[v \cdot \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx} \right]$

แทน $y = u^v$

$$= u^v v \cdot \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$$

$$= v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$$

นั่นคือ $\frac{d}{dx}(u^v) = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$ ■

สูตร $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = \sin x$ ดังนั้น $f(x+h) = \sin(x+h)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sin x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x \cos h - \sin x}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x(0) + \cos x(1) \\ &= \cos x \end{aligned}$$

■

สูตร $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = \cos x$ ดังนั้น $f(x+h) = \cos(x+h)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\cos x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\cos x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x \cos h - \cos x}{h} - \frac{\sin x \sin h}{h} \right] \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \right] \\
&\left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \cos x(0) - \sin x(1) \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

สูตร $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

พิสูจน์ $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \sec^2 x
\end{aligned}$$

สูตร $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

พิสูจน์ $\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin x \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x} \\
&= \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x \cos x}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(\cot x) &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\
 &= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \\
 &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\
 &= -\operatorname{cosec}^2 x
 \end{aligned}$$

■

สูตร $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

พิสูจน์ $\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(1) - (1) \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{\cos x(0) - (-\sin x)}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{0 + \sin x}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\
 &= \sec x \tan x
 \end{aligned}$$

■

สูตร $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

พิสูจน์ $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin x \frac{d}{dx}(1) - (1) \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x} \\
 &= \frac{\sin x(0) - (1) \cos x}{\sin^2 x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) &= \frac{0 - \cos x}{\sin^2 x} \\
 &= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \\
 &= -\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \\
 &= -\operatorname{cosec} x \cot x
 \end{aligned}$$

■

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

พิสูจน์ ให้ $y = \arcsin x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $x = \sin y$ หาอนุพันธ์เทียบ x ทั้งสองข้าง

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\sin y)$$

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

จาก $x = \sin y$ ดังนั้น $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$ จะได้ $\cos y = \pm\sqrt{1-x^2}$

เนื่องจาก $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $0 < \cos y < 1$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

■

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

พิสูจน์ ให้ $y = \arccos x$ เมื่อ $0 < y < \pi$

ดังนั้น $x = \cos y$ หาอนุพันธ์เทียบ x ทั้งสองข้าง

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\cos y)$$

$$1 = -\sin y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$$

จาก $x = \cos y$ ดังนั้น $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2$ จะได้ $\sin y = \pm\sqrt{1-x^2}$

เนื่องจาก $0 < y < \pi$ ดังนั้น $0 < \sin y < 1$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

■

สูตร $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

พิสูจน์ ให้ $y = \arctan x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $x = \tan y$ หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\tan y)$$

$$1 = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

จาก $x = \tan y$ ดังนั้น $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

■

สูตร $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

พิสูจน์ ให้ $y = \operatorname{arccot} x$ เมื่อ $0 < y < \pi$

ดังนั้น $x = \cot y$ หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\cot y)$$

$$1 = -\operatorname{cosec}^2 y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y}$$

จาก $x = \cot y$ ดังนั้น $\operatorname{cosec}^2 y = 1 + \cot^2 y = 1 + x^2$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad \blacksquare$$

สูตร $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$

พิสูจน์ ให้ $y = \operatorname{arcsec} x$ จะได้ว่า $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ เมื่อ $x \geq 1$ หรือ $\frac{\pi}{2} < y \leq \pi$ เมื่อ $x \leq -1$

ดังนั้น $x = \sec y$ หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\sec y)$$

$$1 = \sec y \tan y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

จาก $x = \sec y$ ดังนั้น $\tan^2 y = \sec^2 y - 1 = x^2 - 1$ จะได้ $\tan y = \pm\sqrt{x^2-1}$

ถ้า $x \geq 1$ แล้ว $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $\tan y > 0$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

ถ้า $x \leq -1$ แล้ว $\frac{\pi}{2} < y \leq \pi$ ดังนั้น $\tan y < 0$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1 \quad \blacksquare$$

$$\text{สูตร } \frac{d}{dx}(\operatorname{arccosec} x) = -\frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1$$

พิสูจน์ ให้ $y = \operatorname{arccosec} x$ จะได้ว่า $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ เมื่อ $x \geq 1$ หรือ $-\frac{\pi}{2} < y \leq 0$ เมื่อ

$$x \leq -1$$

ดังนั้น $x = \operatorname{cosec} y$ หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} y)$$

$$1 = -\operatorname{cosec} y \cot y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{cosec} y \cot y}$$

$$\text{จาก } x = \operatorname{cosec} y \text{ ดังนั้น } \cot^2 y = \operatorname{cosec}^2 y - 1 = x^2 - 1$$

$$\text{จะได้ } \cot y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

ถ้า $x \geq 1$ แล้ว $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $\cot y > 0$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

ถ้า $x \leq -1$ แล้ว $-\frac{\pi}{2} < y \leq 0$ ดังนั้น $\cot y < 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x(-\sqrt{x^2 - 1})} \\ &= \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{d}{dx}(\operatorname{arccosec} x) = -\frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1 \quad \blacksquare$$

สูตรการหาปริพันธ์

1. ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (เพิ่มเติม)

$$\text{สูตร} \quad \int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + c$$

พิสูจน์ จาก $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$

ให้ $u = \cos x$, $du = d(\cos x) = -\sin x \, dx$
 $-d(\cos x) = \sin x \, dx$

ดังนั้น $\int \tan x \, dx = \int \frac{1}{\cos x} (\sin x \, dx)$

$$= -\int \frac{1}{\cos x} d(\cos x)$$

สูตร $\int \frac{1}{u} du, u = \cos x$

$$= -\ln |\cos x| + c$$

$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$

$$= -\ln \left| \frac{1}{\sec x} \right| + c$$

$\ln 1 = 0$

$$= -(\ln |1| - \ln |\sec x|) + c$$

$$= -\ln 1 + \ln |\sec x| + c$$

$$= \ln |\sec x| + c$$

$$\text{สูตร} \quad \int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + c$$

พิสูจน์ จาก $\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$

ให้ $u = \sin x$, $du = d(\sin x) = \cos x \, dx$

ดังนั้น $\int \cot x \, dx = \int \frac{1}{\sin x} (\cos x \, dx)$

$$= \int \frac{1}{\sin x} d(\sin x)$$

สูตร $\int \frac{1}{u} du, u = \sin x$

$$= \ln |\sin x| + c$$

$$\text{สูตร} \quad \int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + c$$

$$\begin{aligned} \text{พิสูจน์} \quad \text{จาก} \quad \int \sec x \, dx &= \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } u &= \sec x + \tan x, \quad du = d(\sec x + \tan x) \\ &= (\sec x \tan x + \sec^2 x) \, dx \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int \sec x \, dx = \int \frac{1}{\sec x + \tan x} (\sec^2 x + \sec x \tan x) \, dx$$

$$\begin{aligned} \text{สูตร} \quad \int \frac{1}{u} \, du, u = \sec x + \tan x &= \int \frac{1}{\sec x + \tan x} d(\sec x + \tan x) \\ &= \ln |\sec x + \tan x| + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\text{สูตร} \quad \int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln |\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$$

$$\begin{aligned} \text{พิสูจน์} \quad \text{จาก} \quad \int \operatorname{cosec} x \, dx &= \int \operatorname{cosec} x \cdot \frac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{\operatorname{cosec} x - \cot x} \, dx \\ &= \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x}{\operatorname{cosec} x - \cot x} \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } u &= \operatorname{cosec} x - \cot x, \quad du = d(\operatorname{cosec} x - \cot x) \\ &= (-\operatorname{cosec} x \cot x + \operatorname{cosec}^2 x) \, dx \\ &= (\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x) \, dx \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int \operatorname{cosec} x \, dx = \int \frac{1}{\operatorname{cosec} x - \cot x} (\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x) \, dx$$

$$\begin{aligned} \text{สูตร} \quad \int \frac{1}{u} \, du, u = \operatorname{cosec} x - \cot x &= \int \frac{1}{\operatorname{cosec} x - \cot x} d(\operatorname{cosec} x - \cot x) \\ &= \ln |\operatorname{cosec} x - \cot x| + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2. สูตรลดทอนในการหาปริพันธ์

$$\text{สูตร} \quad \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

พิสูจน์ พิจารณา $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \, dx &= \int \sin^{n-1} x \sin x \, dx \\ \text{ให้ } u &= \sin^{n-1} x & \text{จะได้ } du &= (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx \\ \text{และ } dv &= \sin x \, dx & \text{จะได้ } v &= \int \sin x \, dx \\ & & &= -\cos x \end{aligned}$$

จากสูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int (\sin^{n-2} x - \sin^n x) \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx \\ &\quad - (n-1) \int \sin^n x \, dx \quad \text{-----} \boxed{\text{จัดรูปสมการ}} \\ n \int \sin^n x \, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx \\ \int \sin^n x \, dx &= -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\text{สูตร} \quad \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

พิสูจน์ พิจารณา $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int \cos^n x \, dx &= \int \cos^{n-1} x \cos x \, dx \\ \text{ให้ } u &= \cos^{n-1} x & \text{จะได้ } du &= (n-1) \cos^{n-2} x (-\sin x) \, dx \\ & & &= -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x \, dx \\ \text{และ } dv &= \cos x \, dx & \text{จะได้ } v &= \int \cos x \, dx \\ & & &= \sin x \end{aligned}$$

จากสูตร $\int u dv = uv - \int v du$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \int \cos^n x dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx \\
 &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx \\
 &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int (\cos^{n-2} x - \cos^n x) dx \\
 &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx \\
 &\quad - (n-1) \int \cos^n x dx \quad \text{จัดรูปสมการ} \\
 n \int \cos^n x dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx \\
 \int \cos^n x dx &= \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

$$\text{สูตร} \quad \int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx$$

พิสูจน์ พิจารณา $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \int \tan^n x dx &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx \\
 &= \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \int (\tan^{n-2} x \sec^2 x - \tan^{n-2} x) dx \\
 &= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx \\
 &= \int \tan^{n-2} x d(\tan x) - \int \tan^{n-2} x dx \\
 &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

ให้ $u = \tan x, \quad d(\tan x) = \sec^2 x dx$

สูตร $\int u^n du, u = \tan x$

$$\text{สูตร} \quad \int \cot^n x dx = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx$$

พิสูจน์ พิจารณา $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \int \cot^n x dx &= \int \cot^{n-2} x \cot^2 x dx \\
 &= \int \cot^{n-2} x (\operatorname{cosec}^2 x - 1) dx \\
 &= \int (\cot^{n-2} x \operatorname{cosec}^2 x - \cot^{n-2} x) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } u &= \cot x, \\ d(\cot x) &= -\operatorname{cosec}^2 x \, dx \end{aligned}$$

$$\int \cot^n x \, dx = \int \cot^{n-2} x \operatorname{cosec}^2 x \, dx - \int \cot^{n-2} x \, dx$$

$$= -\int \cot^{n-2} x \, d(\cot x) - \int \cot^{n-2} x \, dx$$

$$\text{สูตร } \int u^n \, du, u = \tan x$$

$$= -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x \, dx$$

■

$$\text{สูตร } \int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan x \cdot \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx$$

พิสูจน์ พิสูจน์ว่า $n > 2$ จะได้ว่า

$$\int \sec^n x \, dx = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x \, dx$$

$$\text{ให้ } u = \sec^{n-2} x \quad \text{จะได้ } du = (n-2) \sec^{n-3} x \sec x \tan x \, dx$$

$$= (n-2) \tan x \sec^{n-2} x \, dx$$

$$\text{และ } dv = \sec^2 x \, dx \quad \text{จะได้ } v = \int \sec^2 x \, dx$$

$$= \tan x$$

จากสูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ ดังนั้น

$$\int \sec^n x \, dx = \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \int \tan^2 x \sec^{n-2} x \, dx$$

$$= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \int (\sec^2 x - 1) \sec^{n-2} x \, dx$$

$$= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \int (\sec^n x - \sec^{n-2} x) \, dx$$

$$= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \int \sec^n x \, dx$$

$$+ (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx$$

จัดรูปสมการ

$$(n-1) \int \sec^n x \, dx = \tan x \sec^{n-2} x + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx$$

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx$$

■

$$\text{สูตร} \quad \int \operatorname{cosec}^n x \, dx = -\frac{1}{n-1} \cot x \cdot \operatorname{cosec}^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2} x \, dx$$

พิสูจน์ พิจารณา $n > 2$ จะได้ว่า

$$\int \operatorname{cosec}^n x \, dx = \int \operatorname{cosec}^{n-2} x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } u = \operatorname{cosec}^{n-2} x \quad \text{จะได้ } du &= (n-2) \operatorname{cosec}^{n-3} x (-\operatorname{cosec} x \cot x) \, dx \\ &= -(n-2) \cot x \operatorname{cosec}^{n-2} x \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } dv = \operatorname{cosec}^2 x \, dx \quad \text{จะได้ } v &= \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx \\ &= -\cot x \end{aligned}$$

จากสูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cosec}^n x \, dx &= -\cot x \operatorname{cosec}^{n-2} x + (n-2) \int \cot^2 x \operatorname{cosec}^{n-2} x \, dx \\ &= -\cot x \operatorname{cosec}^{n-2} x \\ &\quad + (n-2) \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \operatorname{cosec}^{n-2} x \, dx \\ &= -\cot x \operatorname{cosec}^{n-2} x \\ &\quad + (n-2) \int (\operatorname{cosec}^n x - \operatorname{cosec}^{n-2} x) \, dx \\ &= -\cot x \operatorname{cosec}^{n-2} x + (n-2) \int \operatorname{cosec}^n x \, dx \\ &\quad - (n-2) \int \operatorname{cosec}^{n-2} x \, dx \end{aligned}$$

$$(n-1) \int \operatorname{cosec}^n x \, dx = -\cot x \operatorname{cosec}^{n-2} x - (n-2) \int \operatorname{cosec}^{n-2} x \, dx$$

$$\int \operatorname{cosec}^n x \, dx = -\frac{1}{n-1} \cot x \operatorname{cosec}^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2} x \, dx \quad \blacksquare$$

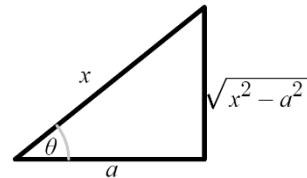
3. ปริพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป u^2 และ a^2 (เพิ่มเติม)

$$\text{สูตร} \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

พิสูจน์ ให้ $x = a \sec \theta$ จะได้ $dx = a \sec \theta \tan \theta \, d\theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\text{และ } x^2 - a^2 = a^2 \tan^2 \theta \quad \text{ดังนั้น}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \int \frac{a \sec \theta \tan \theta d\theta}{a^2 \tan^2 \theta} \\
&= \frac{1}{a} \int \frac{\sec \theta d\theta}{\tan \theta} \\
&= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \\
&= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sin \theta} d\theta \\
&= \frac{1}{a} \int \operatorname{cosec} \theta d\theta \\
&= \frac{1}{a} \ln | \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta | + c
\end{aligned}$$

สูตร $\int \operatorname{cosec} x dx$ จาก $x = a \sec \theta$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ $\operatorname{cosec} \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ และ $\cot \theta = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right| + c \\
&= \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x - a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right| + c \\
&= \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x - a}{(x^2 - a^2)^{1/2}} \right| + c \\
&= \frac{1}{a} \ln |x - a| - \frac{1}{2a} \ln |x^2 - a^2| + c \\
&= \frac{1}{a} \ln |x - a| - \frac{1}{2a} \ln |(x - a)(x + a)| + c \\
&= \frac{1}{a} \ln |x - a| - \frac{1}{2a} \ln |x - a| - \frac{1}{2a} \ln |x + a| + c \\
&= \frac{1}{2a} \ln |x - a| - \frac{1}{2a} \ln |x + a| + c \\
&= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln(uv) &= \ln u + \ln v \\
\ln\left(\frac{u}{v}\right) &= \ln u - \ln v \\
\ln u^n &= n \ln u
\end{aligned}$$

■

$$\text{สูตร} \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

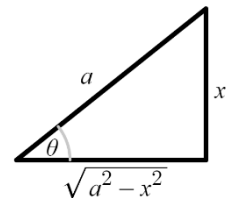
พิสูจน์ ให้ $x = a \sin \theta$ จะได้ $dx = a \cos \theta d\theta$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

และ $a^2 - x^2 = a^2 \cos^2 \theta$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \int \frac{a \cos \theta d\theta}{a^2 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{a} \int \sec \theta d\theta \quad \left(\text{สูตร } \int \sec x dx \right) \\ &= \frac{1}{a} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c \end{aligned}$$

จาก $x = a \sin \theta$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $\sec \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ และ $\tan \theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ดังนั้น



$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right| + c \\ &= \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right| + c \\ &= \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+x}{(a^2 - x^2)^{1/2}} \right| + c \quad \left(\begin{array}{l} \ln(uv) = \ln u + \ln v \\ \ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v \\ \ln u^n = n \ln u \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{a} \ln |a+x| - \frac{1}{2a} \ln |a^2 - x^2| + c \\ &= \frac{1}{a} \ln |a+x| - \frac{1}{2a} \ln |(a+x)(a-x)| + c \\ &= \frac{1}{a} \ln |a+x| - \frac{1}{2a} \ln |a+x| - \frac{1}{2a} \ln |a-x| + c \\ &= \frac{1}{2a} \ln |a+x| - \frac{1}{2a} \ln |a-x| + c \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c \end{aligned}$$

■

$$\text{สูตร} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$$

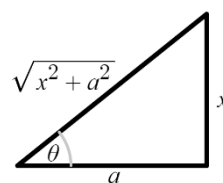
พิสูจน์ ให้ $x = a \tan \theta$ จะได้ $dx = a \sec^2 \theta d\theta$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

และ $\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec \theta$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{a \sec \theta} \\ &= \int \sec \theta d\theta \quad \text{สูตร } \int \sec x dx \\ &= \ln|\sec \theta + \tan \theta| + c \end{aligned}$$

จาก $x = a \tan \theta$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $\tan \theta = \frac{x}{a}$ และ $\sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}$ ดังนั้น



$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + c \\ &= \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right| + c \quad \ln \left(\frac{u}{v} \right) = \ln u - \ln v \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| - \ln|a| + c \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C \quad \text{เมื่อ } C = -\ln|a| + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\text{สูตร} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$$

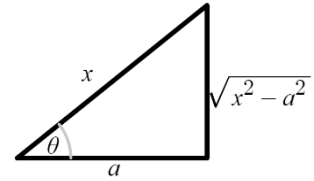
พิสูจน์ ให้ $x = a \sec \theta$ จะได้ $dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

และ $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{a \sec \theta \tan \theta d\theta}{a \tan \theta} \\ &= \int \sec \theta d\theta \quad \text{สูตร } \int \sec x dx \\ &= \ln|\sec \theta + \tan \theta| + c \end{aligned}$$

จาก $x = a \sec \theta$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $\sec \theta = \frac{x}{a}$ และ $\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$ ดังนั้น



$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + c \\ &= \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + c \quad \left(\ln \left(\frac{u}{v} \right) = \ln u - \ln v \right) \\ &= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| - \ln |a| + c \\ &= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \quad \text{เมื่อ } C = -\ln |a| + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

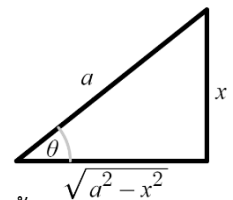
สูตร $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c$

พิสูจน์ ให้ $x = a \sin \theta$ จะได้ $dx = a \cos \theta d\theta$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

และ $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a \cos \theta \cdot a \cos \theta d\theta \\ &= a^2 \int \cos^2 \theta d\theta \quad \left(\text{สูตร } \int \cos^n x dx \right) \\ &= a^2 \left(\frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{2} \int d\theta \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{a^2}{2} \int d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{a^2}{2} \theta + c \end{aligned}$$

จาก $x = a \sin \theta$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส



จะได้ $\sin \theta = \frac{x}{a}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$ และ $\theta = \arcsin \frac{x}{a}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\text{สูตร} \quad \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c$$

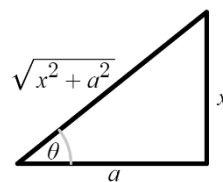
พิสูจน์ ให้ $x = a \tan \theta$ จะได้ $dx = a \sec^2 \theta d\theta$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

และ $\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec \theta$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \int a \sec \theta \cdot a \sec^2 \theta d\theta \\ &= a^2 \int \sec^3 \theta d\theta \quad \text{สูตร } \int \sec^n x dx \\ &= a^2 \left(\frac{1}{2} \tan \theta \sec \theta + \frac{1}{2} \int \sec \theta d\theta \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \tan \theta \sec \theta + \frac{a^2}{2} \int \sec \theta d\theta \quad \text{สูตร } \int \sec x dx \\ &= \frac{a^2}{2} \tan \theta \sec \theta + \frac{a^2}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c \end{aligned}$$

จาก $x = a \tan \theta$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $\tan \theta = \frac{x}{a}$ และ $\sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}$ ดังนั้น



$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} \cdot \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + c \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right| + c \quad \ln \left(\frac{u}{v} \right) = \ln u - \ln v \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| - \frac{a^2}{2} \ln |a| + c \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C \end{aligned}$$

เมื่อ $C = -\frac{a^2}{2} \ln |a| + c$ ■

$$\text{สูตร} \quad \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$$

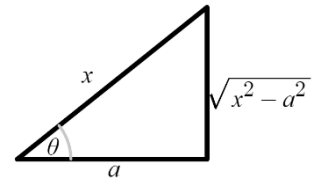
พิสูจน์ ให้ $x = a \sec \theta$ จะได้ $dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

และ $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \int a \tan \theta \cdot a \sec \theta \tan \theta d\theta \\
 &= a^2 \int \tan^2 \theta \sec \theta d\theta \\
 &= a^2 \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta \\
 &= a^2 \int (\sec^3 \theta - \sec \theta) d\theta \\
 &= a^2 \int \sec^3 \theta d\theta - a^2 \int \sec \theta d\theta \\
 &= a^2 \left(\frac{1}{2} \tan \theta \sec \theta + \frac{1}{2} \int \sec \theta d\theta \right) - a^2 \int \sec \theta d\theta \\
 &= \frac{a^2}{2} \tan \theta \sec \theta + \frac{a^2}{2} \int \sec \theta d\theta - a^2 \int \sec \theta d\theta \\
 &= \frac{a^2}{2} \tan \theta \sec \theta - \frac{a^2}{2} \int \sec \theta d\theta \\
 &= \frac{a^2}{2} \tan \theta \sec \theta - \frac{a^2}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c
 \end{aligned}$$

จาก $x = a \sec \theta$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $\sec \theta = \frac{x}{a}$ และ $\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$ ดังนั้น



$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \cdot \frac{x}{a} - \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + c \\
 &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + c \\
 &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + \frac{a^2}{2} \ln |a| + c \\
 \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C
 \end{aligned}$$

เมื่อ $C = \frac{a^2}{2} \ln |a| + c$

■

ภาคผนวก ง
เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1.1 0

1.2 2

1.3 30

1.4 20

1.5 $a^2 - 3a + 2$

1.6 $x^4 - 3x^2 + 2$

2.1 3

2.2 32

2.3 $-\frac{1}{2}$

2.4 18

3.1 $2x^2 + x$

3.2 $-x$

3.3 $x^4 + x^3$

3.4 $\frac{x}{x+1}$

4.1 $(f \circ g)(x) = 12x + 5, (g \circ f)(x) = 12x - 2$

4.2 $(f \circ g)(x) = 5 - 8x, (g \circ f)(x) = 20 - 8x$

4.3 $(f \circ g)(x) = x, (g \circ f)(x) = |x|$

4.4 $(f \circ g)(x) = \sin \sqrt{x^2 + 9}, (g \circ f)(x) = \sqrt{\sin^2 x + 9}$

4.5 $(f \circ g)(x) = e^{\cos 2x}, (g \circ f)(x) = \cos 2e^x$

4.6 $(f \circ g)(x) = 1 + \cos^2 [\ln(x-1)], (g \circ f)(x) = \ln(\cos^2 x)$

5.1 63

5.2 8

5.3 15

5.4 8

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1.1 0

1.2 5

1.3 0

1.4 $\frac{6}{5}$

1.5 -2

1.6 3

1.7 0

1.8 2

- | | | | |
|------|----------------|------|------------------|
| 1.9 | 12 | 1.10 | $-\frac{1}{9}$ |
| 1.11 | 4 | 1.12 | $\frac{2}{7}$ |
| 1.13 | $\frac{1}{6}$ | 1.14 | 0 |
| 1.15 | ∞ | 1.16 | $-\frac{1}{2}$ |
| 2. | 2 | 3. | ลิมิตหาค่าไม่ได้ |
| 4. | 0 | 5. | ลิมิตหาค่าไม่ได้ |
| 6.1 | 0 | 6.2 | $-\infty$ |
| 6.3 | $-\frac{4}{5}$ | 6.4 | 3 |
| 6.5 | $\frac{1}{9}$ | 6.6 | $\frac{81}{343}$ |
| 7. | ต่อเนื่อง | 8. | ไม่ต่อเนื่อง |
| 9. | ต่อเนื่อง | 10. | ต่อเนื่อง |

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

- | | | | |
|-----|--|-----|--|
| 1.1 | $9x^2 - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | 1.2 | $\frac{-6x^2}{\sqrt{1-x^3}}$ |
| 1.3 | $5x^2(x-4)^4 + 2x(x-4)^5$ | 1.4 | $\frac{-15}{(3x+1)^6}$ |
| 1.5 | $-21t^2 + 16t + 14$ | 1.6 | $6x - 25$ |
| 1.7 | $-\frac{3}{(x-1)^2}$ | 1.8 | 1 |
| 2. | -27 | 3. | 6 |
| 4.1 | $\frac{4 \log e}{x}$ | 4.2 | $\frac{2x^3 \log_3 e}{x^2 + 3} + 2x \log_3(x^2 + 3)$ |
| 4.3 | $1 + \ln x$ | 4.4 | $\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x^2 + 1}$ |

- 4.5 $\frac{2}{x} + \frac{6}{2x-1}$
- 4.6 $\frac{3\log_4 e}{x} + \frac{6x\log_4 e}{3x^2+2} + \frac{3x^2\log_4 e}{1-x^3}$
- 4.7 $x^3(x^2+1)^2(x-1)^5 \left[\frac{3}{x} + \frac{4x}{x^2+1} + \frac{5}{x-1} \right]$
- 4.8 $\frac{x^4(x-1)}{(x+2)(x^2+1)} \left[\frac{4}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} - \frac{2x}{x^2+1} \right]$
- 4.9 $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} \right]$
- 4.10 $\frac{(2x-3)\sqrt{x^2-2}}{\sqrt[3]{3x-5}} \left[\frac{2}{2x-3} + \frac{x}{x^2-2} - \frac{1}{3x-5} \right]$
- 5.1 $\frac{1+e^x}{x+e^x}$
- 5.2 $12x \cdot 4^{6x^2-1} \cdot \ln 4$
- 5.3 $\frac{2xe^{\log(x^2+4)} \log e}{x^2+4}$
- 5.4 $2x^3 e^{x^2} + 2xe^{x^2}$
- 5.5 $-7^{-x} \cdot \ln 7 + e^{-x}$
- 5.6 $2e^{x^2-2x+3} - \frac{e^{x^2-2x+3}}{(x-1)^2}$
- 6.1 0
- 6.2 $\sin 2x$
- 6.3 $-2s^3 \sin(s^2+1) + 2s \cos(s^2+1)$
- 6.4 $\pi \cdot 10^x \sec^2 \pi x + 10^x \ln 10 \cdot \tan \pi x$
- 6.5 $6 \sec^3(2t-1) \tan(2t-1)$
- 6.6 $-\pi \tan \pi x \cdot \cos(\ln \cos \pi x)$
- 6.7 $e^{2x} \operatorname{cosec}(1-x) \cot(1-x) + 2e^{2x} \operatorname{cosec}(1-x)$
- 6.8 $\frac{5 \sin^4(\ln 5t) \cos(\ln 5t)}{t}$
- 6.9 $2 \cos 4x$
- 6.10 $-e^x \operatorname{cosec}^2(e^x+1)$
- 7.1 $\frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$
- 7.2 $-\frac{1}{t\sqrt{1-\ln^2 t}}$
- 7.3 $\frac{3e^x}{\sqrt{1-9x^2}} + e^x \arcsin 3x$
- 7.4 $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 2x \operatorname{arcsec} x$
- 7.5 $\frac{1}{x(1+\ln^2 7x)}$
- 7.6 $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2} \arcsin 2x}$
8. $4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$
9. -2
10. $48(3t+7)^3 + 120(3t+7)$

- | | |
|---|---|
| 11. $\frac{4t}{3}$ | 12. $6e^{3t-2} \cos(2e^{3t-2})$ |
| 13. $\frac{3 \cdot 7^{\sqrt{\log t^2}} \cdot \ln 7 \cdot \log e}{t\sqrt{\log t^2}}$ | 14. $\frac{5y}{12y^3 - 5x}$ |
| 15. $\frac{-3x^2 + 12y}{3y^2 - 12x}$ | 16. -2 |
| 17. $\frac{-\frac{1}{x} + y^2 \cos xy^2}{\frac{1}{y} - 2xy \cos xy^2}$ | 18. $\frac{3 - \frac{\log e}{x+y}}{e^y + \frac{\log e}{x+y}}$ |
| 19. $\frac{2y}{e^y \sec^2 e^y - 2x - e^{\sin y} \cos y}$ | 20. $24x - 24$ |
| 21. $\frac{4}{(x-1)^3}$ | 22. $-\frac{3}{8}(1-x)^{-5/2}$ |
| 23. $(x+3)e^x$ | 24. $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ |
| 25. $-12 \log e \cdot x^{-4}$ | 26. $16 \cos(1-2x)$ |

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

- | | |
|---|--|
| 1.1 2 | 1.2 0 |
| 1.3 $\frac{1}{2}$ | 1.4 0 |
| 1.5 1 | 1.6 0 |
| 1.7 1 | 1.8 1 |
| 2.1 สูงสุดสัมพัทธ์ 4 ต่ำสุดสัมพัทธ์ 0 | 2.2 สูงสุดสัมพัทธ์ 9 ต่ำสุดสัมพัทธ์ 5 |
| 2.3 สูงสุดสัมพัทธ์ 25 ต่ำสุดสัมพัทธ์ -2 | 2.4 สูงสุดสัมพัทธ์ 4 ต่ำสุดสัมพัทธ์ -4 |
| 2.5 สูงสุดสัมพัทธ์ $\frac{4}{27}$ ต่ำสุดสัมพัทธ์ 0 | 2.6 สูงสุดสัมพัทธ์ 2 ต่ำสุดสัมพัทธ์ -2 |
| 2.7 สูงสุดสัมพัทธ์ $\frac{7}{3}$ ต่ำสุดสัมพัทธ์ $-\frac{13}{6}$ | 2.8 สูงสุดสัมพัทธ์ $\frac{22}{3}$ ต่ำสุดสัมพัทธ์ $-\frac{27}{2}$ |
| 3. 2,500 ตารางเมตร | 4. 2 นิ้ว |

5. 4 ฟุตต่อวินาที

6. $\frac{8}{100\pi}$ เมตรต่อนาที

7. $\frac{6}{100}$ เรเดียนต่อนาที

8. $s = 12, v = 20, a = 22$

9. $s = -\frac{11}{3}, v = -4, a = 0$

10.1 $e^x \cos e^x dx$

10.2 $-\frac{2}{1-2x} dx$

10.3 $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

10.4 $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

11.1 10.05

11.2 4.020833

11.3 8.036

11.4 49,867

12.1 0.48489

12.2 0.48489

13. รัศมี $\frac{10}{\sqrt{2\pi}}$ คลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $\frac{\sqrt{2\pi}}{1,000}$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1. $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 5x + c$

2. $\frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{9x^2}{2} + c$

3. $\frac{1}{4}(x^2 + 12)^4 + c$

4. $\frac{2}{9}(x^3 + 3x)^{3/2} + c$

5. $-\frac{1}{3(3x-1)^3} + c$

6. $\frac{2}{21}(7x-4)^{3/2} + c$

7. $-\frac{1}{25}(7-5x^2)^{5/2} + c$

8. $-\frac{2}{9}(1+\cos 3x)^{3/2} + c$

9. $\frac{1}{18}(\sin^3 \theta + 4)^6 + c$

10. $-\frac{1}{3}\ln|5-3x| + c$

11. $\frac{1}{12}\ln|1+4x^3| + c$

12. $\ln|x^3-2x+7| + c$

13. $\frac{1}{3}\ln|1+3e^x| + c$

14. $\ln|\ln(x+1)| + c$

15. $\ln|x \ln x| + c$

16. $2\ln|\ln \sqrt{x}| + c$

17. $\frac{1}{2}\ln|1+\sin^2 2x| + c$

18. $\ln|\arctan x| + c$

19. $\frac{1}{3} \cdot \frac{8^{3x}}{\ln 8} + c$

20. $\frac{1}{4} \cdot e^{4x-3} + c$

21. $\frac{1}{6} e^{3x^2-1} + c$

22. $\frac{1}{4} \cdot \frac{3^{4x^2+4x}}{\ln 3} + c$

23. $e^{\sqrt{2x+1}} + c$

24. $\frac{1}{4}(2x-1)^2 + c$ หรือ $x^2 - x + c$

25. $\frac{4^x - 4^{-x}}{\ln 4} + c$

26. $e^{\sin^2 x} + c$

27. $e^{\arcsin x} + c$

28. $-\frac{1}{16} \cos(4x^4 + 7) + c$

29. $\frac{1}{2} \ln \left| \sec e^{2x} + \tan e^{2x} \right| + c$

30. $-\ln \left| \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right| + c$

31. $\frac{1}{2} \tan(x^2 + 2x - 3) + c$

32. $\frac{1}{2} \sec x^2 + c$

33. $\sin(\tan \theta) + c$

34. $\ln \left| \sec(\sin e^x) \right| + c$

35. $-2 \cos(\ln \sqrt{x}) + c$

36. $\frac{1}{3} \ln \left| \sec(3\sqrt{x}) + \tan(3\sqrt{x}) \right| + c$

37. $\frac{1}{10} \arctan \frac{2x}{5} + c$

38. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-3}{3} + c$

39. $\operatorname{arcsec} 4x + c$

40. $\arcsin \frac{x-2}{2} + c$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

1.1 $\frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + c$

1.2 $\frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 \log e + c$

1.3 $-\frac{1}{x} \ln 3x - \frac{1}{x} + c$

1.4 $x \arcsin 3x + \frac{1}{3} (1 - 9x^2)^{1/2} + c$

1.5 $x \arccos x - (1 - x^2)^{1/2} + c$

1.6 $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$

1.7 $x^2(1 + x^2)^{1/2} - \frac{2}{3} (1 + x^2)^{3/2} + c$

1.8 $\frac{1}{4} (x^3 - 5) e^{4x} - \frac{3}{16} x^2 e^{4x} + \frac{3}{32} x e^{4x} - \frac{3}{128} e^{4x} + c$

1.9 $x^2 \cos(1 - x) + 2x \sin(1 - x) - 2 \cos(1 - x) + c$

$$1.10 \quad \frac{3}{13} e^{-2x} \sin 3x - \frac{2}{13} e^{-2x} \cos 3x + c$$

$$1.11 \quad -\frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + c$$

$$1.12 \quad \frac{1}{5} e^{2x-3} \cos(1-x) + \frac{2}{5} e^{2x-3} \sin(1-x) + c$$

$$2.1 \quad -\frac{1}{20} \cos 10x - \frac{1}{8} \cos 4x + c$$

$$2.2 \quad -\frac{1}{2} \sin(3-x) - \frac{1}{6} \sin(-1-3x) + c$$

$$2.3 \quad -\frac{1}{18} \sin(3e^{3x}) - \frac{1}{6} \sin(-e^{3x}) + c$$

$$2.4 \quad \frac{1}{8} x - \frac{1}{128} \sin 16x + c \qquad 2.5 \quad \frac{1}{20} \sin^5 4x - \frac{1}{28} \sin^7 4x + c$$

$$2.6 \quad -\frac{1}{15} \cos^5 3x + \frac{1}{21} \cos^7 3x + c$$

$$2.7 \quad \frac{1}{21} \sin^7 3x - \frac{2}{27} \sin^9 3x + \frac{1}{33} \sin^{11} 3x + c$$

$$2.8 \quad -\frac{1}{21} \cos^7 3x + \frac{2}{27} \cos^9 3x - \frac{1}{33} \cos^{11} 3x + c$$

$$2.9 \quad \frac{1}{12} \sec^4 3x - \frac{1}{6} \sec^2 3x + c \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{12} \tan^4 3x + c$$

$$2.10 \quad -\frac{1}{4} \operatorname{cosec}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 x + c \quad \text{หรือ} \quad -\frac{1}{4} \cot^4 x + c$$

$$2.11 \quad -\frac{1}{8} \sin^3 2x \cos 2x - \frac{3}{16} \sin 2x \cos 2x + \frac{3x}{8} + c$$

$$2.12 \quad \frac{1}{9} \cos^2 3x \sin 3x + \frac{2}{9} \sin 3x + c$$

$$2.13 \quad -\frac{1}{6} \cot 2x \operatorname{cosec}^2 2x - \frac{1}{3} \cot 2x + c$$

$$2.14 \quad -\frac{1}{12} \cot^4 3x + \frac{1}{6} \cot^2 3x + \frac{1}{3} \ln |\sin 3x| + c$$

$$3.1 \quad \frac{1}{2} \ln \left| 2x + \sqrt{4x^2 - 25} \right| + c \qquad 3.2 \quad -\frac{\sqrt{9-4x^2}}{9x} + c$$

$$3.3 \quad \frac{1}{6\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + x^3}{\sqrt{7} - x^3} \right| + c$$

$$3.4 \quad \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + 4 + \sqrt{(x^2 + 4)^2 - 16} \right| + c$$

$$3.5 \quad \frac{x}{2} \sqrt{4 - 9x^2} + \frac{2}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + c$$

$$3.6 \quad \frac{x+2}{2} \sqrt{x^2 + 4} - 2 \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4} \right| + c$$

$$3.7 \quad \frac{1}{8} \ln \left| \frac{3x^2 - 6}{3x^2 + 2} \right| + c$$

$$3.8 \quad \frac{1}{32} \ln \left| \frac{2x^2 + 1}{7 - 2x^2} \right| + c$$

$$4.1 \quad \ln |x - 1| + 2 \ln |x + 2| + c$$

$$4.2 \quad -\ln |x + 2| + \ln |2x - 1| + c$$

$$4.3 \quad \frac{5}{2} \ln |x - 1| - 7 \ln |x - 2| + \frac{9}{2} \ln |x - 3| + c$$

$$4.4 \quad 3 \ln |x| + \ln |x + 1| + \ln |x - 1| + c$$

$$4.5 \quad 4 \ln |x| + \frac{1}{x} + 3 \ln |x - 1| + c$$

$$4.6 \quad \ln |3x - 1| - \ln |x + 2| - \frac{3}{x + 2} + c$$

$$4.7 \quad 2 \ln |x + 1| + \frac{3}{2} \ln |x^2 + 1| + \arctan x + c$$

$$4.8 \quad \frac{1}{2} \ln |x^2 + 4| - \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + \arctan x + c$$

$$5.1 \quad 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln |\sqrt[6]{x} - 1| + c$$

$$5.2 \quad \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + \frac{1}{2} \ln |2\sqrt[4]{x} - 1| + c$$

$$5.3 \quad 4 \ln \left(\frac{x^{1/4}}{|1 - x^{1/4}|} \right) + c$$

$$5.4 \quad \frac{3}{5}(x - 1)^{5/3} + 3(x - 1)^{2/3} - \frac{3}{(x - 1)^{1/3}} + c$$

$$5.5 \quad \frac{2}{3} \sqrt{x^3 - 1} - \frac{2}{3} \arctan \sqrt{x^3 - 1} + c$$

$$5.6 \quad \frac{2}{9} \sqrt{1 + x^3} (x^3 - 2) + c$$

$$5.7 \quad \frac{2}{5} (x - 3)^{5/2} + 2(x - 3)^{3/2} + c$$

$$5.8 \quad \frac{1}{28}(2x+1)^{7/2} - \frac{1}{10}(2x+1)^{5/2} + \frac{1}{12}(2x+1)^{3/2} + c$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

$$1.1 \quad \frac{21}{4}$$

$$1.2 \quad 1$$

$$1.3 \quad \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}$$

$$1.4 \quad \frac{17}{12}$$

$$1.5 \quad -\frac{1}{9}$$

$$1.6 \quad e - \frac{5}{e}$$

$$2.1 \quad \frac{64}{3} \text{ ตารางหน่วย}$$

$$2.2 \quad 6 \text{ ตารางหน่วย}$$

$$2.3 \quad \frac{9}{2} \text{ ตารางหน่วย}$$

$$2.4 \quad 9 \text{ ตารางหน่วย}$$

$$3.1 \quad \frac{206}{15}\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$3.2 \quad \frac{32}{5}\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$3.3 \quad \left(10 - \frac{8\sqrt{2}}{3}\right)\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$3.4 \quad \frac{1}{6}\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$3.5 \quad \frac{78}{5}\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$4.1 \quad \frac{1}{6}\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$4.2 \quad \frac{3}{2}\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$4.3 \quad \frac{7}{6}\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

บรรณานุกรม

- กฤษณะ เนียมมณี. (2543). *แคลคูลัสสำหรับธุรกิจ 1*. กรุงเทพมหานคร: พิกซ์การพิมพ์.
- ณรงค์ฤทธิ์ แก้วบรรจกร. (2557). *แคลคูลัสหนึ่งตัวแปร*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธกล้า และณัฐนาถ ไตรภพ. (2547). *แคลคูลัส 1*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ธีระศักดิ์ อัจฉานนท์. (2564). *แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ สกายบุ๊กส์.
- นนุช สุขวารี, พชร เลิศวิจิตรศิลป์, กนกรัตน์ เสวตเศรณี, พันทิพย์ โตแก้ว, กันตภณ คูหาพัฒนกุล และกันย์ สุนัยขึ้น. (2556). *คณิตศาสตร์วิศวกรรม 1*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แสงสว่างเวิลด์เพรสจำกัด.
- นนุช สุขวารี, พชร เลิศวิจิตรศิลป์, สุขชัย ตันยัชฌมาวุฒิ, กนกรัตน์ เสวตเศรณี และมนตรี มาลีวงศ์. (2553). *เทคนิคอินทิเกรตและการประยุกต์*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ แสงสว่างเวิลด์เพรสจำกัด.
- ภริณี ฤทธิเดช. (2560). *แคลคูลัสพื้นฐาน*. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.
- ภัทราวดี ประเสริฐสังข์. (2563). *แคลคูลัสเบื้องต้น*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- มนัส ประสงค์. (ม.ป.ป.). *แคลคูลัส 1*. กรุงเทพฯ: ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.
- มนัส ประสงค์. (2535). *แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 1*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.
- ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). *ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน*. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สหมิตรพรินติ้ง.
- วิริยะ ศิริขานนท์. (มปป). *แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร*. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.

สุขชัย ตันยอชฌาคุณ, นงนุช สุขวารี, ณรงค์ฤทธิ์ แก้วบรรจกร, ปรียาวัลย์ คูหา, สุรรัตน์ อาริรักษ์สกุล ก้องโลก. (2556). *แคลคูลัส 1*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ แสงสว่างเวิลด์เพรส จำกัด.

สุขชัย ตันยอชฌาคุณ, นงนุช สุขวารี, ณรงค์ฤทธิ์ แก้วบรรจกร, ปรียาวัลย์ คูหา, สุรรัตน์ อาริรักษ์สกุล ก้องโลก. (2556). *คณิตศาสตร์วิศวกรรม 1*. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ แสงสว่างเวิลด์เพรสจำกัด.

สันต์ชัย เปี่ยมมุขดา. (มปป). *แคลคูลัส 1-1*. กรุงเทพฯ: ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus* (10th ed.). John Wiley & Sons. Ltd., New York, U.S.A.

Desmos. (n.d.). *Graphing Calculator*. <https://www.desmos.com/calculator>

James, S. (2008). *Calculus: Early transcendentals* (6th ed.). Thomson Brooks/Cole.

Swokowski, E. W., Olinick, M., & Pence, D. (1994). *Calculus of a single variable* (2nd ed.). PSW Publishing Company, Boston, U.S.A.

Thomas, G. B., Jr., Weir, M. D., & Hass, J. R. (2013). *Thomas' calculus: Early transcendentals* (13th ed.). Pearson.

William L. Briggs, Denver L. Cochran and Eric L. Schulz. (2013). *Calculus for Scientists and Engineers*. (1st ed.). Pearson Education, Inc., USA

ดรรชนี

คำศัพท์	หน้า
LIATE	195
กฎของโลปีตาล (L'Hôpital's rule)	119
กฎลูกโซ่ (the chain rule)	81
กราฟของฟังก์ชัน (Graph of function)	3
การเขียนกราฟของฟังก์ชัน (Sketch graph of function)	127
การเขียนฟังก์ชันในรูปของฟังก์ชันประกอบ (Expressing a function as a composite function)	25
การใช้ซอฟต์แวร์ในการลงจุดกราฟ (Graphing with software)	26
การประมาณค่าเชิงเส้น (linearization)	156
การประมาณค่าเชิงเส้นมาตรฐาน (standard linear approximation)	156
การแยกเป็นเศษส่วนย่อย (partial fractions)	216
การวัดมุมเป็นเรเดียน (radian measure)	302
การหาค่าของฟังก์ชัน (Evaluating function)	9
การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย (Integration of rational functions by partial fractions)	216
การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Integration by trigonometric substitutions)	210
การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตัวแปร (Integration by substitution)	171
การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตัวแปรใหม่ (Integration by substitution of a new variable)	225
การหาปริพันธ์ทีละส่วน (Integration by parts)	189
การหาปริพันธ์ทีละส่วนโดยใช้ตาราง (Tabular integration by parts)	196
การหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง (Integration by trigonometric power)	198
การหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุน (Volume of solid of revolution)	256
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ (Derivative of a composite function)	80
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต (Derivative of an algebraic function)	75

คำศัพท์	หน้า
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย (Derivative of transcendental functions)	93
แกนหมุน (axis of revolution)	256
ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (relative error)	159
ความชัน (slope)	70
ความต่อเนื่อง (continuous)	58
ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity of a function)	56
ความต่อเนื่องทางขวา (right continuous)	58
ความต่อเนื่องทางซ้าย (left continuous)	58
ความเร่ง (acceleration)	147
ความเร็ว (velocity)	147
ความเว้า (concave)	131
ค่าคงตัว (constant)	166
ค่าความคลาดเคลื่อน (approximation error)	159
ค่าเชิงอนุพันธ์ (differentials)	154
ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum)	135
ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum)	135
ค่าสัมบูรณ์ (absolute value)	6
ค่าสุดขีดของฟังก์ชัน (Extreme value of function)	134
ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ (absolute extreme)	135
ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (relative extreme)	135
ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum)	135
ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum)	135
คู่อันดับ (order)	1
เครื่องหมายปริพันธ์ (integral sign)	166
โคเซแคนต์ (cosecant)	304
โคไซน์ (cosine)	304
โคแทนเจนต์ (cotangent)	304

คำศัพท์	หน้า
จุดเปลี่ยนเว้า (inflection point)	131, 132
จุดวิกฤต (critical point)	135
ชะลอความเร็ว (slowing down)	149
เซแคนต์ (secant)	304
ไซน์ (sine)	304
โดเมน (domain)	1
ตรีโกณมิติ (trigonometric)	304
ตัวถูกหาปริพันธ์ (integrand)	233
ตัวแปร (variable)	166
ตัวแปรตาม (dependent variable)	2
ตัวแปรอิสระ (independent variable)	2
ทฤษฎีบทของลิมิต (Theorem of limit)	36
ทฤษฎีบทแซนวิช (sandwich theorem or squeeze theorem)	41
ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (the fundamental theorem of calculus)	233
แทนเจนต์ (tangent)	304
ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative)	167
ประเภทของฟังก์ชัน (Type of function)	15
ปริพันธ์ (integrand)	166
ปริพันธ์จำกัดเขต (definite integral)	165, 232
ปริพันธ์ทีละส่วน (integration by parts)	189
ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integral)	165, 166
ปัญหาโจทยค่าสุดขีด (Extreme value problem)	145
ปัญหาเส้นสัมผัส (tangent line problem)	69
ปัญหาอัตราสัมพันธ์ (Related rates problem)	151
ผลบวกรีมันน์ (Riemann sums)	231
ผลแบ่งกัน (partition)	231
พีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of function)	18

คำศัพท์	หน้า
พื้นที่ (area)	243
พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง (Area of a region between curve)	241
ฟังก์ชัน (function)	1
ฟังก์ชันขยายความต่อเนื่อง (continuous extension function)	63
ฟังก์ชันขั้นบันได (step function)	4
ฟังก์ชันความเร่ง (acceleration function)	148
ฟังก์ชันความเร็ว (velocity function)	147
ฟังก์ชันค่าคงตัว (constant function)	15
ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (absolute value function)	6
ฟังก์ชันคี่ (odd function)	8
ฟังก์ชันคู่ (even function)	8
ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function)	15
ฟังก์ชันด้านนอก (outer function)	25
ฟังก์ชันด้านใน (inner function)	25
ฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง (explicit function)	87
ฟังก์ชันโดยปริยาย (implicit function)	87
ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function)	17
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric function)	302
ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Inverse trigonometric function)	308
ฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function)	61
ฟังก์ชันที่นิยามทีละช่วง (Piecewise-defined functions)	4
ฟังก์ชันประกอบ (composite function)	21
ฟังก์ชันผกผัน (inverse function)	12, 13
ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคเซแคนต์ (inverse cosecant function)	309
ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์ (inverse cosine function)	309
ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (inverse cotangent function)	309
ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเซแคนต์ (inverse secant function)	309

คำศัพท์	หน้า
ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ (inverse sine function)	308
ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์ (inverse tangent function)	309
ฟังก์ชันผลคูณ (multiplication function)	18
ฟังก์ชันผลบวก (addition function)	18
ฟังก์ชันผลลบ (minus function)	18
ฟังก์ชันผลหาร (dividing function)	18
ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function)	16
ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic function)	15
ฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function)	7, 127
ฟังก์ชันยกกำลัง (power function)	16
ฟังก์ชันรากที่ n (n^{th} root function)	16
ฟังก์ชันลด (decreasing function)	7, 127
ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm function)	301
ฟังก์ชันลอการิทึมฐาน a (logarithm function with base a)	301
ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential function)	300
ฟังก์ชันเลขชี้กำลังฐาน a (exponential function with base a)	300
ฟังก์ชันเลขชี้กำลังฐาน e (exponential function with base e)	300
ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one function)	12
ฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental function)	18
ฟังก์ชันอัตราเร็ว (speed function)	148
ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)	15
ระดับชั้น n (degree n)	16
ระยะทาง (distance)	147
รูปแบบทั่วไปของสูตรการหาอนุพันธ์ (generalized derivative formula)	81
รูปแบบยังไม่กำหนด (indeterminate form)	42, 119
เร่งความเร็ว (speed up)	149
เรเดียน (radian)	303

คำศัพท์	หน้า
เรนจ์ (range)	1
ลอการิทึมฐานธรรมชาติ (natural logarithm)	301
ลอการิทึมฐานสามัญ (common logarithm)	301
ลิมิต (limit)	35
ลิมิต ณ อนันต์ (limit at infinity)	48
ลิมิตกับปัญหาค่าอนันต์ (Infinity problem of limit)	48
ลิมิตของฟังก์ชัน (Limit of a function)	31
ลิมิตทางขวา (right hand limit)	36
ลิมิตทางซ้าย (left hand limit)	35
ลิมิตบน (upper limit)	233
ลิมิตมีค่าอนันต์ (infinity limit)	48
ลิมิตล่าง (lower limit)	233
วิธีแบบจาน (disk method)	256, 258
วิธีแบบเปลือกทรงกระบอก (cylindrical shell method)	256, 275
วิธีแบบวงแหวน (washers method)	259
เว้าขึ้น (concave up)	131
เว้าลง (concave down)	131
ส่วนเปลี่ยนแปลง (increment)	71
สูตรลดทอนในการหาปริพันธ์ (integration reduction formula)	208
เส้นสัมผัสโค้ง (tangent line)	70
หาปริพันธ์ได้ (integrable)	232
หาอนุพันธ์ได้ (differentiable)	73
อนันต์ (infinity)	48
อนุพันธ์ (derivative)	72
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Derivative of a function)	72
อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit differentiation)	87
อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Derivatives of trigonometric function)	103

คำศัพท์	หน้า
อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Derivatives of inverse of trigonometric function)	110
อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม (Derivative of logarithmic functions)	93
อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Derivative of exponential functions)	98
อนุพันธ์อันดับ n (n^{th} derivative)	90
อนุพันธ์อันดับ 1 (first derivative)	90
อนุพันธ์อันดับ 2 (second derivative)	90
อนุพันธ์อันดับ 3 (third derivative)	90
อนุพันธ์อันดับ 4 (fourth derivative)	90
อนุพันธ์อันดับสูง (Higher derivatives)	90
อัตราการเปลี่ยนแปลง (Rate of change)	71
อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย (rate of average change)	71
อัตราสัมพันธ์ (related rates)	151

สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$1. \quad \frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$1. \quad \frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$2. \quad \frac{d}{dx}(u \pm v \pm w) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}$$

$$3. \quad \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$4. \quad \frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$$

$$5. \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2} \left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right)$$

$$6. \quad \frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$7. \quad \frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}$$

$$8. \quad \frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx}$$

$$9. \quad \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$10. \quad \frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$11. \quad \frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

$$12. \quad \frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$$

$$13. \quad \frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$14. \quad \frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$15. \quad \frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$16. \quad \frac{d}{dx}(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$17. \quad \frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$18. \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$19. \quad \frac{d}{dx}(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$20. \quad \frac{d}{dx}(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$21. \quad \frac{d}{dx}(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$22. \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} u) = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$23. \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

$$24. \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccosec} u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

สูตรปริพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\int 0 du = c$
2. $\int a du = a \int du$
3. $\int du = u + c$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
5. $\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$
6. $\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c$
7. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
8. $\int e^u du = e^u + c$
9. $\int \sin u du = -\cos u + c$
10. $\int \cos u du = \sin u + c$
11. $\int \sec^2 u du = \tan u + c$
12. $\int \operatorname{cosec}^2 u du = -\cot u + c$
13. $\int \sec u \tan u du = \sec u + c$
14. $\int \operatorname{cosec} u \cot u du = -\operatorname{cosec} u + c$
15. $\int \tan u du = \ln |\sec u| + c$
16. $\int \cot u du = \ln |\sin u| + c$
17. $\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + c$
18. $\int \operatorname{cosec} u du = \ln |\operatorname{cosec} u - \cot u| + c$
19. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + c$
20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c$

21. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + c$
22. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$
23. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + c$
24. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + c$
25. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + c$
26. $\int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + c$
27. $\int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + c$
28. $\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + c$

สูตรลดทอน

1. $\int \sin^n u du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u du$
2. $\int \cos^n u du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$
3. $\int \tan^n u du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u du$
4. $\int \cot^n u du = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u du$
5. $\int \sec^n u du = \frac{1}{n-1} \tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du$
6. $\int \operatorname{cosec}^n u du = -\frac{1}{n-1} \cot u \operatorname{cosec}^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2} u du$

ประวัติผู้เรียบเรียง

ชื่อ – นามสกุล

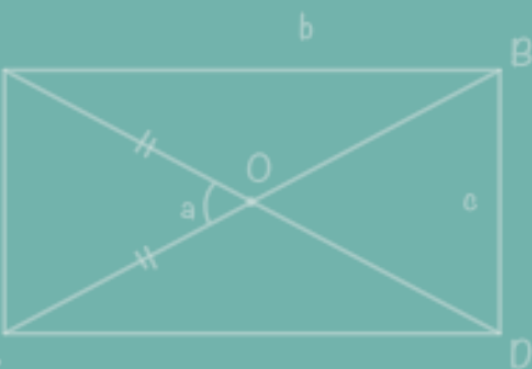
นายประเสริฐ อยู่สำราญ (Mr.Prasert Yoosomran)

ประวัติการทำงาน

2558 – ปัจจุบัน: อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

ประวัติการศึกษา

ชื่อปริญญา	สาขา	สถาบันการศึกษาที่จบ	ปีที่จบ
วิทยาศาสตร์บัณฑิต	คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ (บางเขน)	2547
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต	คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยรามคำแหง	2558



Calculus 1

$$a/b = \tan x$$

$$a/c = \sin y$$



$$V = abc \quad S = 2ab + 2bc + 2ac$$

ตำรา "แคลคูลัส 1" เล่มนี้เรียบเรียงขึ้นเพื่อให้นักศึกษา

ใช้ประกอบการเรียนการศึกษา

ใบรายวิชา 2-212-103 ชื่อวิชา แคลคูลัส 1

ซึ่งเป็นวิชาในหมวดพื้นฐานวิชาชีพของนักศึกษาระดับปริญญาตรี

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

และสำหรับผู้สนใจทั่วไป

ประเสริฐ อยู่สำราญ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

