รายงานการวิจัย

โครงการวิจัยเรื่อง การพัฒนาการทดลองเรื่องการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกา

Development of Oscillation of a Pendulum Experiments

ผู้วิจัย

ผศ. สุจิตต์ ศรีชัย

นายสุชาติ แซ่เฮ่ง

RMUTK - CARIT

3 2000 00100661 0

โครงการวิจัยทุนสนับสนุนงานวิจัยของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

งบประมาณผลประโยชน์ ปี พ.ศ. 2553

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

1339

bib 96015

681.11

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ขยายการทดลองการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกาจากการแกว่งไปตามส่วนโค้งของวงกลมไปสู่การแกว่งหรือออสซิลเลตตามทางโค้งไซคลอยด์ ซึ่งมี 2 รูปแบบ คือ การออสซิลเลตบนรางโค้งไซคลอยด์กับการแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม โดยทำการทดลองเพื่อยืนยันสมบัติทอตโทโครนและสมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์ และศึกษาเปรียบเทียบคาบของการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม กับการแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม ที่แอมพลิจูดค่าต่าง ๆ เมื่อเชือกที่ผูกลูกตุ้มยาวเท่ากัน

งานวิจัยนี้ยังได้พัฒนาวิธีการจับเวลาเป็นระบบที่ประกอบด้วยโฟโตเกต วงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลา และนาฬิกาจับเวลา ซึ่งจับเวลาได้ละเอียดถึงมิลลิวินาที เมื่อนำคาบของการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม กรณีที่แกว่งเป็นมุมเล็ก ๆ ($<5^\circ$) และคาบของการแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม ที่วัดได้จากการทดลองไปคำนวณหาค่าท้องถิ่นของค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกได้ผลเป็น $9.764 - 9.782\ m/s^2$

ผ.ศ. สุจิตต์ ศรีชัย

นาย สุชาติ แซ่เฮ้ง

Abstract

This research was extended the oscillation of a pendulum experiments from oscillation along the arc of circular path to oscillation along cycloid path, which have two types, oscillation on cycloid curve rail and cycloidal pendulum. The experiments were set to confirm tautochrone and brachistochrone properties of cycloid, and compare period of oscillation of same length, simple pendulum and cycloidal pendulum, at various amplitude.

This research also developed a timing system that consists of photogates, stopwatch control circuit and millisecond stopwatch. The periods of oscillation of small amplitude ($<5^{\circ}$) simple pendulum and cycloidal pendulum measured from experiments resulting in the values 9.764 - 9.782 m/s^2 of local acceleration due to gravity.

กิตติกรรมประกาศ

การวิจัยเรื่องการแกว่งของลูกตุ้มได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบผลประโยชน์ประจำปีงบประมาณ 2553 มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ ซึ่งได้รับการสนับสนุนเรื่องงบประมาณในการวิจัย การฝึกอบรมเพื่อให้ผู้วิจัยทราบแนวทางในการทำวิจัยอย่างมีคุณภาพ การประสานงานและการอำนวยความสะดวกต่าง ๆ ทำให้การจัดการโครงการวิจัยดำเนินไปได้ด้วยความราบรื่น คณะผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้ง และขอขอบพระคุณผู้อำนวยการสถาบันวิจัยและพัฒนา เจ้าหน้าที่และผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านเป็นอย่างยิ่ง

นอกจากนี้คณะผู้วิจัยยังได้รับความช่วยเหลืออย่างดีจากอาจารย์ณัฐชัย สงวนทรัพย์ อาจารย์ประจำสาขาเครื่องเรือน นายวสันต์ ถาวร และนักศึกษาที่ช่วยทำการทดลองทุกคน รวมทั้งผู้ร่วมทำงานวิจัยที่เสียสละเวลาช่วยเหลือในงานวิจัยให้ลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้วิจัยขอขอบคุณมา ณ โอกาสนี้

คณะผู้วิจัยขอระลึกถึงพระคุณของท่านผู้มีพระคุณทั้งหลายของคณะผู้วิจัย คุณบิดามารดา คุณครูบาอาจารย์และแหล่งศึกษา ตลอดจนประสบการณ์ในสถานที่ทำงานแห่งนี้ ที่ประสิทธิประสาทวิชาการความรู้ในการทำงานวิจัย หากมีข้อบกพร่องประการใด คณะผู้จัดทำขอน้อมรับและทำการปรับปรุงในโอกาสต่อไป

คณะผู้วิจัย

ธันวาคม 2553

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อ	(1)
กิตติกรรมประกาศ	(3)
สารบัญ	(4)
สารบัญตาราง	(6)
สารบัญภาพ	(7)
บทที่	
1 บทนำ	
1.1 ความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์	2
1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย	2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าได้รับ	3
2 ทบทวนวรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	
2.1 สมการทางโค้งไซคลอยด์	4
2.2 สมบัติทอตโทโครนของไซคลอยด์	5
2.3 ซิมเปิล เพนดูลัม และ ไซคลอยดัล เพนดูลัม	11
2.4 สมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์	12
3 เนื้อหาการวิจัย	
3.1 อุปกรณ์และวิธีดำเนินการวิจัย	20
3.2 สถานที่ทำการวิจัย	38
4 ผลการวิจัยและข้อวิจารณ์	
4.1 การทดลองเพื่อยืนยันสมบัติทอตโทโครนของไซคลอยด์	39
4.2 การทดลองเพื่อเปรียบเทียบคาบของการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม กับไซคลอยดัล เพนดูลัมที่มีความยาวเชือกเท่ากัน	43
4.3 การทดลองเพื่อยืนยันสมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์	46

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผล 48

5.2 ข้อเสนอแนะ 48

บรรณานุกรม 49

ภาคผนวก

ประวัติผู้วิจัย 51

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่

1 คาบของการออสซิลเลตบนรางไซคลอยด์ที่แอมพลิจูดต่าง ๆ กัน 39

2 คาบของการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม เมื่อความยาวเชือกมีค่าเป็น 28 cm 43

3 คาบของการแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม เมื่อความยาวเชือกมีค่าเป็น 28 cm 44

4 เวลาในการเคลื่อนที่ระหว่าง 2 ตำแหน่ง คู่เดียวกัน บนรางไซคลอยด์และรางตรงปรับความเอียงได้ 46

สารบัญภาพ

หน้า

ภาพที่

1.1 การแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม 1
1.2 การออสซิลเลตหรือการแกว่งของลูกตุ้มตามเส้นทางไซคลอยด์ 1
2.1 ทางโค้งไซคลอยด์ 4
2.2 ตำแหน่งของจุดบนทางโค้งไซคลอยด์ขณะเวลาใด ๆ 4
2.3 ทางโค้งไซคลอยด์ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด 5
2.4 การออสซิลเลตของลูกตุ้มบนทางโค้งไซคลอยด์ 8
2.5 โปรไฟล์ที่ให้เชือกที่ผูกลูกตุ้มวางตัวเพื่อบังคับให้ลูกตุ้มแกว่งไปตามเส้นทางไซคลอยด์ 12
2.6 การเชื่อมโยงการเคลื่อนที่ของอนุภาคกับรังสีแสง 13
2.7 เส้นทางการเคลื่อนที่ของแสงเมื่อระนาบที่แบ่งมีจำนวนมากขึ้น 14
2.8 ความเร็วของอนุภาคที่ตำแหน่งใด ๆ บนเส้นทางการเคลื่อนที่ 15
3.1 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลอง 20
3.2 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลอง (ต่อ) 21
3.3 โปรแกรมที่ใช้เขียนเส้นโค้งไซคลอยด์ 21
3.4 ลักษณะของแผ่นไม้หลังจากตัดออกเป็นเส้นโค้งไซคลอยด์ 22
3.5 รางไซคลอยด์เมื่อประกอบเข้ากับฐานแล้ว 23
3.6 รางตรงปรับความเอียงได้ 23
3.7 การตัดแบ่งครึ่งแผ่นไม้รูปโค้งไซคลอยด์ 24
3.8 การประกอบแผ่นไม้รูปครึ่งโค้งไซคลอยด์เข้ากับแผ่นไม้อัด 24
3.9 แบบจำลองฮอยเกนส์ เพนดูลัมที่สร้างเสร็จแล้ว 25
3.10 ส่วนประกอบต่าง ๆ ของโฟโตเกต 25
3.11 โฟโตเกตที่สร้างเสร็จแล้ว 26
3.12 ตำแหน่งของอุปกรณ์ต่าง ๆ บนแผงวงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลา 28
3.13 ลายวงจรของวงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลา 29
3.14 การติดตั้งอุปกรณ์บนแผ่นวงจรพิมพ์ 29

สารบัญภาพ (ต่อ)

หน้า

ภาพที่

3.15 วงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลาที่สร้างเสร็จแล้ว 30

3.16 การต่อสายสัญญาณควบคุมเข้ากับกล่องต่อสายโทรศัพท์ 30

3.17 ชุดอุปกรณ์จับเวลา 31

3.18 การจัดอุปกรณ์การทดลองเพื่อยืนยันสมบัติทอตโทโครนของไซคลอยด์ 31

3.19 การวางลูกตุ้มบนรางไซคลอยด์ในการทดลองเพื่อยืนยันสมบัติทอตโทโครน ของไซคลอยด์ 32

3.20 การจัดอุปกรณ์การทดลองเพื่อวัดคาบของการแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม 33

3.21 การดึงลูกตุ้มเพื่อให้เชือกผูกลูกตุ้มแนบไปตามครึ่งโค้งไซคลอยด์ก่อนปล่อยให้แกว่ง 34

3.22 การจัดอุปกรณ์การทดลองเพื่อวัดคาบของการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม 34

3.23 การดึงลูกตุ้มเพื่อให้เชือกเอียงทำมุมกับแนวดิ่งก่อนปล่อยให้แกว่ง 35

3.24 การจัดอุปกรณ์การทดลองเพื่อจับเวลาในการเคลื่อนที่ระหว่าง 2 ตำแหน่ง บนรางไซคลอยด์ 36

3.25 การวางลูกตุ้มที่ตำแหน่งเริ่มต้นในการทดลองเพื่อจับเวลาในการเคลื่อนที่ ระหว่าง 2 ตำแหน่ง บนรางไซคลอยด์ 36

3.26 การปรับความเอียงของรางตรงเพื่อให้ได้เส้นทางที่ผ่านตำแหน่ง 2 ตำแหน่ง คู่เดียวกัน กับ 2 ตำแหน่งบนรางไซคลอยด์ 37

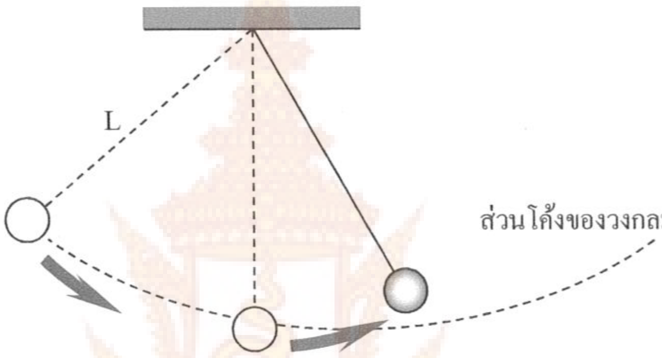
3.27 การจัดอุปกรณ์การทดลองเพื่อจับเวลาในการเคลื่อนที่ระหว่าง 2 ตำแหน่ง บนรางตรง 38

บทที่ 1

บทนำ

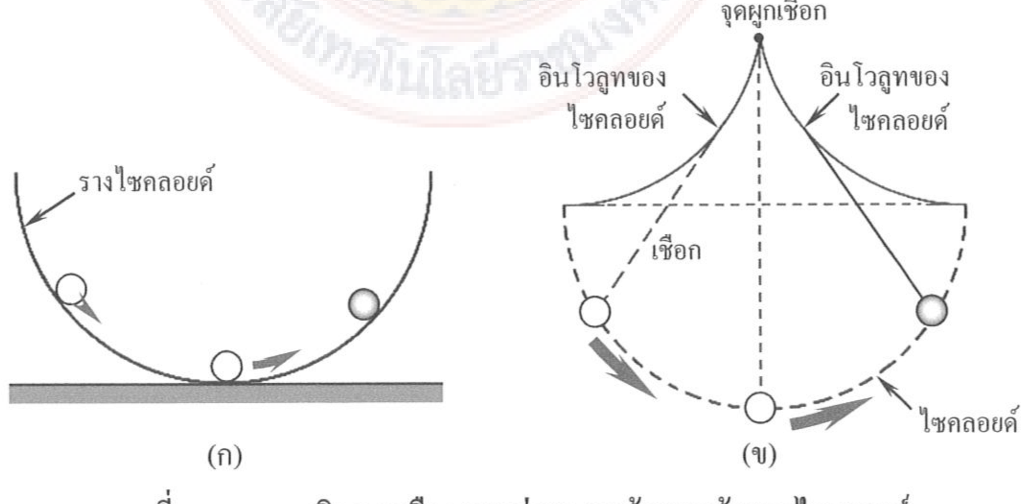
1.1 ความสำคัญของปัญหา

เมื่อกล่าวถึงการแกว่งหรือการออสซิลเลตของลูกตุ้มภายใต้การกระทำของแรงโน้มถ่วงของโลก โดยทั่วไปมักจะนึกถึงการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม ซึ่งลูกตุ้มจะแกว่งไปตามเส้นทางที่เป็นส่วนโค้งของวงกลมที่มีความยาวเชือกเป็นรัศมี ดังภาพที่ 1.1



ภาพที่ 1.1 การแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม

แต่ความจริงยังมีเส้นทางในการแกว่งหรือการออสซิลเลตของลูกตุ้มอีกแบบหนึ่ง คือ **เส้นทางไซคลอยด์** โดยการแกว่งหรือการออสซิเลตของลูกตุ้มตามเส้นทางไซคลอยด์มี 2 ลักษณะ คือ การออสซิลเลตบนรางไซคลอยด์ ดังภาพที่ 1.2 (ก) และไซคลอยดัล เพนดูลัม ซึ่งเป็นการแกว่งของลูกตุ้ม โดยเชือกที่ผูกลูกตุ้มจะแนบกับทางโค้งที่เป็นอินโวลูทของไซคลอยด์ (Involute of cycloid) ที่ตำแหน่งไกลสุดของการแกว่ง ดังภาพที่ 1.2 (ข)



ภาพที่ 1.2 การออสซิลเลตหรือการแกว่งของลูกตุ้มตามเส้นทางไซคลอยด์

การศึกษาครั้งนี้จึงช่วยให้เข้าใจการแกว่งของลูกตุ้มในแง่มุมที่กว้างขึ้น โดยศึกษาเปรียบเทียบการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม กับการแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม ที่มีความยาวเชือกเท่ากัน และทำการทดลองเพื่อยืนยันสมบัติทอตโทโครนและสมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์ โดยเฉพาะการทดลองเพื่อยืนยันสมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์ได้แสดงให้เห็นว่าในการเคลื่อนที่ระหว่างจุดต้นและจุดปลายคู่เดียวกัน ทรงกลมที่กลิ้งลงมาตามเส้นทางไซคลอยด์จะเอาชนะทรงกลมที่เหมือนกันทุกประการซึ่งกลิ้งไปตามเส้นทางตรงได้เสมอ โดยที่จุดปลายของการเคลื่อนที่ไม่จำเป็นต้องอยู่ที่จุดต่ำสุดของไซคลอยด์ อย่างที่เข้าใจ (ผิด) กันโดยทั่วไป

การศึกษาครั้งนี้ยังช่วยให้พิจารณาได้ว่านาฬิกาจับเวลาที่ใช้ในการทดลองควรวัดได้ละเอียดเท่าใด (1 ใน 100 หรือ 1 ใน 500 หรือ 1 ใน 1,000 ของวินาที) จึงเพียงพอที่จะยืนยันผลการทดลองได้ และเพียงพอ ที่จะให้ค่าท้องถิ่นของค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ที่ใกล้เคียงกับค่ามาตรฐานมากที่สุด โดยค่าท้องถิ่นของค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกได้จากการศึกษาการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม และการแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อสร้างชุดทดลองการแกว่งของลูกตุ้มและโฟโตเกตพร้อมวงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลา

1.2.2 เพื่อศึกษาสมบัติทอตโทโครนและสมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์

1.2.3 เพื่อศึกษาเปรียบเทียบคาบของการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม กับการแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม ที่มีความยาวเชือกเท่ากัน

1.2.4 เพื่อหาค่าท้องถิ่นของความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ณ สถานที่ทำการทดลอง

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

การวิจัยนี้ประกอบด้วยงาน 3 ส่วน คือ

1.3.1 การสร้างรางโค้งไซคลอยด์ รางตรงปรับความเอียงได้ แบบจำลองฮอยเกนส์เพนดูลัม

1.3.2 การสร้างโฟโตเกตและวงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลา

1.3.3 ศึกษาการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม การแกว่งแบบไซคลอยด์ เพนดูลัม และการออสซิลเลตของลูกตุ้มบนทางโค้งไซคลอยด์

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ได้ชุดทดลองการแกว่งของลูกตุ้มไว้ใช้ในการเรียนการสอนปฏิบัติการทางฟิสิกส์

1.4.2 ได้อุปกรณ์จับเวลาที่จับเวลาได้ละเอียดถึงมิลลิวินาที

1.4.3 ยืนยันสมบัติทอตโทโครนและบราคิสโทโครนของไซคลอยด์จากการทดลอง

1.4.4 ได้ค่าท้องถิ่นของความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก เพื่อใช้เป็นค่าอ้างอิงของค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่ได้จากการทดลองในห้องปฏิบัติการของมหาวิทยาลัย

บทที่ 2

ทบทวนวรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

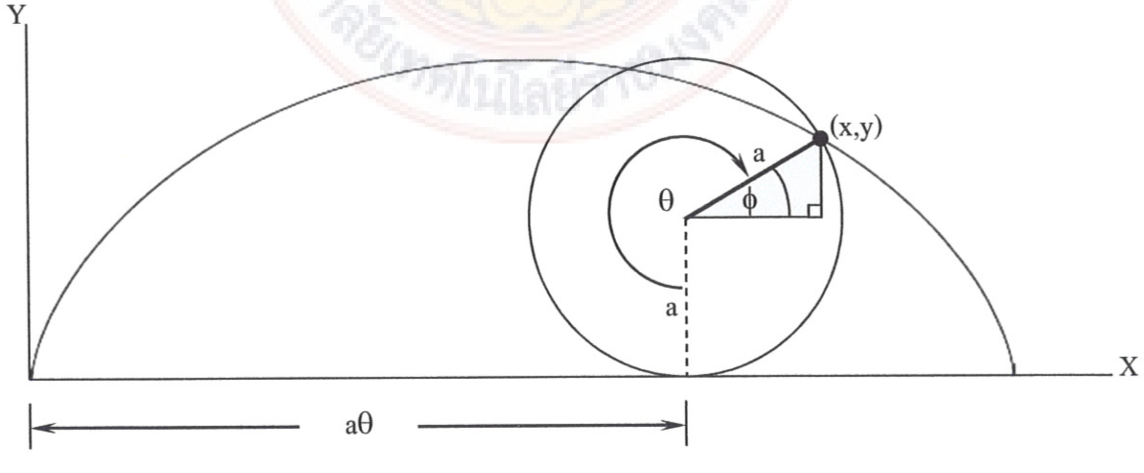
2.1 สมการของทางโค้งไซคลอยด์

ทางโค้งไซคลอยด์เป็นเส้นโค้งซึ่งเป็นเส้นทางการเคลื่อนที่ของจุดจุดหนึ่งบนเส้นรอบวงของวงกลมที่กลิ้งไปบนทางราบ โดยไม่ลื่นไถล อย่างเช่น เส้นทางการเคลื่อนที่ของไดโอดเปล่งแสงซึ่งติดไว้ที่ขอบยางของล้อรถยนต์ ขณะที่รถยนต์กำลังเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงบนถนนราบ ดังภาพที่ 2.1

ที่มา: flickr.com, cycloid

ภาพที่ 2.1 ทางโค้งไซคลอยด์

ถ้ารัศมีของวงกลมที่กลิ้งไปบนทางราบเป็น a ขณะที่จุดจุดหนึ่งบนวงกลมหมุนไปเป็นมุม θ จากตำแหน่งเริ่มต้น เนื่องจากไม่มีการลื่นไถล จุดศูนย์กลางของวงกลมจะเคลื่อนที่ไปเป็นระยะ $a\theta$ ซึ่งมีค่าเท่ากับส่วนโค้งของวงกลมที่จุดบนวงกลมเคลื่อนที่ไป ดังภาพที่ 2.2



ภาพที่ 2.2 ตำแหน่งของจุดบนทางโค้งไซคลอยด์ขณะเวลาใด ๆ

ถ้าขณะนั้นจุดบนวงกลมอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y) ใด ๆ บนทางโค้งไซคลอยด์ จากภาพที่ 2.2 จะพิจารณาได้ว่า

$$x = a\theta + a\cos\phi \quad \text{และ} \quad y = a + a\sin\phi$$

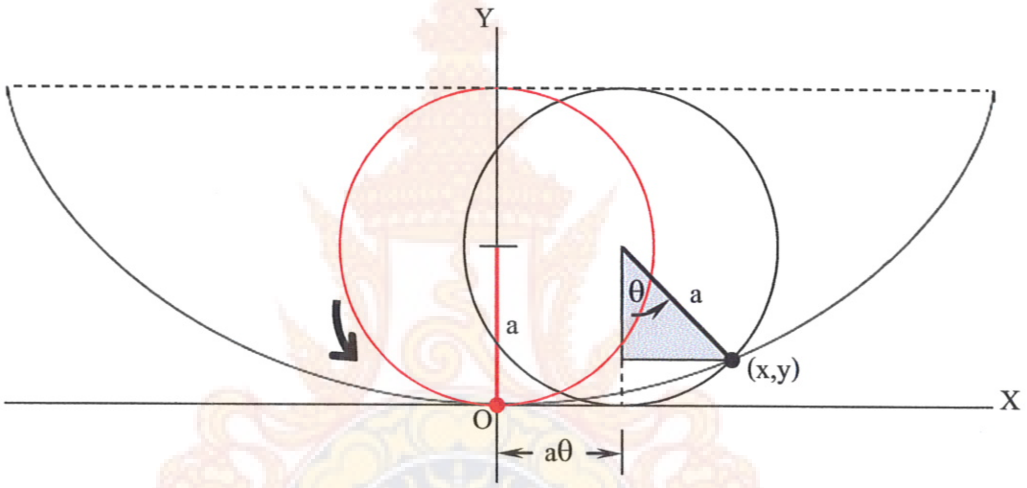
โดยที่ $\phi = \dfrac{3\pi}{2} - \theta$ จึงได้

$$x = a\theta + a\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = a\theta + a(-\sin\theta) \quad \text{และ} \quad y = a + a\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = a + a(-\cos\theta)$$

ดังนั้น $$x = a(\theta - \sin\theta) \quad \text{และ} \quad y = a(1 - \cos\theta) \qquad (1)$$

สมการ (1) เรียกว่า**สมการไซคลอยด์กรณีปกติ** (Ordinary case cycloid)

พิจารณาทางโค้งไซคลอยด์ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด (Cycloid, vertex at origin) ดังภาพที่ 2.3



ภาพที่ 2.3 ทางโค้งไซคลอยด์ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

เมื่อวงกลมหมุนไปเป็นมุม θ จากจุดกำเนิด จุดศูนย์กลางของวงกลมจะเคลื่อนที่ไปเป็นระยะ aθ ตามแนวราบ และขณะนั้นจุดบนวงกลมซึ่งเดิมอยู่ที่จุดกำเนิด อยู่ห่าง x ตามแนวราบและอยู่สูง y ตามแนวดิ่ง จากจุดกำเนิด จากภาพที่ 2.3 จะพิจารณาได้ว่า

$$x = a\theta + a\sin\theta \quad \text{และ} \quad y = a - a\cos\theta$$

โดยที่จุดบนวงกลมเป็นจุดใด ๆ บนทางโค้งไซคลอยด์ จึงได้**สมการไซคลอยด์กรณีที่จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดเป็น**

$$x = a(\theta + \sin\theta) \quad \text{และ} \quad y = a(1 - \cos\theta) \qquad (2)$$

2.2. สมบัติทอตโทโครนของไซคลอยด์

ทอตโทโครน (Tautochrone) มาจากภาษากรีกโดยมาจากคำว่า *tpauto* (tauto) ซึ่งแปลว่า เท่ากัน (same or isos) และคำว่า $\chi\rho o\nu o\varsigma$ (5hromos) ซึ่งแปลว่า เวลา (time)

ไซคลอยด์มีสมบัติทอตโทโครนเนื่องจากวัตถุที่ไถลจากหยุดนิ่งไปตามทางโค้งไซคลอยด์ซึ่งไม่มีความเสียดทาน ไม่ว่าตำแหน่งเริ่มต้นของวัตถุจะอยู่ที่ตำแหน่งใดบนเส้นโค้ง วัตถุจะเคลื่อนที่ลงไปถึงตำแหน่งต่ำสุดพร้อมกัน โดยฮอยเกนส์ (Christiaan Huygens) นับเป็นคนแรกที่ค้นพบสมบัติทอตโทโครนของไซคลอยด์โดยได้ตีพิมพ์การค้นพบนี้ใน Horologium oscillatorium เมื่อปี พ.ศ. 2216

สมบัติทอตโทโครนของไซคลอยด์พิสูจน์ได้ดังนี้

จากสมการไซคลอยด์กรณีปกติ คือ $x = a(\theta - \sin\theta)$ และ $y = a(1-\cos\theta)$

เมื่อหาค่าอนุพันธ์เทียบกับ θ จะได้

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta) \quad \text{และ} \quad \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

จึงได้ $$dx = a(1-\cos\theta)d\theta \quad \text{และ} \quad dy = a\sin\theta d\theta$$

ยกกำลังสองแล้วนำมาบวกกัน จะได้

$$dx^2 + dy^2 = a^2[(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)+\sin^2\theta]d\theta^2$$

จึงได้ $$dx^2 + dy^2 = 2a^2(1-\cos\theta)\,d\theta^2 \tag{3}$$

จากกฎการอนุรักษ์ของพลังงานกล ถ้าวัตถุเริ่มไถลจากตำแหน่งที่อยู่สูง y จากตำแหน่งต่ำสุด และวัตถุมีอัตราเร็วเป็น v เมื่อไถลลงมาถึงตำแหน่งต่ำสุด จะได้

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

จึงได้ $$v = \sqrt{2gy}$$

จาก $v = \dfrac{ds}{dt}$ จะได้ $dt = \dfrac{ds}{v}$

จึงได้ $$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} \tag{4}$$

เมื่อ ds เป็นระยะทางสั้น ๆ ที่วัดไปตามโค้งไซคลอยด์ซึ่งเป็นเส้นทางการเคลื่อนที่

โดยที่ $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{5}$$

จากสมการ (3) และสมการ (5) จะได้ $ds = a\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta$

จากสมการ (4) จะได้

$$dt = \frac{a\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta}{\sqrt{2gy}}$$

โดยที่ $y = a(1-\cos\theta)$ จึงได้

$$dt = \frac{a\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta}{\sqrt{2ga(1-\cos\theta)}}$$

และ $$dt = \sqrt{\frac{a}{g}}\,d\theta \tag{6}$$

ดังนั้นเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่จากจุดสูงสุดไปยังจุดต่ำสุดของไซคลอยด์จึงมีค่าเป็น

$$t=\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{0}^{\pi}d\theta=\sqrt{\frac{a}{g}}\,\pi \qquad (7)$$

ถ้าเริ่มเคลื่อนที่จากจุดซึ่งอยู่ระหว่างจุดสูงสุดกับจุดต่ำสุด ซึ่งมีตำแหน่งเชิงมุมเป็น θ_0 อัตราเร็วที่ตำแหน่งใด ๆ จะมีค่าเป็น

$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{2g(y-y_0)} \qquad (8)$$

โดยที่ $y-y_0=a(1-\cos\theta)-a(1-\cos\theta_0)=a(\cos\theta_0-\cos\theta)$

ดังนั้น $$t=\int_{\theta_0}^{\pi}\sqrt{\frac{2a^2(1-\cos\theta)}{2ag(\cos\theta_0-\cos\theta)}}\,d\theta$$

หรือ $$t=\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0-\cos\theta}}\,d\theta \qquad (9)$$

เนื่องจาก $\cos\theta=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}$ และ $\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}=1$

จึงได้ $\cos\theta=1-\sin^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=1-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

หรือ $\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1$

ดังนั้น $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$

และ $\cos\theta_0-\cos\theta=2\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)-1-2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+1=2\left[\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

จึงได้ $$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0-\cos\theta}}=\sqrt{\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2[\cos^2(\theta_0/2)-\cos^2\theta]}}=\frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{\cos^2(\theta_0/2)-\cos^2(\theta/2)}}$$

จากสมการ (9) จะได้

$$t=\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{\cos^2(\theta_0/2)-\cos^2(\theta/2)}}\,d\theta \qquad (10)$$

เปลี่ยนตัวแปรเป็น

$$u=\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta_0}$$

เมื่อหาค่าอนุพันธ์จะได้

$$du=-\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta_0/2)}\,d\theta$$

ดังนั้น $\sin(\theta/2)d\theta=-2\cos(\theta_0/2)du$

จากสมการ (10) จึงได้ $$t=\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{0}^{\pi}\frac{-2\cos(\theta_0/2)}{\sqrt{\cos^2(\theta_0/2)-\cos^2(\theta/2)}}\,du$$

$$= -2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\pi}\frac{du}{\sqrt{1-\{[\cos^2(\theta/2)]/[\cos^2(\theta_0/2)]\}}}$$

$$= -2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_1^{0}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -2\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\sin^{-1}u\right)_1^0$$

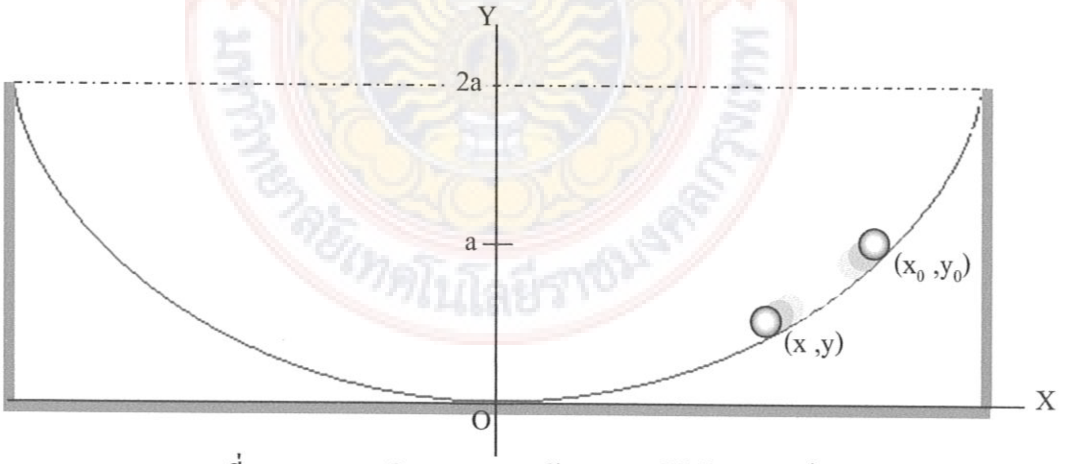
และ $$t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

วัตถุจึงใช้เวลาในการเคลื่อนที่เท่ากันไม่ว่าจะเริ่มเคลื่อนที่ลงมาจากจุดใดมายังจุดต่ำสุด กล่าวคือ วัตถุใช้เวลาเท่ากันในการเคลื่อนที่บนทางโค้งไซคลอยด์ช่วงยาวและช่วงสั้น

ด้วยเหตุนี้วัตถุ 2 ชิ้น ที่วางไว้คนละด้านของจุดต่ำสุดบนโค้งไซคลอยด์ที่ไม่มีความเสียดทาน เมื่อปล่อยให้ไถลลงมาพร้อมกัน วัตถุทั้งสองจะกระทบกันที่จุดต่ำสุดของโค้งไซคลอยด์เสมอ ไม่ว่าวัตถุชิ้นหนึ่งจะเริ่มต้นเคลื่อนที่จากตำแหน่งใกล้ตำแหน่งต่ำสุดมากกว่าหรือน้อยกว่าวัตถุอีกชิ้นหนึ่งเท่าใด

นอกจากนี้ลูกตุ้มที่กำลังออสซิลเลต (ไถลไปมา) รอบจุดต่ำสุดบนโค้งไซคลอยด์ที่ไม่มีความเสียดทาน จะมีคาบของการออสซิลเลตเท่าเดิม ไม่ว่าจุดเริ่มต้นปล่อยให้ลูกตุ้มเคลื่อนที่อยู่ห่างจากจุดต่ำสุดเท่าใด กล่าวคือ คาบของการออสซิลเลตของลูกตุ้มบนโค้งไซคลอยด์ที่ไม่มีความเสียดทานไม่ขึ้นกับแอมพลิจูดของการออสซิลเลต ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

พิจารณาลูกตุ้มมวล m ที่กำลังออสซิลเลตบนทางโค้งไซคลอยด์ ถ้าลูกตุ้มเริ่มต้นออสซิลเลตจากตำแหน่ง (x_0, y_0) ลงมายังตำแหน่ง (x, y) ขณะที่ลูกตุ้มอยู่ที่ตำแหน่ง (x, y) ดังภาพที่ 2.4



ภาพที่ 2.4 การออสซิลเลตของลูกตุ้มบนทางโค้งไซคลอยด์

จากสมการไซคลอยด์กรณีที่จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด คือ $x = a(\theta + \sin\theta)$ และ $y = a(1-\cos\theta)$ เมื่อหาค่าอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้

$$\dot{x} = a(\dot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}) = a(1+\cos\theta)\dot{\theta} \quad \text{และ} \quad \dot{y} = a(0+\sin\theta\dot{\theta}) = a\sin\theta\dot{\theta}$$

ยกกำลังสอง จะได้

$$\dot{x}^2 = a^2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\dot{\theta}^2 \quad \text{และ} \quad \dot{y}^2 = a^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2$$

จากกฎการอนุรักษ์ของพลังงานกล เมื่อพิจารณาพลังงานรวมที่ตำแหน่ง (x_0 , y_0) และตำแหน่ง (x , y) โดยให้จุดยอดของทางโค้งไซคลอยด์เป็นจุดอ้างอิงศูนย์สำหรับพลังงานศักย์โน้มถ่วง จะได้

$$mgy_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \quad \text{หรือ} \quad gy_0 = \frac{v^2}{2} + gy \quad \text{และ} \quad g(y_0 - y) = \frac{1}{2}v^2$$

โดยที่ $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ จึงได้ $g(y_0 - y) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

เมื่อแทนค่า $y_0 = a(1-\cos\theta_0), y, \dot{x}^2, \dot{y}^2$ จะได้

$$ga(1-\cos\theta_0 - 1 + \cos\theta) = \frac{a^2}{2}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 = \frac{a^2}{2}(2+2\cos\theta)\dot{\theta}^2$$

จึงได้

$$ga(\cos\theta - \cos\theta_0) = a^2(1+\cos\theta)\dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{a}\frac{(\cos\theta - \cos\theta_0)}{(1+\cos\theta)} \quad \text{และ} \quad \dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{\cos\theta - \cos\theta_0}{1+\cos\theta}}$$

หรือ

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{\cos\theta - \cos\theta_0}{1+\cos\theta}} \quad \text{และ} \quad \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta = \sqrt{\frac{g}{a}}\ dt$$

เนื่องจาก $\cos\theta = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2} - \left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right) = \left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) - 1$

จึงได้ $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

และ $\cos\theta - \cos\theta_0 = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 - 2\cos^2\frac{\theta_0}{2} + 1 = 2\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta_0}{2}\right)$

แทนค่า $1+\cos\theta$ และ $\cos\theta - \cos\theta_0$ ลงในสมการ $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,d\theta = \sqrt{\frac{g}{a}}\ dt$ จะได้

$$\sqrt{\frac{2\cos^2(\theta/2)}{2\,[\cos^2(\theta/2) - \cos^2(\theta_0/2)]}}\ d\theta = \sqrt{\frac{g}{a}}\ dt$$

และ

$$\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{\cos^2(\theta/2) - \cos^2(\theta_0/2)}}\ d\theta = \sqrt{\frac{g}{a}}\ dt$$

เนื่องจาก $\cos(\theta/2)\,d\theta = 2\,d[\sin(\theta/2)]$

และ $\cos^2(\theta/2) - \cos^2(\theta_0/2) = 1 - \sin^2(\theta/2) - 1 + \sin^2(\theta_0/2) = \sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)$

จึงได้

$$\frac{2\,d\sin(\theta/2)}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} = \sqrt{\frac{g}{a}}\ dt$$

อินติเกรทโดยเริ่มจับเวลาในการออสซิลเลตจากจุดยอดของทางโค้งไซคลอยด์ ($\theta = 0$) ไปยังตำแหน่งไกลสุดของการออสซิลเลต ซึ่งในกรณีนี้คือตำแหน่งเริ่มต้นของการออสซิลเลต ($\theta = \theta_0$) ทั้งนี้เพื่อให้ θ เปลี่ยนแปลงในลักษณะที่มีค่าเพิ่มขึ้น ($d\theta$ เป็นบวก) โดยที่เวลาในการออสซิลเลตระหว่าง 2 ตำแหน่งดังกล่าวมีค่าเป็น 1 ใน 4 ของคาบของการออสซิลเลต จึงได้

$$2\int_0^{\theta_0} \frac{d\sin(\theta/2)}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} = \sqrt{\frac{g}{a}} \int_0^{T/4} dt = \sqrt{\frac{g}{a}}\left(\frac{T}{4}\right)$$

โดยที่ $\int \frac{du}{\sqrt{b^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{b}\right) + C$ จึงได้

$$\sqrt{\frac{g}{a}}\left(\frac{T}{4}\right) = 2\sin^{-1}\left(\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}\right)_0^{\theta_0} = 2\sin^{-1}(1) = 2(\pi/2) = \pi$$

ดังนั้น

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}} \tag{11}$$

จากสมการ (11) จะพิจารณาได้ว่าคาบของการออสซิลเลตของลูกตุ้มบนทางโค้งไซคลอยด์ไม่ขึ้นกับแอมพลิจูดของการออสซิลเลต

ถ้าเปลี่ยนจากการไถลไปเป็นการกลิ้งโดยไม่มีการไถลบนทางโค้งไซคลอยด์ เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่จะเพิ่มขึ้นเนื่องจากมีการสูญเสียพลังงานจากการกลิ้งด้วย

เนื่องจากพลังงานจลน์ในการกลิ้งมีค่าเป็น $\frac{1}{2}I\omega^2$

เมื่อ I แทนโมเมนต์ของความเฉื่อย และ ω แทนอัตราเร็วเชิงมุมในการกลิ้ง

จากกฎการอนุรักษ์ของพลังงานกล จึงได้

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

โดยที่ $v = \omega r$ เมื่อ r แทนรัศมีของลูกตุ้ม (ทรงกลมตัน) และ $I = kmr^2$ เมื่อ k แทนค่าคงที่

จึงได้

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(kmr^2)\left(\frac{v^2}{r^2}\right) = \frac{1}{2}mv^2(1+k)$$

ดังนั้น

$$v = \sqrt{\frac{2gy}{1+k}} = \sqrt{2g*y} \tag{12}$$

ส่วนการคำนวณหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ลงมาถึงจุดต่ำสุดและคาบในการออสซิลเลต เมื่อการเคลื่อนที่เป็นแบบกลิ้งโดยไม่มีการไถลก็ดำเนินการแบบเดียวกับการเคลื่อนที่แบบไถลโดยไม่มีการกลิ้ง เพียงแต่แทน g ด้วย $g*$ เท่านั้น

คาบของการออสซิลเลตของลูกตุ้มบนทางโค้งไซคลอยด์ เมื่อลูกตุ้มเคลื่อนที่แบบกลิ้งโดยไม่มีการไถลจึงมีค่าเป็น

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g^*}} \tag{13}$$

เมื่อ $g* = \frac{g}{1+k}$ และ k = 0.4 สำหรับทรงกลมตัน

2.3 ซิมเปิล เพนดูลัม และไซคลอยดัล เพนดูลัม

การแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม ลูกตุ้มจะแกว่งไปตามเส้นทางที่เป็นส่วนโค้งของวงกลมที่มีความยาวเชือกเป็นรัศมี เมื่อแอมพลิจูดของการแกว่งเป็นมุมเล็ก ๆ ($< 5^\circ$) จะเป็นการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก โดยคาบในการแกว่งมีค่าเป็น

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{14}$$

ซึ่งขึ้นกับความยาวเชือกเท่านั้น ไม่ขึ้นกับมวลของลูกตุ้มและแอมพลิจูดของการแกว่ง

เมื่อแอมพลิจูดของการแกว่งเป็นมุมโตขึ้น แต่ไม่มากนัก คาบในการแกว่งไม่ขึ้นกับมวลของลูกตุ้ม แต่ขึ้นกับความยาวเชือกและแอมพลิจูดของการแกว่ง โดยมีค่าตามสมการ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) \tag{15}$$

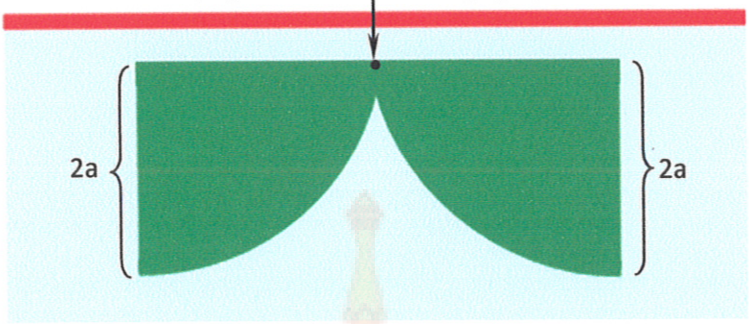
เมื่อ θ_0 มีหน่วยเป็นเรเดียน

การแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม จึงไม่เป็นไอโซโครนัส (Isochronous) แท้จริง (ไอโซโครนัสมาจากคำว่า isos และ chronos ในภาษากรีก โดย isos แปลว่า เท่ากัน และ chronos แปลว่า เวลา) เพราะคาบของการแกว่งเพิ่มขึ้นตามแอมพลิจูดในการแกว่ง

ส่วนการแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม ลูกตุ้มจะแกว่งไปตามเส้นทางที่เป็นไซคลอยด์ จากสมบัติทอตโทโครนของไซคลอยด์ คาบของการแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม จึงมีค่าคงที่ (เท่ากัน) ไม่ว่าแอมพลิจูดของการแกว่งจะเป็นเท่าใด การแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม จึงเป็นไอโซโครนัสแท้จริงหรือเป็นไอโซโครนัสสมบูรณ์แบบ

ลูกตุ้มจะแกว่งไปตามเส้นทางไซคลอยด์ได้ต้องวางเงื่อนไขเส้นทางการเคลื่อนที่ให้กับลูกตุ้ม โดยให้เชือกที่ผูกลูกตุ้มวางตัวบนโปรไฟล์ (Profile) ที่เหมือนกัน 2 โปรไฟล์ จากความรู้ทางคณิตศาสตร์พบว่าโปรไฟล์นี้ต้องมีอินโวลูท (Involute) เป็นไซคลอยด์ และน่าประหลาดที่อินโวลูทของไซคลอยด์เป็นไซคลอยด์เช่นกัน โปรไฟล์ที่ให้เชือกที่ผูกลูกตุ้มวางตัวเพื่อบังคับให้ลูกตุ้มแกว่งไปตามเส้นทางไซคลอยด์ จึงเป็นส่วนโค้งไซคลอยด์ 2 ไซคลอยด์ (ส่วนใหญ่เป็นครึ่งโค้งไซคลอยด์) ที่

ประกอบกันเป็นโค้งยอดแหลม โดยปลายบนของเชือกผูกลูกตุ้มผูกไว้ที่จุดยอดของโค้งยอดแหลม ดังภาพที่ 2.5



ภาพที่ 2.5 โปรไฟล์ที่ให้เชือกที่ผูกลูกตุ้มวางตัวเพื่อบังคับให้ลูกตุ้มแกว่งไปตามเส้นทางไซคลอยด์

การแกว่งแบบไซคลอยด์ เพนดูลัม ลูกตุ้มเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางไซคลอยด์เช่นเดียวกับการออสซิลเลตของลูกตุ้มบนรางไซคลอยด์ คาบของการแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม จึงมีค่าเป็น $T = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$ เช่นกัน (เมื่อ a แทนรัศมีของวงกลมที่เป็นต้นกำเนิดไซคลอยด์) ถ้าเชือกที่ผูกลูกตุ้มยาว 4a เมื่อแกว่งอยู่ระหว่างโปรไฟล์รูปโค้งยอดแหลมที่ประกอบขึ้นจากครึ่งโค้งไซคลอยด์ 2 โค้ง ที่มีความสูง 2a คาบของการแกว่งจะมีค่าเท่ากับคาบของการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม เมื่อแอมพลิจูดของการแกว่งเป็นมุมเล็ก ๆ ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก

2.4 สมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์

บราคิสโทโครน (Brachistochrone) มาจากภาษากรีกโดยมาจากคำว่า $\beta\rho\alpha\chi\sigma\tau o\varsigma$ (brachistos) ซึ่งแปลว่า สั้นที่สุด (the shortest) และคำว่า $\chi\rho o\nu o\varsigma$ (chronos) ซึ่งแปลว่า เวลา (time)

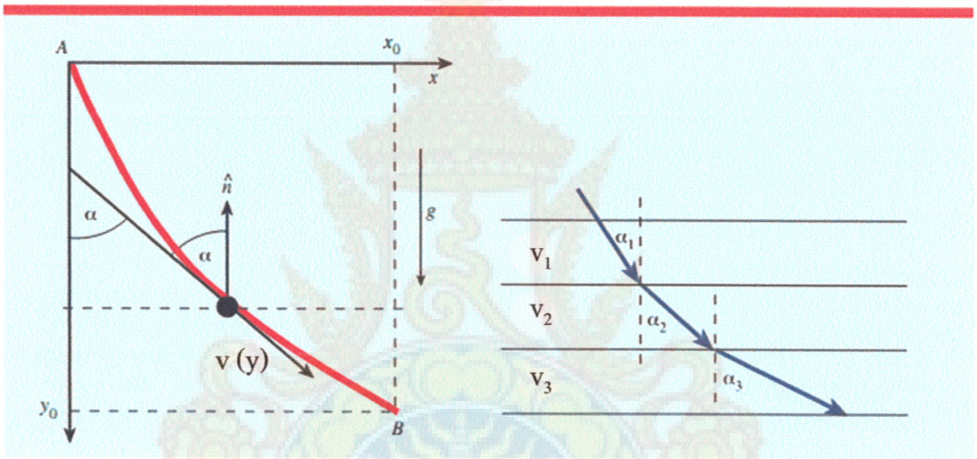
ไซคลอยด์มีสมบัติบราคิสโทโครนเนื่องจากในการเคลื่อนที่ระหว่าง 2 จุดใด ๆ ในระนาบแนวดิ่งไปตามเส้นทางรูปร่างต่าง ๆ ที่เชื่อมต่อระหว่าง 2 จุด นั้น ๆ การเคลื่อนที่ตามเส้นทางไซคลอยด์จะใช้เวลาน้อยที่สุด

การพิสูจน์สมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์อาจพิสูจน์โดยใช้หลักของแฟร์มาต์ (Fermat's principle) หรือแคลคูลัสของความแปรผัน (Calculus of variation) ดังนี้

1. การพิสูจน์ด้วยหลักของแฟร์มาต์

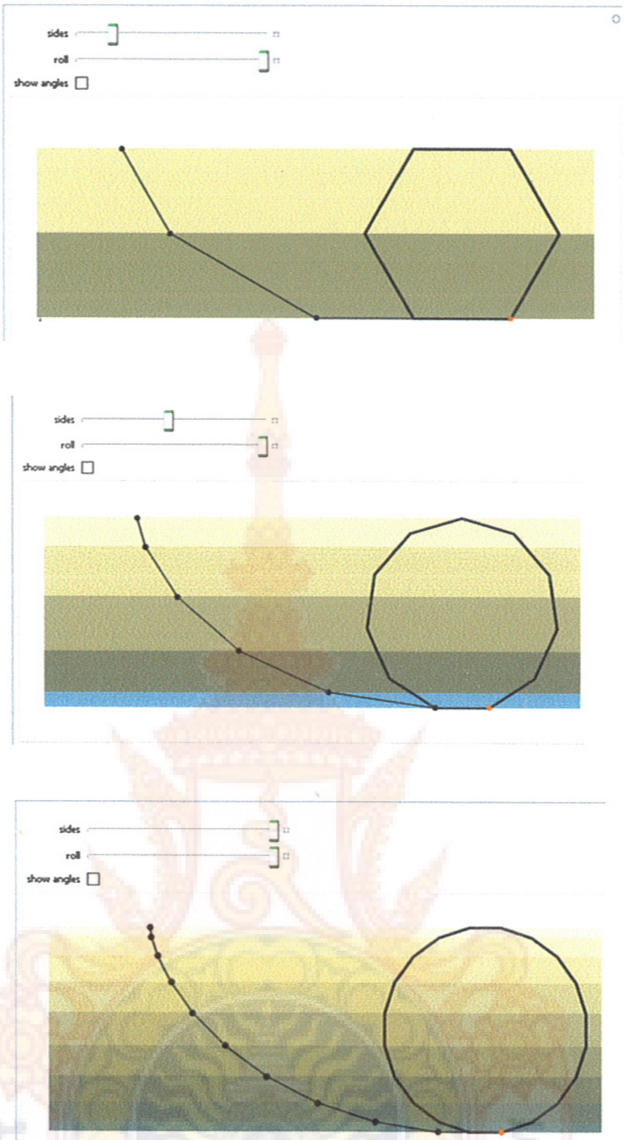
ถ้าอนุภาคไถลจากจุด A (0,0) ไปยังจุด B (x_0, y_0) ตามเส้นทางซึ่งใช้เวลาในการเคลื่อนที่น้อยที่สุด ดังภาพที่ 8 (ก) เส้นทางนี้จะได้รับการยืนยันว่าเป็นเส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุด ถ้าเป็น

เส้นทางการเคลื่อนที่ของรังสีแสงจากจุด A ไปยังจุด B เนื่องจากตามหลักของแฟร์มาต์ **แสงจะเดินทางไปตามเส้นทางซึ่งใช้เวลาน้อยที่สุด** ความเร็วในการเคลื่อนที่ของอนุภาคเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งต่าง ๆ บนเส้นทางการเคลื่อนที่โดยความเร็วที่ตำแหน่งใดจะอยู่ในแนวเส้นสัมผัสเส้นทางการเคลื่อนที่ที่ตำแหน่งนั้น ดังแสดงไว้ในภาพที่ 2.6 (ก) ขณะที่ความเร็วแสงมีค่าคงที่และเดินทางเป็นเส้นตรงในตัวกลางที่มีดัชนีหักเหคงที่ค่าหนึ่ง การเชื่อมโยงการเคลื่อนที่ของอนุภาคกับรังสีแสงจึงต้องแบ่งตัวกลางที่แสงเคลื่อนผ่านเป็นระนาบขนานกัน โดยแต่ละระนาบมีค่าดัชนีหักเหต่างกัน ดังภาพที่ 2.6 (ข) ซึ่งกำหนดให้ระนาบด้านบนมีดัชนีหักเหสูงสุด (ความเร็วแสงต่ำสุด) และระนาบด้านล่างมีดัชนีหักเหลดลงไปเป็นลำดับ (ความเร็วแสงเพิ่มขึ้น) ทำให้เกิดความสอดคล้องกันระหว่างความเร็วในการเคลื่อนที่ของอนุภาคกับความเร็วแสง



ภาพที่ 2.6 การเชื่อมโยงการเคลื่อนที่ของอนุภาคกับรังสีแสง

ถ้าระนาบที่แบ่งมีจำนวนมากขึ้น เส้นทางการเคลื่อนที่ของแสงจะเริ่มเป็นเส้นโค้ง ซึ่งพิจารณาได้จากภาพที่ 2.7 โดยเส้นทางการเคลื่อนที่ของแสงจะเป็นไซคลอยด์เมื่อจำนวนระนาบที่แบ่งเป็นอนันต์



ภาพที่ 2.7 เส้นทางการเคลื่อนที่ของแสงเมื่อระนาบที่แบ่งมีจำนวนมากขึ้น

จากกฎของสเนลล์ เมื่อพิจารณาภาพที่ 8 จะได้

$$\sin\alpha_i / v_i = const. \qquad (16)$$

เมื่อระนาบที่แบ่งมีจำนวนมากหรือกรณีที่ระนาบแต่ละชั้นบางมาก α และ v จะเป็นปริมาณที่เปลี่ยนแปลง อย่างต่อเนื่องและขึ้นอยู่กับค่า x และ y จึงได้

$$\sin\alpha_{x,y} / v_{x,y} = const. \qquad (17)$$

ความเร็วของอนุภาคเมื่อเคลื่อนต่ำลงมาเป็นระยะ y มีค่าเป็น $v = \sqrt{2gy}$

ถ้าเลือกให้จุดต่ำสุดอยู่ที่ y = 2R (เมื่อ R แทนรัศมีของวงกลมที่เป็นต้นกำเนิดไซคลอยด์) โดยที่ $\alpha = 90^{\circ}$ ที่ตำแหน่งต่ำสุด จึงได้

$$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{4gR}$$

ค่าคงที่ในสมการ (16) จึงมีค่าเป็น $const. = \sin 90^{\circ} / \sqrt{4gR} = 1/\sqrt{4gR}$

จากสมการ (17) จึงได้

$$v_{x,y} = \sin\alpha_{x,y}\sqrt{4gR} \tag{18}$$

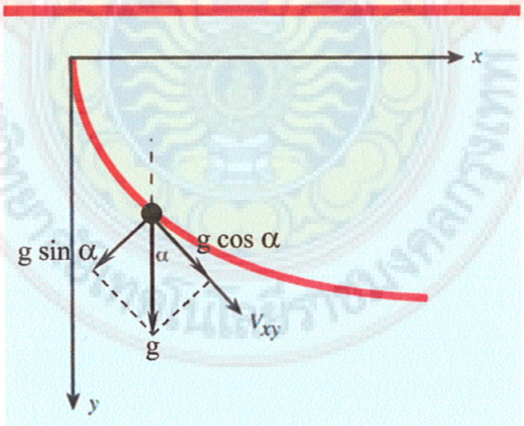
ซึ่งเป็นความเร็วของอนุภาคตามเส้นทางซึ่งรังสีแสงเดินทางจึงเป็นเส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุด

เส้นทางได้มาจากการอินติเกรทความเร็วซึ่งจำเป็นต้องรู้ $\alpha_{x,y}$ ก่อน โดยค่า $\alpha_{x,y}$ มีขั้นตอนในการหาดังนี้

จากสมการ (18) ความเร่งของอนุภาคในแนวเส้นสัมผัสเส้นทางที่จุดใด ๆ มีค่าเป็น

$$a = dv/dt = (d\alpha/dt)\cos\alpha\sqrt{4gR} \tag{19}$$

เนื่องจากความเร็วของอนุภาคที่ตำแหน่งใด ๆ บนเส้นทาง จะอยู่ในแนวเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง ซึ่งเอียงทำมุม α กับแนวดิ่ง ขณะที่ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกอยู่ในแนวดิ่ง ดังภาพที่ 2.8



ภาพที่ 2.8 ความเร็วของอนุภาคที่ตำแหน่งใด ๆ บนเส้นทางการเคลื่อนที่

ความเร่งในแนวเส้นสัมผัสเส้นทางการเคลื่อนที่จึงมีค่าเป็น $a = g\cos\alpha$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (19) จะได้

$$d\alpha/dt = \sqrt{g/4R} = b \tag{20}$$

เมื่อ b เป็นค่าคงที่ ดังนั้น α จึงเพิ่มขึ้นอย่างคงที่ (เชิงเส้น) ตามเวลา กล่าวคือ $\alpha = bt$ เมื่อแทนกลับลงไปในสมการ (18) จะได้

$$v = (4R)b\sin(bt) \tag{21}$$

การอินติเกรทจะง่ายมากถ้าแยกออกเป็นองค์ประกอบ v_x, v_y โดยที่

$$v_x = v\sin\alpha = 4Rb\sin^2(bt) = 2Rb(1-\cos 2bt)$$

และ $$v_y = v\cos\alpha = 2Rb\sin(2bt)$$

เมื่ออินติเกรทและจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$x = R(2\alpha - \sin 2\alpha) \text{ และ } y = R(1-\cos 2\alpha) \tag{22}$$

ซึ่งเป็นสมการพาราเมตริกของไซคลอยด์

2. การพิสูจน์ด้วยแคลคูลัสของการแปรผัน

ถ้าเวลาในการเคลื่อนที่ของอนุภาคจากจุด P_1 ไปยังจุด P_2 กำหนดโดยอินทิกรัล

$$t_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} \tag{23}$$

เมื่อ s เป็นความยาวของส่วนโค้ง และ v เป็นอัตราเร็วที่จุดใด ๆ ซึ่งมีค่าเป็น $v = \sqrt{2gy}$ แทนค่า v ลงในสมการ (23) พร้อมด้วยเอกลักษณ์ $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ จะได้

$$t_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$

ฟังก์ชันที่ต้องแปรผัน (vary) จึงเป็น

$$f = (1+y'^2)^{1/2}(2gy)^{-1/2} \tag{24}$$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ออยเลอร์-ลากรานจ์ (Euler-Lagrange differential equation)

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \tag{25}$$

เนื่องจาก x ไม่ปรากฏชัดแจ้งในฟังก์ชัน $f = (y, y')$ ในสมการ (24) ดังนั้น $\partial f / \partial x = 0$ จึงใช้**เอกลักษณ์เบลทรามี** (Beltrami identity) ได้ ซึ่งได้ผลเป็น

$$f - y'\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = C \tag{26}$$

เมื่อหาอนุพันธ์ย่อยเทียบ y' จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = y'(1+y'^2)^{-1/2}(2gy)^{-1/2} \tag{27}$$

แทนค่า f จากสมการ (24) และค่า $\partial f / \partial y'$ จากสมการ (27) ลงในสมการ (26) แล้วจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}} = C \tag{28}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างและจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] y = \frac{1}{2gC^2} = k^2 \tag{29}$$

เมื่อ k^2 เป็นค่าคงที่

หาคำตอบของสมการนี้ในรูปสมการพาราเมตริก (parametric equations) ได้คำตอบเป็น

$$x = \frac{1}{2} k^2 (\theta - \sin\theta) \tag{30}$$

$$y = \frac{1}{2} k^2 (1 - \cos\theta) \tag{31}$$

ซึ่งคำตอบที่ได้เป็นสมการพาราเมตริกของไซคลอยด์

สมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์เป็นจริงไม่ว่าจุดต้นและจุดปลายของการเคลื่อนที่จะอยู่ที่ตำแหน่งใด ซึ่งเห็นได้จากการพิสูจน์สมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์ด้วยแคลคูลัสของการแปรผัน แต่การพิสูจน์สมบัติบราคิสโทโครนด้วยหลักของแฟร์มาต์อาจทำให้เข้าใจผิดได้ว่าจุดปลายของการเคลื่อนที่อยู่ที่จุดต่ำสุดของไซคลอยด์ ประกอบกับอุปกรณ์ที่ใช้แสดงสมบัติบราคิสโทรโครนของไซคลอยด์ส่วนใหญ่สนับสนุนความเข้าใจผิดนี้โดยเพียงแต่แข่งขันไปยังจุดต่ำสุดของไซคลอยด์เท่านั้น (Dale T. Hoffman; A Cycloid Race) กล่าวคือ อุปกรณ์เหล่านี้ใช้สาธิตว่าทรงกลมที่กลิ้งลงมาตามเส้นทางไซคลอยด์จะเอาชนะทรงกลมที่เหมือนกันทุกประการซึ่งกลิ้งไปตามเส้นทางตรงไปยังจุดต่ำสุดของไซคลอยด์

การศึกษาครั้งนี้จึงแสดงการแข่งขันไปยังจุดอื่น ๆ ตามไซคลอยด์ที่ไม่ใช่จุดต่ำสุด เพื่อยืนยันสมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์และแก้ความเข้าใจผิดนี้

2.5 ค่าท้องถิ่นของค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกในแต่ละพื้นที่หรือค่าท้องถิ่นของค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกมีค่าไม่เท่ากัน โดยเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งที่ตั้ง (เส้นรุ้งและเส้นแวง) ความสูงเหนือระดับน้ำทะเล ของพื้นที่นั้น

หน่วยวัดของความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกหรือค่า g นอกจากวัดเป็น m/s^2 แล้วยังวัดเป็นมิลลิแกล (milligals) และหน่วยความโน้มถ่วง (gravity unit) หรือ จี.ยู. (gu) โดย

1mGal = 0.00001 m/s^2 และ 10 gu = 1 mgal

การวัดค่าท้องถิ่นของความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (Local Gravity) ของแต่ละประเทศปกติจะใช้ IGSN71 Gravity National Base Station เป็นจุดอ้างอิง (Reference Point) โดยอยู่ภายใต้การกำกับดูแลของ the Bureau Gravimetrique Intemational (BGI) ซึ่งเป็นหน่วยงานของประเทศฝรั่งเศส เมื่อปี พ.ศ. 2514 The Intemational Gravity Stendardization Net (IGSN71) ได้ทำการวัดค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง ของโลกในทุกประเทศทั่วโลก และประเทศไทยได้เข้าร่วมทำการวัดด้วยหลายพิกัด แต่ที่ยังใช้การได้อยู่ (active) มีเพียง 2 จุด คือ

(1) Station 06230 A บริเวณกรมแผนที่ทหาร กระทรวงกลาโหม โดยวัดค่า g ได้

978300.07 $\pm$ 0.032 mGal หรือ 9.7830007 $\pm$ 0.032 m/s^2

(2) Station 06230 P บริเวณการท่าเรือแห่งประเทศ-ไทย คลองเตย โดยวัดค่า g ได้

978300.55 $\pm$ 0.035 mGal หรือ 9.7830055 $\pm$ 0.035 m/s^2

ในปี พ.ศ. 2529 บริษัทการบินไทยฯ ได้ขออนุมัติให้กรมแผนที่ทหาร กระทรวงกลาโหม ทำการวัดค่า g บริเวณห้องปฏิบัติการสอบเทียบของฝ่ายช่าง โดยการโยงค่ามาตรฐานจาก Station 06230A และต่อมาในปี พ.ศ. 2542 บริษัทการบินไทยฯ ได้ว่าจ้างสถาบัน British Geological Survey (BGS) แห่งประเทศอังกฤษ (สถาบัน BGS เป็นสถาบันที่ได้รับการยอมรับว่ามีความสามารถในการวัดค่า g จากสถาบันมาตรวิทยาแห่งชาติ National Physical Laboratory แห่งประเทศอังกฤษ) ทำการวัดค่า g โดยการโยงค่ามาตรฐานจาก Station 06230 A ของกรมแผนที่ทหาร และ Station 220 (UK BPGN93) ของประเทศอังกฤษ เพื่อยืนยันค่าอีกครั้งหนึ่ง ผลการวัดค่า g บริเวณห้องปฏิบัติการสอบเทียบของฝ่ายช่างจากทั้งสองสถาบันมีดังนี้

ปี พ.ศ. 2529 กรมแผนที่ทหารวัดค่า g ได้ 978312.96 mgal หรือ 9.7831296 mgal เมื่อโยงจาก Station 06230A)

ปี พ.ศ. 2542 สถาบัน BGS วัดค่า g ได้ 978313.44 mgal $\pm$ 0.05 mgals หรือ 9.7831344 m/s^2 เมื่อโยงจาก Station 06230A)

และวัดค่า g ได้ 978313.65 mgal $\pm$ 0.3 mgals หรือ 9.7831365 m/s^2 เมื่อโยงจาก Station BPGN 93 # 220)

ค่าท้องถิ่นของค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่วัดโดยกรมแผนที่ทหารเป็นที่ยอมรับได้ เมื่อเทียบกับผลการวัดของสถาบัน BGS

ค่า g ที่ได้จากการคำนวณ โดยใช้ตัวแปรสำคัญที่เกี่ยวข้องมาคำนวณด้วย เช่น แนวเหนือ-ใต้ ตำแหน่งที่ตั้ง (เส้นรุ้ง เส้นแวง) ความสูงเหนือระดับน้ำทะเล การหมุนของโลก เป็นวิธีหนึ่งที่ยอมรับเป็นสากล โดยสถาบัน BGS ชี้แจงว่าการหาค่า g จากการคำนวณ โดยใช้ตัวแปรสำคัญที่เกี่ยวข้องมา

สำนักวิทยบริการและเทคโนโลยีสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

คำนวณด้วยสามารถกระทำได้ เพียงแต่ความคลาดเคลื่อนและความไม่แน่นอน (Error and Uncertainty) ของผลที่ได้จะมีค่ามากกว่าการโยงจาก National Base Station ถึง 30-50 ส่วนในล้านส่วน ในทางทฤษฎี ค่า g จะเปลี่ยนแปลงประมาณ 0.004 gu ต่อระยะทาง 10 เมตรในแนวเหนือ-ใต้ และ 0.03086 gu ต่อความสูง 1 เมตร

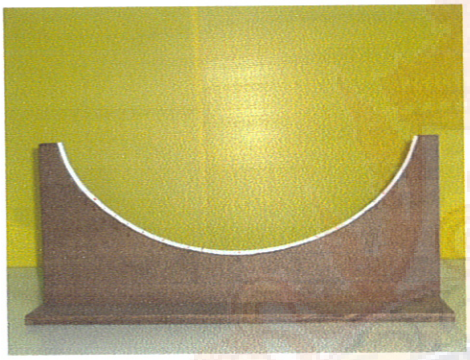
ACM 681.112 ส242ก 2553 ฉ.1
สุจิตต์ ศรีชัย
การพัฒนาการทดลองเรื่องการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกา : รายงานว
32000001006610 1339

บทที่ 3

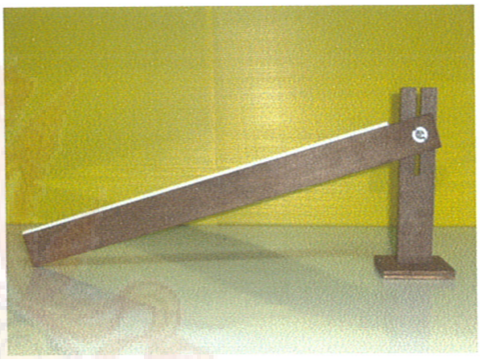
เนื้อหาการวิจัย

3.1 อุปกรณ์และวิธีการดำเนินการวิจัย

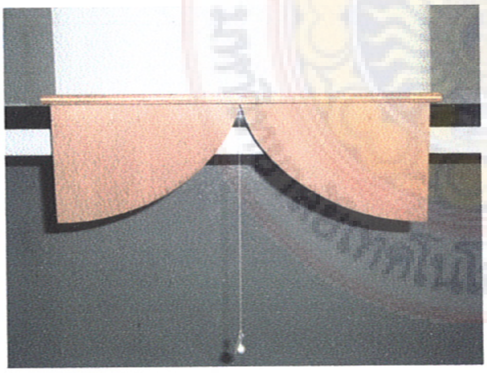
3.1.1 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลอง ประกอบด้วยรางไซคลอยด์ รางตรงปรับความเอียงได้ แบบจำลองฮอยเกนส์ เพนดูลัม โฟโตเกต ดังภาพที่ 3.1 ชุดอุปกรณ์จับเวลา (วงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลาและนาฬิกาจับเวลา) สายโทรศัพท์ ลูกตุ้มโลหะขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 1.5 cm และลูกตุ้มโลหะขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 1.2 cm. ที่มีห่วงสำหรับผูกเชือก ดังภาพที่ 3.2



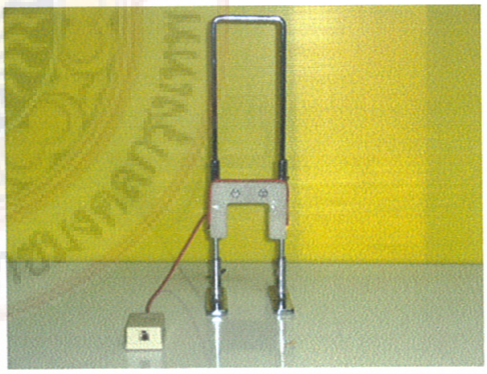
รางไซคลอยด์



รางตรงปรับความเอียงได้

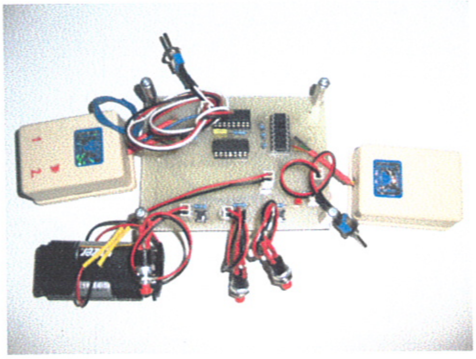


แบบจำลองฮอยเกนส์ เพนดูลัม



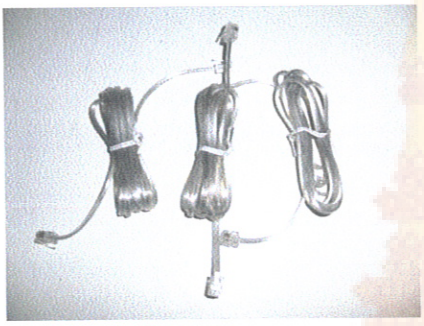
โฟโตเกต

ภาพที่ 3.1 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลอง

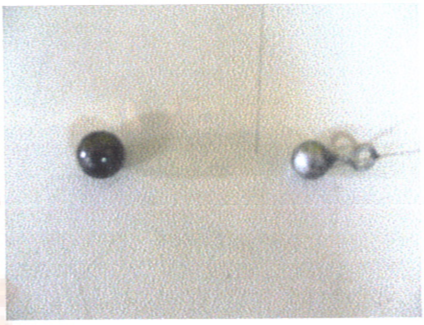


วงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลา

นาฬิกาจับเวลา



สายโทรศัพท์



ลูกตุ้มโลหะ

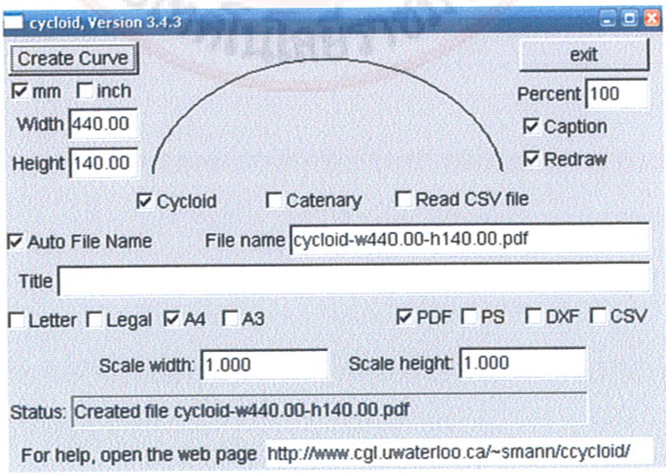
ภาพที่ 3.2 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลอง (ต่อ)

3.1.2 วิธีการดำเนินการวิจัย

3.1.2.1 การสร้างรางไซคลอยด์ รางตรงปรับความเอียงได้ และแบบจำลองฮอยเกนส์เพนดูลัม

ขั้นตอนในการสร้างรางไซคลอยด์

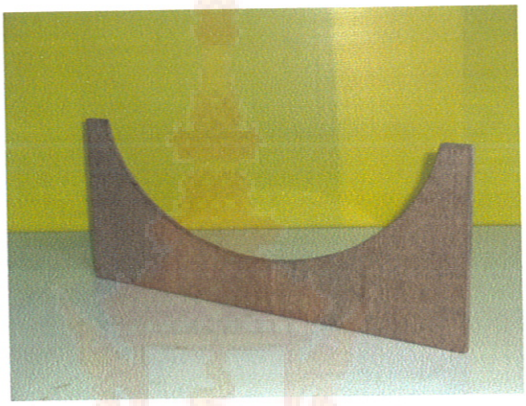
(1) ใช้โปรแกรม Cycloid, Version 3.4.3 ดังภาพที่ 3.3 โดยกำหนดความกว้างและความสูงเป็น 44 cm และ 14 cm ตามลำดับ แล้วพิมพ์ลงในกระดาษ A 4 สองแผ่น แผ่นหนึ่งจะเป็นภาพครึ่งซ้ายของไซคลอยด์ อีกแผ่นหนึ่งจะเป็นภาพครึ่งขวาของไซคลอยด์



ภาพที่ 3.3 โปรแกรมที่ใช้เขียนเส้นโค้งไซคลอยด์

(2) นำครึ่งโค้งไซคลอยด์ในกระดาษทั้งสองแผ่นมาประกบกันเส้นโค้งไซคลอยด์เต็มโค้ง แล้วใช้เทปใสปิดทับตรงรอยต่อระหว่างกระดาษทั้งสองแผ่น จากนั้นนำไปติดบนไม้อัดขนาดกว้าง 20 cm. ยาว 50 cm. หนา 1 cm. ด้วยกระดาษกาว 2 หน้า ชนิดบาง โดยจัดให้จุดกึ่งกลางของเส้นโค้งไซคลอยด์อยู่ที่กึ่งกลางไม้และจุดปลายทั้งสองของเส้นโค้งไซคลอยด์อยู่ที่ขอบบนของแผ่นไม้ แล้วปิดทับด้วยแผ่นสติกเกอร์ใส

(3) ใช้เลื่อยฉลุไฟฟ้าตัดไม้อัดไปตามเส้นโค้งไซคลอยด์บนกระดาษ หลังการตัดแผ่นไม้จะมีลักษณะดังภาพที่ 3.4 แล้วใช้กระดาษทรายขัดรอยตัดให้เรียบ



ภาพที่ 3.4 ลักษณะของแผ่นไม้หลังจากตัดออกเป็นเส้นโค้งไซคลอยด์

(4) นำรางครอบสายไฟขนาดกว้าง 6.5 mm และสูง 0.35 cm มาวางทาบไปตามทางโค้งไซคลอยด์บนไม้อัดแล้วตัดส่วนที่ยาวเกินออก จากนั้นนำไปยึดติดกับทางโค้งไซคลอยด์บนไม้อัดด้วยกระดาษกาว 2 หน้า ชนิดบาง ตำแหน่งใดที่รางครอบสายไฟไม่แนบติดกับไม้อัดให้ใช้ตะปูตัวเล็ก ๆ ตอกยึดไว้

(5) แบ่งสเกลความสูงบนรางไซคลอยด์ โดยขีดเส้นตรงแนวราบผ่านจุดต่ำสุดของรางไซคลอยด์เพื่อใช้เป็นระดับอ้างอิง จากนั้นทำเครื่องหมายตำแหน่งความสูงจากเส้นอ้างอิงนี้ของจุดบนรางไซคลอยด์ทุก ๆ ความสูง 1 cm

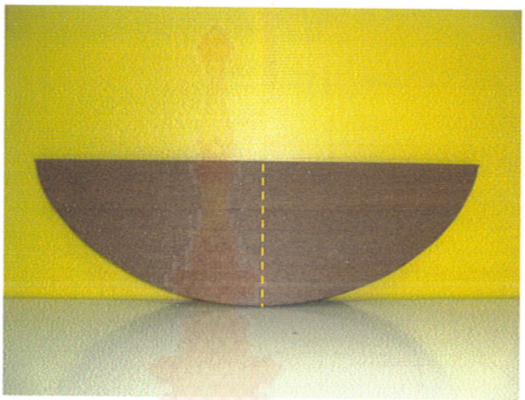
(6) ตัดไม้อัดหนา 1 cm เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดกว้าง 14 cm ยาว 50 cm เพื่อใช้เป็นฐานวางรางไซคลอยด์

(7) ใช้ตะปูตอกยึดแผ่นฐานเข้ากับรางไซคลอยด์ เมื่อประกอบเสร็จแล้วจะมีลักษณะดังภาพที่ 3.5

ขั้นตอนการสร้างแบบจำลองฮอยเกนส์ เพนดูลัม

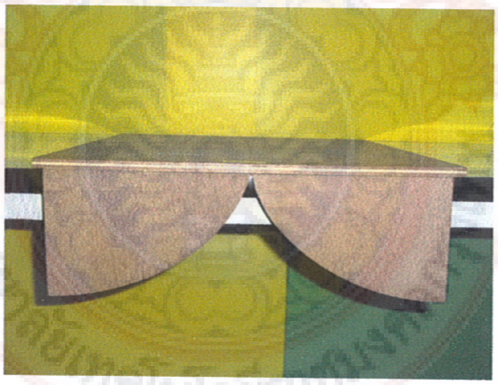
(1) ตัดไม้อัดหนา 1 cm เป็นแผ่นขนาดกว้าง 44 cm ยาว 50 cm แล้วเจาะรูสำหรับร้อยด้าย โดยเจาะตรงกึ่งกลางของด้านกว้างและห่างจากขอบแผ่นไม้ 0.5 cm

(2) นำแผ่นไม้อัดส่วนที่ตัดออกมาในการสร้างรางโค้งไซคลอยด์ มาตัดแบ่งครึ่งตามแนวความสูง ดังภาพที่ 3.7



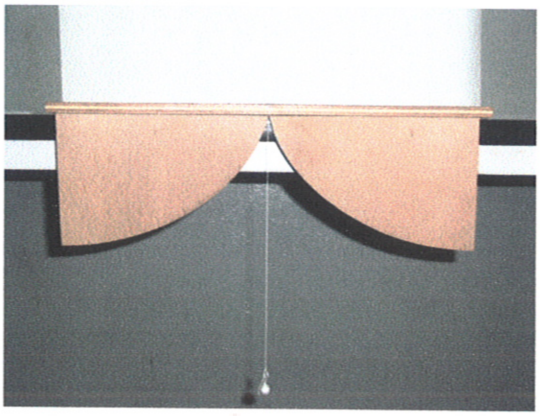
ภาพที่ 3.7 การตัดแบ่งครึ่งแผ่นไม้รูปโค้งไซคลอยด์

(3) ใช้ตะปูตอกยึดแผ่นไม้รูปครึ่งโค้งไซคลอยด์ทั้งสองชิ้นกับแผ่นไม้อัดทางปลายด้านที่เจาะรู โดยหันด้านโค้งเข้าหากัน ดังภาพที่ 3.8



ภาพที่ 3.8 การประกอบแผ่นไม้รูปครึ่งโค้งไซคลอยด์เข้ากับแผ่นไม้อัด

(4) ร้อยเชือกที่ผูกติดกับลูกตุ้มผ่านรูที่เจาะไว้ ดังภาพที่ 3.9



ภาพที่ 3.9 แบบจำลองฮอยเกนส์ เพนดูลัมที่สร้างเสร็จแล้ว

3.1.2.2 การสร้างชุดอุปกรณ์จับเวลา

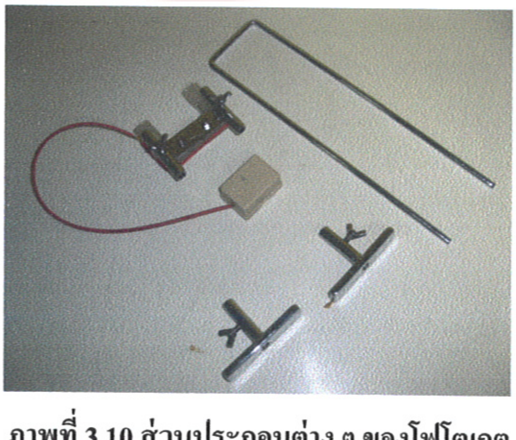
ชุดอุปกรณ์จับเวลาประกอบด้วยโฟโตเกต (Photogate) วงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลา (Stopwatch Control Circuit) และนาฬิกาจับเวลา 1 ใน 1,000 วินาที (1/1000 Second Stopwatch) ในการสร้างชุดอุปกรณ์จับเวลาได้สร้างโฟโตเกตและวงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลา ส่วนนาฬิกาจับเวลาซื้อมาแล้วนำมาต่อเข้ากับวงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลา

โฟโตเกต ทำหน้าที่เป็นตัวตรวจจับทางแสง โฟโตเกตจะทำงานเมื่อมีวัตถุเคลื่อนผ่านแนวอินฟราเรด โดยส่งสัญญาณไปยังภาคควบคุม แต่ถ้าไม่มีวัตถุเคลื่อนที่ผ่านแนวอินฟราเรด โฟโตเกตจะไม่ทำงาน (ไม่มีสัญญาณส่งไปที่ภาคควบคุม)

โฟโตเกตประกอบด้วยอินฟราเรดไดโอด (IR_TX1 และ IR_TX2) และโฟโตทรานซิสเตอร์ (IR_RX1 และ IR_RX2) โดยอินฟราเรดไดโอดทำหน้าที่สร้างแสงอินฟราเรดเพื่อใช้ในการตรวจจับ ส่วนโฟโตทรานซิสเตอร์ทำหน้าที่ตรวจจับแสงที่มาตกกระทบ ถ้าไม่มีแสงมาตกกระทบจะมีความต้านทานภายในสูง ส่งผลให้แรงดันไฟฟ้าตกคร่อมน้อย ในทางกลับกันเมื่อมีแสงมาตกกระทบจะทำให้ความต้านทานภายในลดต่ำลง ส่งผลให้มีแรงดันไฟฟ้าตกคร่อมมากขึ้น

ขั้นตอนการสร้างโฟโตเกต

(1) สร้างชิ้นส่วนต่าง ๆ ที่เป็นส่วนประกอบของโฟโตเกต ดังภาพที่ 3.10

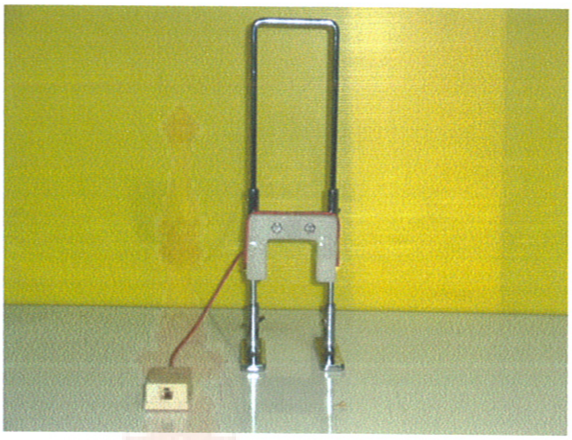


ภาพที่ 3.10 ส่วนประกอบต่าง ๆ ของโฟโตเกต

(2) ติดตั้งโฟโตทรานซิสเตอร์และอินฟราเรดไดโอดภายในโฟโตเกต

(3) เชื่อมต่อสายสัญญาณจากโฟโตเกตเข้ากับกล่องต่อสายโทรศัพท์

(4) ประกอบชิ้นส่วนต่าง ๆ เข้าด้วยกัน ดังภาพที่ 3.11



ภาพที่ 3.11 โฟโตเกตที่สร้างเสร็จแล้ว

วงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลา ทำหน้าที่ควบคุมการทำงานของนาฬิกาจับเวลา โดยควบคุมได้ 2 วิธี คือ ควบคุมโดยตรงจากวงจรควบคุม และควบคุมโดยผ่านโฟโตเกต

การควบคุมโดยตรงจากวงจรควบคุมเป็นการควบคุมผ่านสวิตช์ 3 ตัว บนวงจร คือ

- START/STOP (ตำแหน่งขวา) เป็นสวิตช์ควบคุมการเริ่มต้นการจับเวลาและการหยุดจับเวลาของนาฬิกาจับเวลา

- RESET (ตำแหน่งกลาง) เป็นสวิตช์ควบคุมการเริ่มต้นการจับเวลาใหม่

- CLEAR (ตำแหน่งซ้าย) เป็นสวิตช์ล้างหน้าจอและเริ่มการทำงานของนาฬิกาจับเวลาใหม่ทั้งหมด

การควบคุมโดยผ่านโฟโตเกต เป็นการทำงานตามที่ผู้ใช้กำหนดผ่านสวิตช์ MODE ซึ่งมี 2 โหมด คือ

- TWO GATES ในโหมดการทำงานนี้จะใช้โฟโตเกต 2 ตัวมาต่อไว้ที่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด เมื่อวัตถุผ่านจุดเริ่มต้น วงจรควบคุมจะกระตุ้นให้นาฬิกาจับเวลาเริ่มทำงาน และเมื่อวัตถุผ่านโฟโตเกตที่ตำแหน่งสิ้นสุด วงจรควบคุมจะกระตุ้นให้นาฬิกาจับเวลาหยุดทำงาน

- PENDULUM ในโหมดนี้จะใช้โฟโตเกต 1 ตัว ตั้งไว้ในตำแหน่งสูงสุดหรือต่ำสุดของแนวการเคลื่อนที่ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับการทดลอง โดยเมื่อวัตถุผ่านโฟโตเกตครั้งแรกวงจรควบคุมจะกระตุ้นให้

นาฬิกาจับเวลาเริ่มจับเวลาและเมื่อวัตถุผ่านโฟโตเกตครั้งที่สาม วงจรควบคุมจะกระตุ้นให้นาฬิกาจับเวลาหยุดจับเวลา

วงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลาประกอบด้วย R1 ถึง R13, C1, LED1, SW1 ถึง SW3, IC1A ถึง IC1D, IC2 และIC3 โดยอุปกรณ์แต่ละตัวมีหน้าที่ดังนี้

R1 และ R2 เป็นตัวต้านทานจำกัดกระแสให้กับอินฟราเรดไดโอด (IR_TX1 และIR_TX2)

R3 และ R4 เป็นตัวต้านทานจำกัดกระแสให้กับโฟโตทรานซิสเตอร์ (IR_RX1 และIR_RX2)

R5 และ C1 เป็นวงจรดิฟเฟอเรนเชียลทำหน้าที่สร้างพัลส์แคบจากการเก็บประจุและคายประจุตามค่าคงตัวเวลา (Time Constant;τ) ซึ่งคำนวณได้จาก

$$\tau = R \times C = 1\ M\Omega \times 100\ nF = 1 \times 10^{-1}\ s = 100\ ms$$

จากค่าคงตัวเวลาที่ได้ แสดงว่าวงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลานี้มีสมรรถนะในการจับเวลาที่ใช้เวลามากกว่า 100 ms ขึ้นไป เนื่องจากถ้าใช้เวลาน้อยกว่านี้จะไม่เกิดการกระตุ้นสัญญาณจากภาคควบคุม

R6, R7 และ R8 เป็นตัวต้านทานที่ต่อแบบพูลดาวน์กับสวิตช์ SW1, SW2 และ SW3 ตามลำดับ ถ้ากดสวิตช์จะทำให้มีแรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน ถ้าไม่กดสวิตช์จะไม่มีแรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน

R9, R10, R11 และ R12 เป็นตัวต้านทานจำกัดกระแสของ LED ภายใน IC3

R13 เป็นตัวต้านทานจำกัดกระแส LED1

IC1A ทำหน้าที่เป็นวงจรขนานสัญญาณจากโฟโตเกตเพื่อส่งสัญญาณไปยังขา CLK ของ IC2

IC1B ทำหน้าที่เป็นวงจรขนานสัญญาณจากสวิตช์ RESET และ CLEAR เพื่อไปตั้งค่าการทำงานใหม่ที่ขา CLR ของ IC2

IC1C ทำหน้าที่เป็นวงจรขนานสัญญาณจากสวิตช์ START/STOP กับเอาต์พุตที่ได้จาก IC1D เพื่อไปกระตุ้นการจับเวลาและหยุดจับเวลาของนาฬิกาจับเวลา

IC1D ทำหน้าที่เป็นวงจรขนานสัญญาณจากเอาต์พุต Q1 กับเอาต์พุต Q2 หรือ Q3 เพื่อไปควบคุมการทำงานของนาฬิกาจับเวลาร่วมกันกับ IC1C

IC2 เป็นวงจรนับสิบซึ่งในวงจรนี้ทำหน้าที่เป็นตัวรับสัญญาณจากสวิตช์หรือโฟโตเกตเพื่อไปควบคุมการทำงานของนาฬิกาจับเวลา

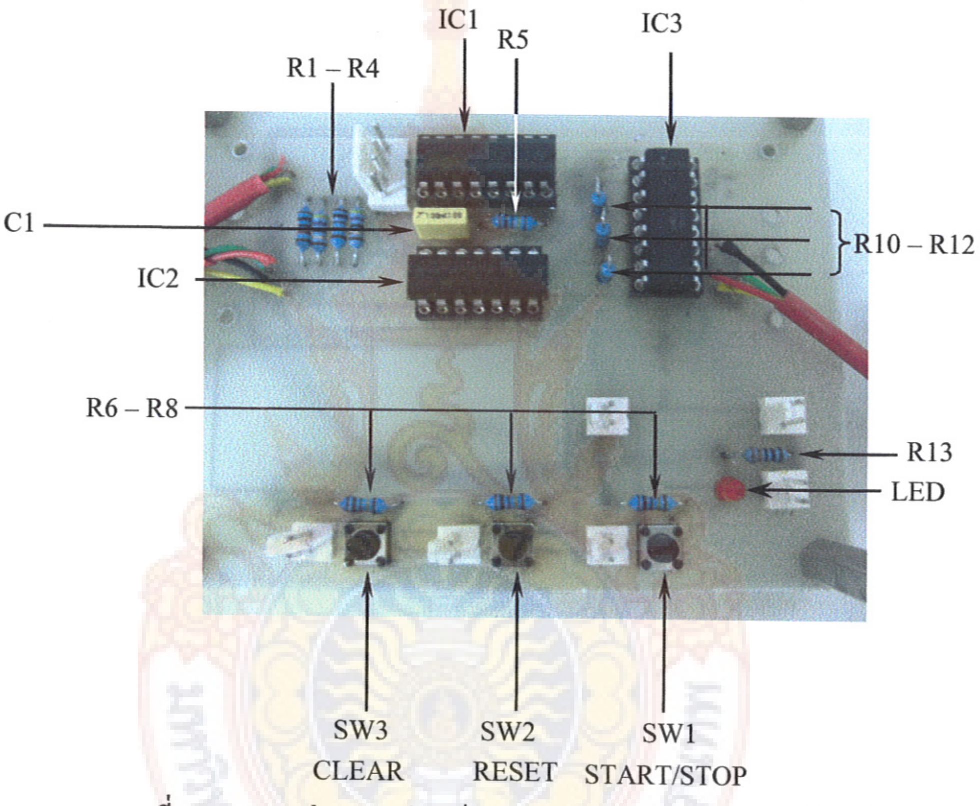
IC3 เป็นอุปกรณ์เชื่อมโยงทางแสง (Optocoupler) ทำหน้าที่เป็นอุปกรณ์เชื่อมต่อระหว่างวงจรควบคุมกับนาฬิกาจับเวลาโดยไม่มีส่วนประกอบที่เชื่อมต่อกันทางไฟฟ้า เนื่องจากใช้แรงดันในการทำงานแตกต่างกัน

SW1 เป็นสวิตช์ START/STOP ใช้เพื่อเริ่มและหยุดการจับเวลาของนาฬิกาจับเวลา

SW2 เป็นสวิตช์ RESET ทำหน้าที่ล้างค่าการนับของนาฬิกาจับเวลาใหม่

SW3 เป็นสวิตช์ CLEAR ทำหน้าที่ล้างหน้าจอและเริ่มการทำงานของนาฬิกาจับเวลาใหม่

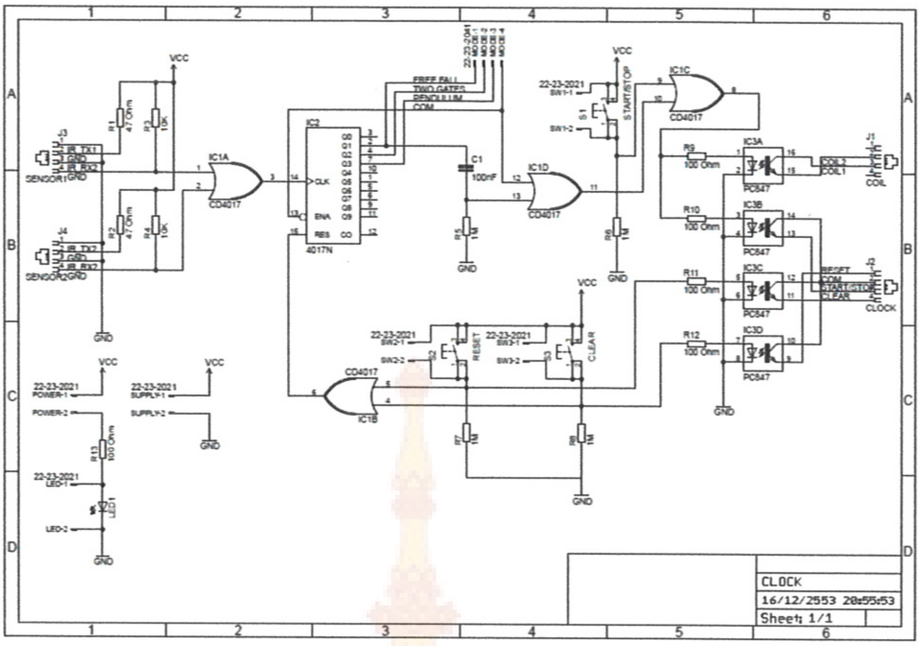
ตำแหน่งของอุปกรณ์ต่าง ๆ บนแผงวงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลาพิจารณาได้จากภาพที่ 3.12



ภาพที่ 3.12 ตำแหน่งของอุปกรณ์ต่าง ๆ บนแผงวงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลา

ขั้นตอนการสร้างวงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลา

(1) ออกแบบลายวงจรด้วยโปรแกรมออกแบบวงจร ดังภาพที่ 3.13



ภาพที่ 3.13 ลายวงจรของวงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลา

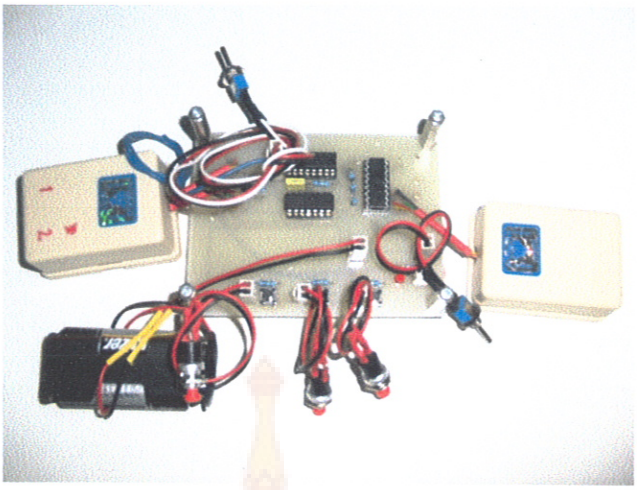
(2) ออกแบบลายวงจรพิมพ์ด้วยโปรแกรมออกแบบลายวงจรพิมพ์

(3) ผลิตแผ่นวงจรพิมพ์ตามที่ได้ออกแบบไว้

(4) ติดตั้งและบัดกรีอุปกรณ์บนแผ่นวงจรพิมพ์ ดังภาพที่ 3.14

ภาพที่ 3.14 การติดตั้งอุปกรณ์บนแผ่นวงจรพิมพ์

(5) ต่อสวิตช์และขั้วต่อเข้ากับจุดเชื่อมต่อ ดังภาพที่ 3.15



ภาพที่ 3.15 วงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลาที่สร้างเสร็จแล้ว

การต่อนาฬิกาจับเวลาเข้ากับวงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลา

(1) ต่อสายสัญญาณควบคุมจากนาฬิกาจับเวลา 4 เส้น ดังนี้

- COM เป็นสายสัญญาณร่วมที่ใช้ในการส่งสัญญาณไปควบคุมส่วนต่างๆของนาฬิกาจับเวลา

- START/STOP เป็นสายสัญญาณควบคุมการจับเวลาและการหยุดจับเวลาของนาฬิกาจับเวลา

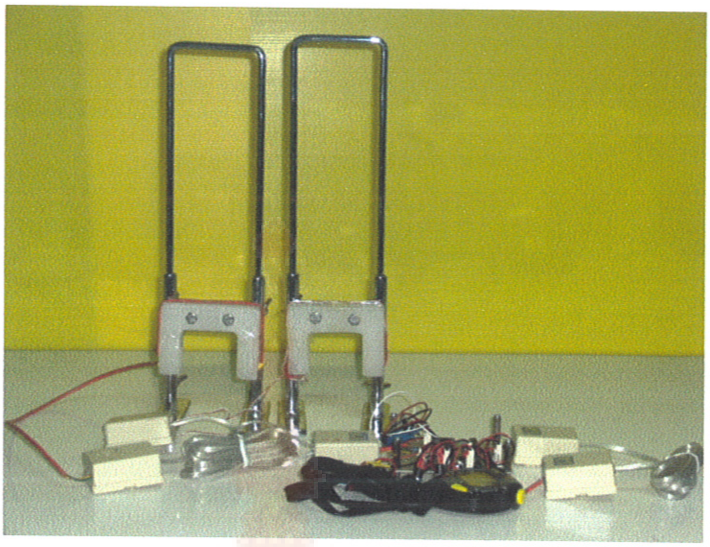
- RESET เป็นสายสัญญาณควบคุมการเริ่มการจับเวลาใหม่ของนาฬิกาจับเวลา

- CLEAR เป็นสายสัญญาณควบคุมการล้างหน้าจอและเริ่มต้นการทำงานใหม่ของนาฬิกาจับเวลา

(2) ต่อปลายสายสัญญาณควบคุมทั้ง 4 เส้น เข้ากับกล่องต่อสายโทรศัพท์ ดังภาพที่ 3.16 เพื่อเชื่อมต่อเข้ากับวงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลา

ภาพที่ 3.16 การต่อสายสัญญาณควบคุมเข้ากับกล่องต่อสายโทรศัพท์

เมื่อนำโฟโตเกต วงจรควบคุมนาฬิกาจับเวลาและนาฬิกาจับเวลามาประกอบเข้าด้วยกัน ดังภาพที่ 3.17 จะได้ชุดอุปกรณ์จับเวลาที่พร้อมใช้งาน



ภาพที่ 3.17 ชุดอุปกรณ์จับเวลา

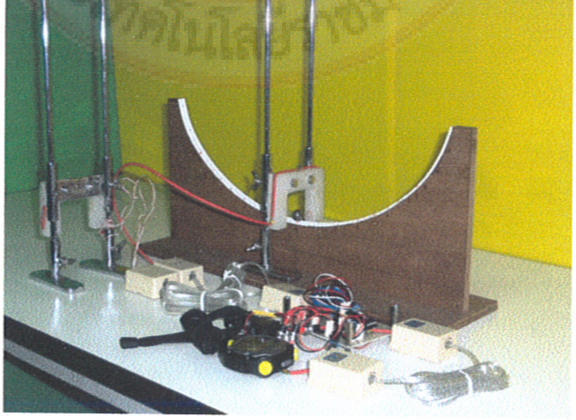
3.1.2.3 การทดลองเพื่อยืนยันสมบัติทอตโทโครนของไซคลอยด์

อุปกรณ์การทดลอง

1. รางไซคลอยด์ 1 อัน
2. โฟโตเกตแบบตัว U คว่ำ 2 ตัว
3. ชุดอุปกรณ์จับเวลา 1 ชุด
4. ลูกตุ้มขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 1.5 cm 1 ลูก

วิธีการทดลอง

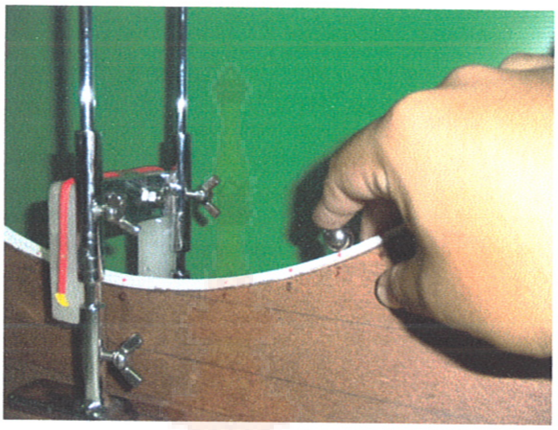
1. จัดอุปกรณ์การทดลอง ดังภาพที่ 3.18



ภาพที่ 3.18 การจัดอุปกรณ์การทดลองเพื่อยืนยันสมบัติทอตโทโครนของไซคลอยด์

2. ปรับความสูงของโฟโตเกตให้ตำแหน่งกึ่งกลางของช่องรับแสงของโฟโตเกตตรงกับตำแหน่งกึ่งกลางของลูกเหล็กที่วางไว้ที่ต่ำสุดของราง

3. วางลูกตุ้มไว้ที่ความสูง 2 cm จากตำแหน่งต่ำสุดของรางไซคลอยด์ ดังภาพที่ 3.19



ภาพที่ 3.19 การวางลูกตุ้มบนรางไซคลอยด์ในการทดลองเพื่อยืนยันสมบัติทอตโทโครนของไซคลอยด์

4. สับสวิตช์ POWER สับสวิตช์ MODE ไปที่ PENDULUM และกดสวิตช์ CLEAR บนวงจรควบคุมนาฬิกา 1 ครั้ง สังเกตว่าหน้าจอนาฬิกาจับเวลาจะดับไปชั่วครู่แล้วจะแสดงผลขึ้นมาใหม่ ถ้าเป็นเช่นนี้แสดงว่านาฬิกาจับเวลาพร้อมทำงาน ถ้าไม่เป็นไปตามนี้ให้ตรวจสอบการเชื่อมต่อสายและความสูงโฟโตเกตอีกครั้งแล้วทำขั้นตอนนี้ใหม่

5. ปล่อยลูกตุ้มและจับเวลา สังเกตว่าเมื่อลูกตุ้มผ่านโฟโตเกตครั้งที่หนึ่งจะได้ยินเสียงสัญญาณและนาฬิกาจับเวลาจะเริ่มจับเวลา ถ้าไม่เป็นไปตามนี้แสดงว่าตั้งความสูงของช่องรับแสงของโฟโตเกตสูงเกินไป ให้ปรับความสูงใหม่และทำตามขั้นตอนที่ 3 และ 4 อีกครั้ง

6. เมื่อลูกตุ้มผ่านโฟโตเกตทุกสามครั้ง นาฬิกาจับเวลาจะหยุดจับเวลาให้บันทึกผลและกดสวิตช์ RESET เพื่อเริ่มจับเวลาใหม่ ทำเช่นนี้จนจับเวลาได้ครบ 5 ครั้ง แล้วนำมาหาค่าเฉลี่ย โดยที่ตำแหน่งความสูงค่าหนึ่ง ๆ ให้ทดลองซ้ำ 10 ครั้ง

7. ทำซ้ำตามขั้นตอนที่ 3 ถึงขั้นตอนที่ 6 โดยเปลี่ยนความสูงเป็น 4 cm , 6 cm, 8 cm, 10 cm และ 12 cm ตามลำดับ

3.1.2.4 การทดลองเพื่อเปรียบเทียบคาบของการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม กับไซคลอยดัล เพนดูลัม ที่มีความยาวเชือกเท่ากัน

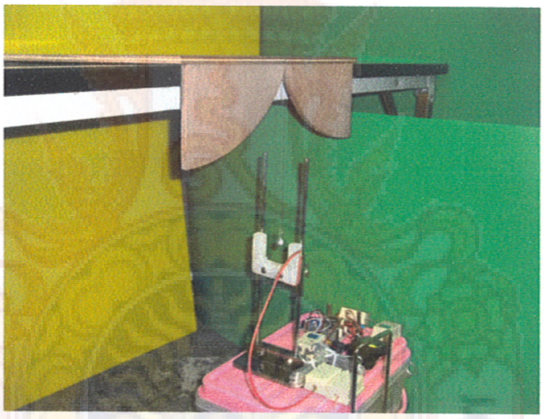
อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลอง

1. โฟโตเกตรูปตัวยูหงาย 1 ตัว
2. โฟโตเกตชนิดตัวยูคว่ำ 1 ตัว
3. ชุดอุปกรณ์จับเวลา 1 ชุด
4. แบบจำลองฮอยเกนส์ เพนดูลัม 1 ชุด (เชือกที่ผูกลูกตุ้มยาว 28 cm)
5. ชุดทดลองซิมเปิล เพนดูลัม 1 ชุด (เชือกที่ผูกลูกตุ้มยาว 28 cm)

วิธีทดลอง

การหาคาบของการแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม

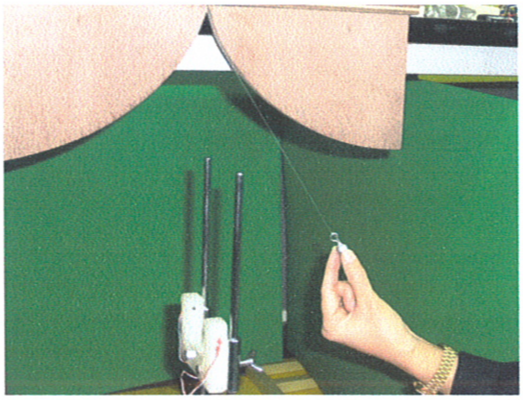
1. จัดอุปกรณ์การทดลองดังภาพที่ 3.20



ภาพที่ 3.20 การจัดอุปกรณ์การทดลองเพื่อวัดคาบของการแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม

2. ปรับความสูงของโฟโตเกตให้ตำแหน่งกึ่งกลางของช่องรับแสงของโฟโตเกตอยู่ตรงกับตำแหน่งกึ่งกลางของลูกตุ้ม

3. จับลูกตุ้มแล้วดึงให้เชือกผูกลูกตุ้มแนบไปตามครึ่งโค้งไซคลอยด์ด้านขวาจนถึงระดับที่อยู่ต่ำจากยอดแหลมของโค้ง 4 cm ดังภาพที่ 3.21



ภาพที่ 3.21 การดึงลูกตุ้มเพื่อให้เชือกผูกลูกตุ้มแนบไปตามครึ่งโค้งไซคลอยด์ก่อนปล่อยให้แกว่ง

4. สับสวิตช์ POWER สับสวิตช์ MODE ไปที่ PENDULUM และกดสวิตช์ CLEAR บนวงจรควบคุมนาฬิกา 1 ครั้ง สังเกตว่าหน้าจอนาฬิกาจับเวลาจะดับไปชั่วครู่แล้วจะแสดงผลขึ้นมาใหม่ ถ้าเป็นเช่นนี้แสดงว่านาฬิกาจับเวลาพร้อมทำงาน

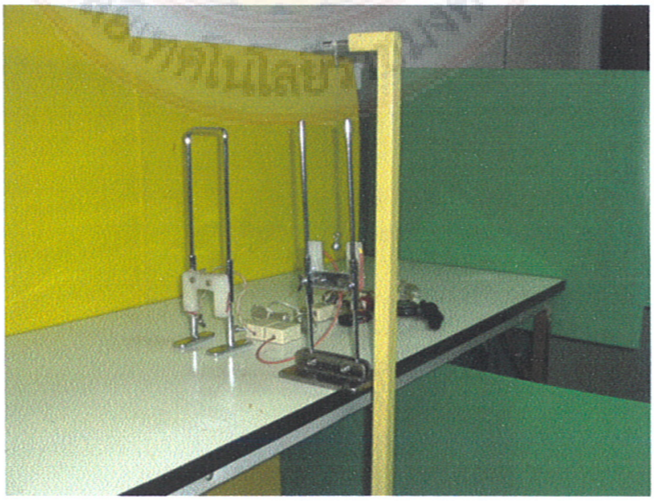
5. ปล่อยลูกตุ้มและจับเวลา สังเกตว่าเมื่อลูกตุ้มผ่านโฟโตเกตครั้งแรก จะได้ยินเสียงสัญญาณและนาฬิกาจับเวลาจะเริ่มจับเวลา ถ้าไม่เป็นไปตามนี้แสดงว่าตั้งความสูงของช่องรับแสงของโฟโตเกตสูงหรือต่ำเกินไป ให้ปรับความสูงใหม่และทำตามขั้นตอนที่ 3 และ 4 อีกครั้ง

6. ทุกสามครั้งที่ลูกตุ้มเผ่านโฟโตเกต นาฬิกาจับเวลาจะหยุดจับเวลา ให้บันทึกผลและกดสวิตช์ RESET เพื่อเริ่มจับเวลาใหม่ ทำเช่นนี้จนจับเวลาได้ครบ 10 ครั้ง แล้วนำค่าที่ได้ไปหาค่าเฉลี่ย

7. ทำซ้ำตามขั้นตอนที่ 3 ถึงขั้นตอนที่ 6 โดยเปลี่ยนความสูงของตำแหน่งปล่อยลูกตุ้มเป็น 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm, 10 cm, 11 cm, 12 cm และ 13 cm

การหาคาบเวลาของการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม

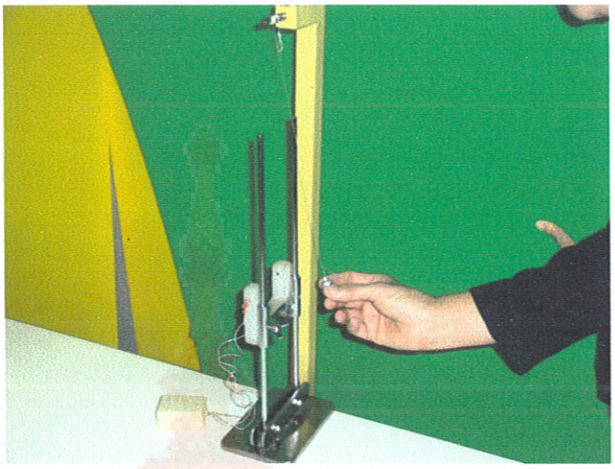
1. จัดอุปกรณ์การทดลองดังภาพที่ 3.22



ภาพที่ 3.22 การจัดอุปกรณ์การทดลองเพื่อวัดคาบของการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม

2. ปรับความสูงของโฟโตเกตโดยให้ตำแหน่งกึ่งกลางของช่องรับแสงของโฟโตเกตอยู่ตรงกับตำแหน่งกึ่งกลางของลูกตุ้ม

3. จับลูกตุ้มแล้วดึงให้เชือกเอียงทำมุม 80 องศา กับแนวดิ่ง ดังภาพที่ 3.23



ภาพที่ 3.23 การดึงลูกตุ้มเพื่อให้เชือกเอียงทำมุมกับแนวดิ่งก่อนปล่อยให้แกว่ง

4. สับสวิตช์ POWER สับสวิตช์ MODEไปที่ PENDULUM และกดสวิตช์ CLEAR บนวงจรควบคุมนาฬิกา 1 ครั้ง สังเกตว่าหน้าจอนาฬิกาจับเวลาจะดับไปชั่วครู่แล้วจะแสดงผลขึ้นมาใหม่ ถ้าเป็นเช่นนี้แสดงว่านาฬิกาจับเวลาพร้อมทำงาน

5. ทำการปล่อยลูกเหล็กและทำการจับเวลา สังเกตว่าเมื่อลูกเหล็กผ่านโฟโตเกตครั้งแรก จะได้ยินเสียงสัญญาณและนาฬิกาจับเวลาจะเริ่มจับเวลา ถ้าไม่เป็นไปตามนี้แสดงว่าตั้งความสูงของช่องรับแสงของโฟโตเกตสูงหรือต่ำเกินไป ให้ปรับความสูงใหม่และทำตามขั้นตอนที่ 4 และ 5 อีกครั้ง

6. เมื่อลูกตุ้มเหล็กผ่านโฟโตเกตทุกสามครั้ง นาฬิกาจับเวลาจะหยุดจับเวลา บันทึกผลและกดสวิตช์ RESET เพื่อเริ่มจับเวลาใหม่ ทำเช่นนี้จนจับเวลาได้ครบ 10 ครั้ง แล้วนำค่าที่ได้ไปหาค่าเฉลี่ย

7. ทำซ้ำตามขั้นตอนที่ 3 ถึงขั้นตอนที่ 7 โดยเปลี่ยนมุมในการปล่อยลูกตุ้มเป็น 70°, 60°, 50°, 40°, 30°, 20°, 10°, 5° และ 3° ตามลำดับ

3.1.2.5 การทดลองเพื่อยืนยันสมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์

อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลอง

1. รางไซคลอยด์ 1 อัน

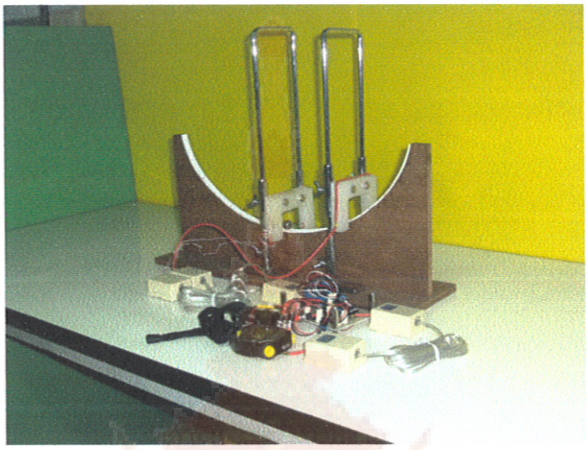
2. รางตรงปรับความเอียงได้ 1 อัน

3. ชุดอุปกรณ์จับเวลา 1 ชุด

4. ลูกตุ้มขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 1.5 cm 1 ลูก

วิธีทดลอง

1. จัดอุปกรณ์การทดลองดังภาพที่ 3.24

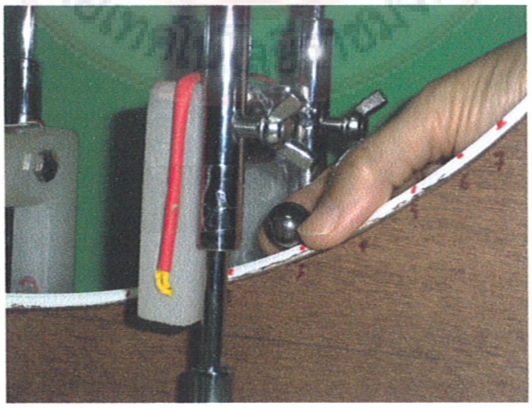


ภาพที่ 3.24 การจัดอุปกรณ์การทดลองเพื่อจับเวลาในการเคลื่อนที่ระหว่าง 2 ตำแหน่ง บนรางไซคลอยด์

2. วางโฟโตเกตตัวแรกไว้ที่ตำแหน่งเริ่มต้นที่ระยะ 2 cm ทางด้านขวา และวางโฟโตเกตตัวที่ 2 ไว้ที่ตำแหน่งสุดท้ายที่ตำแหน่งต่ำสุดของรางไซคลอยด์ (0 cm)

3. ปรับความสูงของโฟโตเกตทั้งสองตัวให้ตำแหน่งรับแสงของโฟโตเกตตรงกับตำแหน่งกึ่งกลางของลูกตุ้ม

4. วางลูกตุ้มไว้ที่ตำแหน่งเริ่มต้น (ที่ระยะสูง 2 cm ทางด้านขวา) โดยให้ลูกตุ้มอยู่ใกล้กับแนวของช่องรับแสงมากที่สุด ดังภาพที่ 3.25



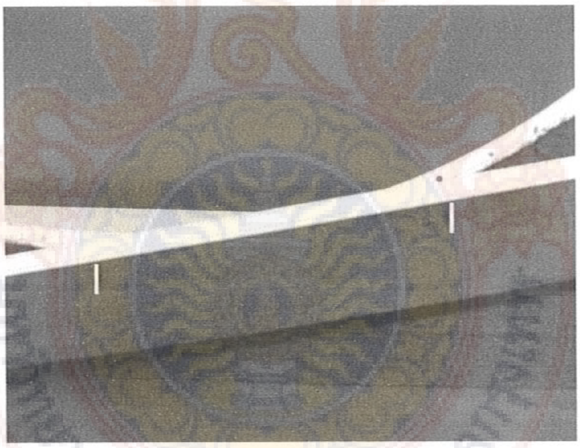
ภาพที่ 3.25 การวางลูกตุ้มที่ตำแหน่งเริ่มต้นในการทดลองเพื่อจับเวลาในการเคลื่อนที่ระหว่าง 2 ตำแหน่ง บนรางไซคลอยด์

5. สับสวิตช์ POWER สับสวิตช์ MODE ไปที่ TWO GATES และกดสวิตช์ CLEAR บนวงจรควบคุมนาฬิกา 1 ครั้ง สังเกตว่าหน้าจอนาฬิกาจับเวลาจะดับไปชั่วครู่แล้วจะแสดงผลขึ้นมาใหม่ ถ้าเป็นเช่นนี้แสดงว่านาฬิกาจับเวลาพร้อมทำงาน ถ้าไม่เป็นไปตามนี้ให้ตรวจสอบการเชื่อมต่อสายและความสูงโฟโตเกตอีกครั้งแล้วทำขั้นตอนนี้ใหม่

6. ปล่อยลูกตุ้มและจับเวลา สังเกตว่าเมื่อลูกตุ้มผ่านโฟโตเกตตัวแรก จะได้ยินเสียงสัญญาณและนาฬิกาจับเวลาจะเริ่มจับเวลา และเมื่อลูกตุ้มเคลื่อนที่ผ่านโฟโตเกตตัวที่สอง จะได้ยินเสียงสัญญาณและนาฬิกาจับเวลาจะหยุดจับเวลา ถ้าไม่เป็นไปตามนี้แสดงว่าตั้งความสูงของช่องรับแสงของโฟโตเกตสูงเกินไป ให้ปรับความสูงใหม่และทำตั้งแต่ขั้นตอนที่ 4 อีกครั้ง

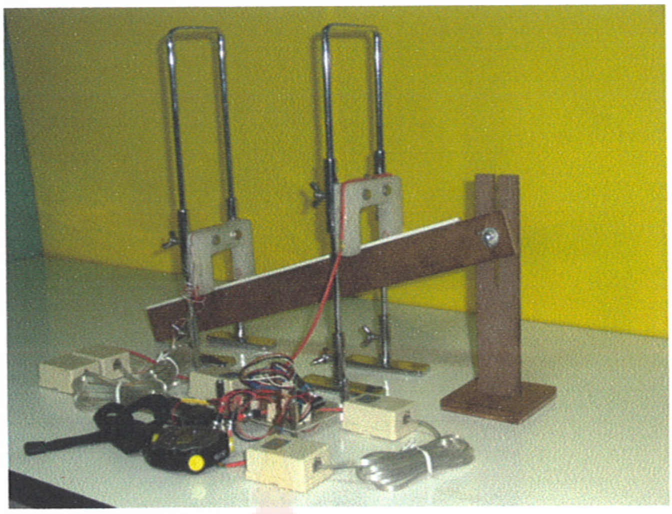
7. บันทึกผลค่าเวลาที่วัดได้ และทำตามขั้นตอนที่ 4 ถึงขั้นตอนที่ 6 จนครบ 10 ครั้งแล้วหาค่าเฉลี่ย

8. นำรางตรงปรับความเอียงได้มาปรับความเอียงให้ได้เส้นทางที่ผ่านตำแหน่ง 2 ตำแหน่ง คู่เดียวกันกับ 2 ตำแหน่งบนรางไซคลอยด์ แล้วทำเครื่องหมายแสดงตำแหน่ง 2 ตำแหน่งนั้น บนรางตรง ดังภาพที่ 3.26



ภาพที่ 3.26 การปรับความเอียงของรางตรงเพื่อให้ได้เส้นทางที่ผ่านตำแหน่ง 2 ตำแหน่ง คู่เดียวกันกับ 2 ตำแหน่งบนรางไซคลอยด์

9. จัดอุปกรณ์การทดลองดังภาพที่ 3.27



ภาพที่ 3.27 การจัดอุปกรณ์การทดลองเพื่อจับเวลาในการเคลื่อนที่ ระหว่าง 2 ตำแหน่ง บนรางตรง

10. ทดลองตามขั้นตอนที่ 2 ถึง ขั้นตอนที่ 7 เช่นเดียวกับกรณีของรางโค้งไซคลอยด์

11. ทำตามขั้นตอนที่ 2 ถึง ขั้นตอนที่ 10 โดยเปลี่ยนตำแหน่งจุดต้นและจุดปลาย ดังนี้ 3 cm ถึง 0, 4 cm ถึง 0, 5 cm ถึง 0, 6 cm ถึง 0, 7 cm ถึง 0, 1 cm ถึง 1 cm, 2 cm ถึง 1 cm, 3 cm ถึง 1 cm, 4 cm ถึง 1 cm, 3 cm ถึง 2 cm, 4 cm ถึง 2 cm, 3 cm ถึง 2.5 cm, และ 4 cm ถึง 3 cm

3.2 สถานที่ทำการวิจัย

สาขาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ

บทที่ 4

ผลการวิจัยและข้อวิจารณ์

4.1 การทดลองเพื่อยืนยันสมบัติทอตโทโครนของไซคลอยด์

ตารางที่ 1 คาบของการออสซิลเลตบนรางไซคลอยด์ที่แอมพลิจูดต่าง ๆ กัน

ความสูง	คาบเวลา (s)					คาบเวลาเฉลี่ย (s)
(cm)	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	(T_{av})
2	1.226	1.226	1.226	1.227	1.226	1.226
	1.226	1.226	1.226	1.227	1.225	1.226
	1.224	1.225	1.227	1.226	1.226	1.226
	1.226	1.227	1.227	1.227	1.226	1.227
	1.226	1.227	1.227	1.230	1.225	1.227
	1.225	1.226	1.226	1.228	1.226	1.226
	1.225	1.226	1.226	1.228	1.226	1.226
	1.225	1.227	1.226	1.220	1.226	1.225
	1.225	1.226	1.226	1.229	1.226	1.226
	1.225	1.225	1.226	1.227	1.226	1.226
4	1.213	1.224	1.226	1.227	1.227	1.223
	1.210	1.224	1.226	1.227	1.227	1.223
	1.214	1.224	1.226	1.226	1.227	1.223
	1.208	1.223	1.225	1.227	1.228	1.222
	1.206	1.224	1.226	1.226	1.227	1.222
	1.208	1.225	1.226	1.226	1.225	1.222
	1.206	1.223	1.226	1.227	1.226	1.222
	1.209	1.225	1.224	1.226	1.226	1.222
	1.208	1.223	1.226	1.225	1.227	1.222
	1.206	1.226	1.226	1.227	1.226	1.222

ตารางที่ 1 คาบของการออสซิลเลตบนรางไซคลอยด์ที่แอมพลิจูดต่าง ๆ กัน (ต่อ)

ความสูง (cm)	คาบเวลา (s)					คาบเวลาเฉลี่ย (s)
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	(T_{av})
	1.188	1.221	1.226	1.226	1.226	1.217
	1.196	1.221	1.225	1.226	1.227	1.219
6	1.188	1.222	1.226	1.227	1.226	1.218
	1.188	1.222	1.225	1.228	1.226	1.218
	1.188	1.223	1.226	1.226	1.226	1.218
	1.186	1.222	1.226	1.226	1.226	1.217
	1.190	1.222	1.226	1.227	1.226	1.218
6	1.183	1.222	1.226	1.227	1.226	1.217
	1.182	1.221	1.227	1.227	1.226	1.217
	1.188	1.222	1.228	1.227	1.226	1.218
	1.176	1.221	1.223	1.227	1.227	1.215
	1.177	1.219	1.226	1.226	1.227	1.215
	1.179	1.221	1.226	1.227	1.228	1.216
	1.172	1.221	1.227	1.225	1.227	1.214
8	1.169	1.225	1.226	1.226	1.226	1.214
	1.169	1.222	1.226	1.226	1.226	1.214
	1.170	1.222	1.227	1.227	1.226	1.214
	1.168	1.219	1.226	1.227	1.226	1.213
	1.171	1.220	1.226	1.226	1.226	1.214
	1.170	1.221	1.226	1.227	1.226	1.214

ตารางที่ 1 คาบของการออสซิลเลตบนรางไซคลอยด์ที่แอมพลิจูดต่าง ๆ กัน (ต่อ)

ความสูง (cm)	คาบเวลา (s)					คาบเวลาเฉลี่ย (s)
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	(T_{av})
10	1.161	1.219	1.226	1.226	1.225	1.211
	1.150	1.222	1.225	1.227	1.227	1.210
	1.139	1.220	1.226	1.227	1.226	1.208
	1.144	1.221	1.225	1.226	1.228	1.209
	1.146	1.221	1.226	1.227	1.224	1.209
	1.143	1.220	1.225	1.226	1.225	1.208
	1.145	1.220	1.225	1.227	1.225	1.208
	1.145	1.219	1.225	1.228	1.226	1.209
	1.145	1.217	1.226	1.226	1.266	1.216
	1.143	1.219	1.226	1.226	1.226	1.208
12	1.138	1.219	1.225	1.225	1.225	1.206
	1.139	1.217	1.224	1.225	1.225	1.206
	1.137	1.219	1.225	1.225	1.226	1.206
	1.137	1.219	1.226	1.226	1.224	1.206
	1.138	1.218	1.225	1.226	1.223	1.206
	1.132	1.219	1.226	1.226	1.227	1.206
	1.127	1.220	1.226	1.227	1.226	1.205
	1.132	1.220	1.226	1.227	1.226	1.206
	1.131	1.219	1.227	1.228	1.228	1.207
	1.134	1.219	1.225	1.227	1.226	1.206

คาบ T_1 มีค่าน้อยกว่าคาบ T_2 , T_3 , T_4 และ T_5 โดยเฉพาะเมื่อปล่อยทรงกลมโลหะจากตำแหน่งที่อยู่สูง ๆ เนื่องจากเกิดการไถลในช่วงเริ่มต้นของการเคลื่อนที่

โดยที่ คาบของการออสซิลเลตบนทางโค้งไซคลอยด์ในกรณีที่มีการกลิ้งด้วยหาค่าได้จากสมการ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g^*}}$$

เมื่อ $g^* = \frac{g}{1+k}$ และ $k = \frac{2}{5} = 0.4$ สำหรับทรงกลม

เนื่องจากแผ่นไม้ที่ตัดเป็นทางโค้งไซคลอยด์มีระยะแนวดิ่งจากจุดกึ่งกลางจุดต่ำสุดเท่ากับ 14.05 cm ขณะที่รางครอบสายไฟที่นำมาทำรางโค้งไซคลอยด์สูง 0.35 cm และทรงกลมโลหะมีรัศมี 0.75 cm โดยที่ทรงกลมโลหะมีส่วนที่ยื่นลงไปในราง 0.024 cm เมื่อวางบนราง

จึงได้ $$2a = 14.05 - 0.35 - (0.75 - 0.024)\,cm = 12.974\,cm$$

ดังนั้น $$T = 2\pi\sqrt{\frac{2(0.12974)(1.4)}{9.78}}\,s = 1.211\,s$$

ซึ่งสอดคล้องอย่างดีกับผลการทดลอง

จากผลการทดลองจึงสรุปได้ว่าคาบของการออสซิลเลตของลูกตุ้มบนทางโค้งไซคลอยด์มีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามแอมพลิจูดของการออสซิลเลต ซึ่งเป็นการยืนยันสมบัติทอตโทโครนของไซคลอยด์

หมายเหตุ ค่า g = 9.78 m/s^2 เป็นค่าท้องถิ่น (กรุงเทพฯ) ของค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ซึ่งเป็นผลจากการทดลองวัดของกรมแผนที่ทหาร

4.2 การทดลองเพื่อเปรียบเทียบคาบของการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม กับ ไซคลอยดัล เพนดูลัม ที่มีความยาวเชือกเท่ากัน

ตารางที่ 2 คาบของการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม เมื่อความยาวเชือกมีค่าเป็น 28 cm

มุม (องศา)	คาบเวลา (s)										คาบเวลาเฉลี่ย (s)
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	(T_{av})
80	1.163	1.157	1.520	1.147	1.143	1.140	1.138	1.133	1.129	1.124	1.179
70	1.147	1.143	1.140	1.136	1.132	1.130	1.127	1.125	1.122	1.119	1.132
60	1.139	1.128	1.128	1.122	1.120	1.118	1.115	1.113	1.111	1.108	1.120
50	1.106	1.104	1.100	1.100	1.099	1.096	1.095	1.094	1.093	1.092	1.098
40	1.087	1.086	1.085	1.085	1.084	1.082	1.082	1.081	1.081	1.082	1.084
30	1.079	1.076	1.075	1.075	1.074	1.073	1.074	1.074	1.073	1.072	1.075
20	1.069	1.067	1.068	1.069	1.067	1.071	1.066	1.067	1.066	1.065	1.068
10	1.062	1.065	1.062	1.063	1.064	1.062	1.063	1.062	1.063	1.066	1.063
5	1.063	1.064	1.062	1.063	1.059	1.065	1.063	1.060	1.062	1.062	1.062
3	1.060	1.059	1.060	1.060	1.060	1.060	1.060	1.067	1.062	1.059	1.061

ตารางที่ 3 คาบของการแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม เมื่อความยาวเชือกมีค่าเป็น 28 cm

ความสูง (cm)	คาบเวลา (s)										คาบเวลาเฉลี่ย (s)
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	(T_{av})
4	1.063	1.068	1.063	1.063	1.062	1.066	1.064	1.064	1.064	1.062	1.064
5	1.063	1.064	1.063	1.068	1.064	1.064	1.062	1.066	1.065	1.063	1.064
6	1.063	1.063	1.066	1.064	1.068	1.064	1.063	1.064	1.064	1.064	1.064
7	1.064	1.064	1.064	1.064	1.062	1.064	1.064	1.062	1.064	1.064	1.064
8	1.064	1.065	1.064	1.064	1.063	1.064	1.064	1.064	1.063	1.063	1.064
9	1.065	1.065	1.064	1.064	1.064	1.068	1.065	1.064	1.064	1.065	1.065
10	1.068	1.063	1.066	1.065	1.066	1.066	1.068	1.064	1.064	1.064	1.065
11	1.069	1.067	1.066	1.065	1.064	1.065	1.065	1.064	1.064	1.064	1.065
12	1.068	1.067	1.066	1.067	1.064	1.066	1.065	1.066	1.064	1.064	1.066
13	1.067	1.069	1.063	1.065	1.064	1.068	1.065	1.067	1.065	1.064	1.066

จากผลการทดลองสรุปได้ว่าคาบของการแกว่งของ ไซคลอยดัล เพนดูลัม มีค่าคงที่ ไม่เปลี่ยนตามแอมพลิจูด (ต่างกันตรงทศนิยมตำแหน่งที่ 3 ของวินาที) แต่คาบของการแกว่งของซิมเปิล เพนดูลัม เพิ่มขึ้นตามแอมพลิจูด โดยคาบของการแกว่งเปลี่ยนแปลงน้อยมากจนอาจถือได้ว่ามีค่าคงที่ เมื่อแกว่งด้วยแอมพลิจูดน้อยกว่า 5° และนาฬิกาที่ใช้จับเวลาต้องมีความละเอียดถึงมิลลิวินาที (1/1,000 วินาที) จึงมีความละเอียดพอที่จะสรุปผลการทดลองได้

จากสมการของคาบของการแกว่งของ ไซคลอยดัล เพนดูลัม คือ $T = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$

และสมการของคาบของการแกว่งของซิมเปิล เพนดูลัม คือ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

โดยที่ $L = 4a = 28\,cm. = 0.28\,m.$ สำหรับการทดลองครั้งนี้

จึงได้ $T^2 = \frac{4\pi^2 L}{g}$ และ $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$

เมื่อ T = 1.064 s จะได้ $g = \frac{4\pi^2(0.28)}{(1.064)^2} m/s^2 = 9.764\, m/s^2$

เมื่อ T = 1.063 s จะได้ $g = \frac{4\pi^2(0.28)}{(1.063)^2} m/s^2 = 9.782\, m/s^2$

เมื่อ T = 1.062 s จะได้ $g = \frac{4\pi^2(0.28)}{(1.062)^2} m/s^2 = 9.801\, m/s^2$

เนื่องจากค่าท้องถิ่นของความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกบริเวณการท่าเรือแห่งประเทศไทย คลองเตย ที่วัดโดยกรมแผนที่ทหาร ซึ่งมีค่าเป็น 9.783 m/s^2 ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่ได้จากการทดลองครั้งนี้จึงสอดคล้องอย่างดีค่าท้องถิ่นของค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่สถานที่ทำการทดลอง

4.3 การทดลองเพื่อยืนยันสมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์

ตารางที่ 4 เวลาในการเคลื่อนที่ระหว่าง 2 ตำแหน่ง คู่เดียวกัน บนรางไซคลอยด์และรางตรงปรับความเอียงได้

ความสูง (cm)	ลักษณะของราง	คาบเวลา (s)										คาบเวลาเฉลี่ย (s)
		T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	(T_{av})
2 ถึง	ไซคลอยด์	0.235	0.236	0.237	0.236	0.233	0.229	0.248	0.247	0.239	0.246	0.239
0	รางตรง	0.312	0.320	0.326	0.315	0.338	0.314	0.308	0.330	0.346	0.343	0.325
3 ถึง	ไซคลอยด์	0.256	0.257	0.250	0.267	0.276	0.262	0.281	0.264	0.272	0.263	0.265
0	รางตรง	0.314	0.312	0.315	0.296	0.301	0.313	0.327	0.295	0.295	0.294	0.306
4 ถึง	ไซคลอยด์	0.255	0.243	0.258	0.274	0.250	0.267	0.273	0.275	0.295	0.276	0.267
0	รางตรง	0.323	0.306	0.313	0.296	0.325	0.315	0.318	0.285	0.309	0.306	0.310
5 ถึง	ไซคลอยด์	0.274	0.252	0.267	0.276	0.268	0.265	0.275	0.270	0.276	0.265	0.269
0	รางตรง	0.308	0.304	0.319	0.321	0.303	0.295	0.290	0.284	0.291	0.309	0.302
6 ถึง	ไซคลอยด์	0.299	0.256	0.270	0.265	0.279	0.261	0.263	0.302	0.263	0.269	0.273
0	รางตรง	0.289	0.305	0.305	0.297	0.325	0.299	0.307	0.315	0.313	0.314	0.307
7 ถึง	ไซคลอยด์	0.244	0.241	0.260	0.286	0.243	0.259	0.253	0.268	0.265	0.257	0.258
0	รางตรง	0.323	0.336	0.329	0.329	0.341	0.320	0.319	0.308	0.317	0.321	0.324
1 ถึง	ไซคลอยด์	0.430	0.416	0.458	0.467	0.481	0.435	0.462	0.435	0.430	0.439	0.445
1	รางตรง	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2 ถึง	ไซคลอยด์	0.365	0.367	0.363	0.370	0.377	0.396	0.378	0.390	0.402	0.390	0.380
1	รางตรง	0.586	0.588	0.605	0.608	0.593	0.583	0.573	0.611	0.591	0.595	0.593
3 ถึง	ไซคลอยด์	0.377	0.371	0.386	0.382	0.387	0.392	0.389	0.356	0.379	0.387	0.381
1	รางตรง	0.534	0.524	0.544	0.545	0.546	0.522	0.511	0.532	0.527	0.549	0.533

ตารางที่ 4 เวลาในการเคลื่อนที่ระหว่าง 2 ตำแหน่ง คู่เดียวกัน บนรางไซคลอยด์และรางตรงปรับความเอียงได้ (ต่อ)

ความสูง (cm)	ลักษณะของราง	คาบเวลา (s)										คาบเวลาเฉลี่ย (s)
		T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	(T_{av})
4 ถึง 1	ไซคลอยด์	0.359	0.345	0.340	0.344	0.343	0.361	0.369	0.379	0.364	0.359	0.356
	รางตรง	0.469	0.489	0.474	0.461	0.450	0.469	0.490	0.503	0.500	0.510	0.482
3 ถึง 2	ไซคลอยด์	0.427	0.431	0.495	0.437	0.433	0.427	0.426	0.436	0.427	0.428	0.437
	รางตรง	1.736	1.869	1.770	1.884	1.850	1.891	1.794	1.876	1.834	1.691	1.820
4 ถึง 2	ไซคลอยด์	0.408	0.439	0.412	0.432	0.410	0.466	0.409	0.406	0.439	0.413	0.423
	รางตรง	0.843	0.863	0.852	0.825	0.824	0.840	0.836	0.818	0.865	0.852	0.842
3 ถึง 2.5	ไซคลอยด์	0.446	0.439	0.446	0.434	0.489	0.482	0.479	0.445	0.498	0.446	0.460
	รางตรง	1.564	1.408	1.268	0.957	1.164	1.072	1.002	1.326	1.285	1.253	1.230
4 ถึง 3	ไซคลอยด์	0.478	0.417	0.459	0.428	0.484	0.469	0.475	0.421	0.443	0.478	0.455
	รางตรง	2.285	2.243	2.383	2.278	2.163	2.080	2.431	2.429	2.350	2.324	2.297

จากผลการทดลองสรุปได้ว่าในการเคลื่อนที่ระหว่าง 2 ตำแหน่งใด ๆ การเคลื่อนที่ตามทางโค้งไซคลอยด์บนรางไซคลอยด์ใช้เวลาน้อยกว่าการเคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรงบนพื้นเอียง ซึ่งเป็นการยืนยันสมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผล

5.1.1 การทดลองเพื่อยืนยันสมบัติทอตโทโครนของไซคลอยด์

จากการทดลองพบว่าคาบของการออสซิลเลตของลูกตุ้มบนทางโค้งไซคลอยด์มีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามแอมพลิจูดของการออสซิลเลต ผลการทดลองจึงยืนยันสมบัติทอตโทโครนของไซคลอยด์

5.1.2 การทดลองเพื่อเปรียบเทียบคาบของการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม กับ ไซคลอยดัล เพนดูลัม ที่มีความยาวเชือกเท่ากัน

จากการทดลองพบว่าคาบของการแกว่งของไซคลอยดัล เพนดูลัม มีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามแอมพลิจูด แต่คาบของการแกว่งของซิมเปิล เพนดูลัม เพิ่มขึ้นตามแอมพลิจูด โดยคาบของการแกว่งเปลี่ยนแปลงน้อยมากจนอาจถือได้ว่ามีค่าคงที่ เมื่อแกว่งด้วยแอมพลิจูดน้อยกว่า 5°

5.1.3 การทดลองเพื่อยืนยันสมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์

จากการทดลองพบว่าในการเคลื่อนที่ระหว่าง 2 ตำแหน่งใด ๆ การเคลื่อนที่ตามทางโค้งไซคลอยด์บนรางไซคลอยด์ใช้เวลาน้อยกว่าการเคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรงบนพื้นเอียง ผลการทดลองจึงยืนยันสมบัติบราคิสโทโครนของไซคลอยด์

โดยนาฬิกาที่ใช้จับเวลาต้องมีความละเอียดถึงมิลลิวินาที (1/1,000 วินาที) จึงมีความละเอียดพอที่จะสรุปผลการทดลองได้ และจากการทดลองวัดคาบของการแกว่งแบบไซคลอยดัล เพนดูลัม และการแกว่งแบบซิมเปิล เพนดูลัม ในกรณีที่แกว่งเป็นมุมเล็ก ๆ เมื่อนำไปคำนวณหาค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ค่าที่ได้สอดคล้องอย่างดีกับค่าท้องถิ่นของค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่วัดโดยกรมแผนที่ทหาร

5.2 ข้อเสนอแนะ

ถ้าสามารถสร้างรางไซคลอยด์ที่ปรับเปลี่ยนขนาดได้ จะเกิดความสะดวกในการศึกษาเปรียบเทียบการออสซิลเลตของลูกตุ้มบนรางไซคลอยด์ขนาดต่าง ๆ

บรรณานุกรม

1. ก่องกัญจน์ ภัทรากาญจน์. 2519. **ฟิสิกส์ขั้นมหาวิทยาลัย**. พิมพ์ครั้งที่ 3 กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง
2. Agmon D and Gluck P 2009 Classical and Relativistic Mechanics (Singapore: World Scientific)
3. Gluck P 2005 Phys. Edu. **40** 206
4. Roller D E and Bloom R 1981 Physics vol. I (San Francisco. CA: Holden-Day)
5. Hoffman Dale T. A Cycloid Race. Physics Teacher, v29 n6 p395-97 Sep 1991
6. php.math.unifi.it , The Cycloidal Pendulum

ภาคผนวก

ประวัติของผู้วิจัย

1. ชื่อ – นามสกุล (ภาษาไทย) นางสุจิตต์ ศรีชัย

   ชื่อ – นามสกุล (ภาษาอังกฤษ) Mrs. Suchit Srichai
2. หมายเลขบัตรประชาชน 31001 00251 556
3. ตำแหน่งปัจจุบัน ผู้ช่วยศาสตราจารย์สาขาฟิสิกส์
4. หน่วยงานที่สามารถติดต่อได้สะดวก

   ที่อยู่ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สาขาฟิสิกส์

   เลขที่ 2 ถนนนางลิ้นจี่ แขวงทุ่งมหาเมฆ เขตสาทร กรุงเทพฯ 10120

   หมายเลขโทรศัพท์ 02 -2833991-5 ต่อ 1194

   โทรสาร 02-8604486

   e-mail srichai_suchit@hotmail.com
5. ประวัติการศึกษา

   พ.ศ. 2523 วท.บ. (ฟิสิกส์)

   มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้า ธนบุรี (ชื่อเดิม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า ธนบุรี)

   พ.ศ. 2530 วท.ม. (พลังงานและวัสดุ)

   มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้า ธนบุรี (ชื่อเดิม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า ธนบุรี)
6. สาขาที่มีความชำนาญพิเศษ(แตกต่างจากวุฒิการศึกษา) ระบุสาขาวิชาการ -
7. ประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการบริหารงานวิจัยทั้งภายในและภายนอกประเทศ โดยระบุสถานภาพในการทำงานวิจัยว่าเป็นผู้อำนวยการแผนงานวิจัย หัวหน้าโครงการวิจัย หรือผู้ร่วมวิจัยในแต่ละข้อเสนอการวิจัย -

   7.1 ผู้อำนวยการแผนงานวิจัย : ชื่อแผนวิจัย -

   7.2 หัวหน้าโครงการวิจัย : ชื่อโครงการวิจัย -

   7.3 งานวิจัยที่ทำเสร็จแล้ว : ชื่อผลงานการวิจัย -

   7.4 งานวิจัยที่กำลังทำ : ชื่อข้อเสนอการวิจัย แหล่งทุน และสถานภาพในการทำวิจัยว่าได้ทำการวิจัยลุล่วงแล้วประมาณร้อยละเท่าไร -

ประวัติของผู้วิจัย

1. ชื่อ – นามสกุล (ภาษาไทย) นายสุชาติ แซ่เฮ่ง

   ชื่อ – นามสกุล (ภาษาอังกฤษ) Mr. Suchart Sae-Heng
2. หมายเลขบัตรประชาชน 390 9800173 303
3. ตำแหน่งปัจจุบัน ข้าราชการบำนาญ
4. หน่วยงานที่สามารถติดต่อได้สะดวก

   ที่อยู่ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สาขาฟิสิกส์

   เลขที่ 2 ถนนนางลิ้นจี่ แขวงทุ่งมหาเมฆ เขตสาทร กรุงเทพฯ 10120

   หมายเลขโทรศัพท์ 02 -2833991-5 ต่อ 1194

   โทรสาร 02-8604486

   e-mail suchart.heng99@gmail.com
5. ประวัติการศึกษา

   พ.ศ. 2522 กศ.บ. (ฟิสิกส์)

   มหาวิทยาลัยทักษิณ (ชื่อเดิม มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา)

   พ.ศ. 2531 วท.ม. (ฟิสิกส์)

   คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
6. สาขาที่มีความชำนาญพิเศษ (แตกต่างจากวุฒิการศึกษา) ระบุสาขาวิชาการ เขียนตำราวิชาการทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
7. ประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการบริหารงานวิจัยทั้งภายในและภายนอกประเทศ โดยระบุสถานภาพในการทำงานวิจัยว่าเป็นผู้อำนวยการแผนงานวิจัย หัวหน้าโครงการวิจัย หรือผู้ร่วมวิจัยในแต่ละข้อเสนอการวิจัย -

   7.1 ผู้อำนวยการแผนงานวิจัย : ชื่อแผนวิจัย -

   7.2 หัวหน้าโครงการวิจัย : ชื่อโครงการวิจัย -

   7.3 งานวิจัยที่ทำเสร็จแล้ว : ชื่อผลงานการวิจัย -

   7.4 งานวิจัยที่กำลังทำ : ชื่อข้อเสนอการวิจัย แหล่งทุน และสถานภาพในการทำวิจัยว่าได้ทำการวิจัยลุล่วงแล้วประมาณร้อยละเท่าไร -